

УДК 381.3.06

**ЦИКЛИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ MS EXCEL: СУММИРОВАНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ****Д. М. Смагин, И. Г. Оксанич**Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского  
ул. Первомайская, 20, 39600 г. Кременчуг, Украина. E-mail: kafius@kdu.edu.ua

Рассмотрены вопросы суммирования степенных рядов с помощью циклических ссылок MS Excel. Приведены конкретные примеры с детальным анализом проблемы организации циклических ссылок. Отмечено, что с помощью циклических ссылок MS Excel можно также осуществить решение алгебраических и трансцендентных уравнений.

**Ключевые слова:** циклические ссылки, суммирование, степенные ряды.

**CIRCULAR REFERENCES MS EXCEL: SUMMATION OF POWER SERIES****D. M. Smagin, I. G. Oksanych**Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University  
vul. Pershotravneva, 20, 39600, Kremenchuk, Ukraine. E-mail: kafius@kdu.edu.ua

The problems of summation of power series with circular references MS Excel have been considered. Concrete examples with detailed analysis of the problem of circular references organization have been considered. It has been noted that the solution of algebraic and transcendental equations with the help of circular references MS Excel can be obtained.

**Key words:** circular references, the summation, the power series

**ЦИКЛІЧНІ ПОСИЛАННЯ MS EXCEL: ПІДСУМОВУВАННЯ СТУПЕНЕВИХ РЯДІВ****Д. М. Смагін, І. Г. Оксанич**Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського  
вул. Першотравнева, 20, 39600 м. Кременчук, Україна. E-mail: kafius@kdu.edu.ua

Розглянуто підсумовування ступеневих рядів за допомогою циклічних посилань MS Excel. Наведені конкретні приклади з детальним аналізом проблеми організації циклічних посилань. Зазначено, що за допомогою циклічних посилань MS Excel можливо також здійснювати розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.

**Ключові слова:** циклічне посилання, підсумовування, ступеневі ряди.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** Известно, что решение многих математических задач в численном виде осуществляют методом простой итерации, используя или языки программирования, или универсальные математические пакеты, такие как Mathcad, Mathematica. Однако, применение последних требует отдельной их установки и большой оперативной памяти компьютера.

В нашем случае решение задачи суммирования степенных рядов осуществляется с применением доступной, широко распространенной офисной программы MS Excel, не требующей отдельной установки и специального образования в области программирования и прикладной математики.

Степенные ряды являются мощным вычислительным средством. С их помощью можно, например, вычислять приближенные значения функций и некоторые "неберущиеся" определенные интегралы.

Целью данной работы является исследовать возможности применения циклических ссылок MS Excel для суммирования степенных рядов, предложить способ организации циклических ссылок для решения поставленной задачи и показать на конкретном примере реализацию этого способа с анализом полученного результата.

**МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.** Циклическая ссылка (circular reference) – это формула в ячейке, которая ссылается на свое собственное значение напрямую или через последовательность других ссылок. Наиболее

тривиальным типом циклической ссылки является формула, которая содержит ссылку на ту же ячейку, в которую она введена. Циклические ссылки могут быть случайными и преднамеренными. Случайная циклическая ссылка возникает в результате допущенной ошибки при вводе формулы. Например, при вводе в ячейку A1 формулы = A1+1. В этом случае Excel воспринимает появление циклической ссылки как ошибку и отображает диалоговое окно предупреждения. Если циклическая ссылка возникла случайно, то следует щелкнуть на кнопке <ОК>, чтобы вернуться в режим редактирования формулы и устранить циклическую ссылку. Если циклическая ссылка создана преднамеренно, следует щелкнуть на кнопку *Отмена*, чтобы оставить формулу без изменений.

Преднамеренные циклические ссылки могут оказаться полезными и вводятся для выполнения определенных задач. Например, правильно заданные циклические ссылки могут выступать функциональным эквивалентом циклических структур, используемых в языках программирования, например, в VBA или Pascal. При этом использование циклических ссылок не требует знаний программирования. Посредством умышленных циклических ссылок можно просто и эффективно проводить рекурсию или итерацию при решении прикладных математических задач.

Чтобы осуществить преднамеренную циклическую ссылку, следует установить флажок *Итерации* на вкладке *Вычисления* диалогового окна *Параметры*, которое открывается командой *Сервис* → *Параметры*. В этом случае Excel пересчитывает заданное число раз все ячейки, которые содержат циклическую ссылку.

Основы работы с циклическими ссылками изложены в изданиях [1-3], посвященных Excel.

Некоторые примеры применения циклических ссылок приведены в работах [4,5].

*Применение циклических ссылок для решения итерационных задач.*

Метод простой итерации является одним из важнейших способов численного решения многих прикладных математических задач [5].

По умолчанию Excel не производит итерационные вычисления с циклическими ссылками. Чтобы такие вычисления производились, следует установить соответствующий режим. Чтобы активизировать режим итераций, требуется выполнить команду *Сервис* → *Параметры*. Вкладка *Вычисления* диалогового окна *Параметры* содержит три группы параметров, относящихся к вычислению циклических ссылок.

#### 1. Флажок *Итерации*.

Если не установлен этот флажок, Excel не производит итерационные вычисления и в случае создания формулы с циклической ссылкой отображает диалоговое окно предупреждения.

Для организации циклических ссылок необходимо установить этот флажок. После этого программа будет готова выполнять итерационные вычисления в автоматическом или в ручном режиме.

2. Поле *Предельное число итераций* (Maximum Iterations) определяет максимальное число итераций, производимых Excel.

3. Поле *Относительная погрешность* (Maximum Change) определяет, когда заканчиваются итерации.

Если установлен флажок *Итерации*, Excel принимает по умолчанию *Предельное* число итераций, равным 100, и в поле *Относительная погрешность* задает значение 0,001. Таким образом, Excel выполняет пересчет до 100 раз или пока изменение значений между итерациями не станет меньше 0,001, т. е. до выполнения одного из этих условий.

Эти параметры можно изменить. Для получения более точного результата следует уменьшить значение допустимой погрешности. Если после выполнения 100 итераций результат не сходится к одному значению, можно увеличить их число. Однако данное значение не может быть более 32767.

После нажатия кнопки ОК следует выход из диалогового окна *Параметры*, и программа Excel готова выполнить итерационные вычисления с циклической ссылкой. Эти вычисления в Excel могут осуществляться в автоматическом или ручном режимах.

Автоматический режим вычислений установлен по умолчанию. Иногда возникает необходимость управлять процессом вычисления. В этом случае нужно установить ручной режим вычислений. Для

этого следует установить переключатель *Вручную* на вкладке *Вычисления* диалогового окна *Параметры*.

В ручном режиме Excel будет выполнять пересчет формул только тогда, когда будет явно подана такая команда. Для этого следует нажать клавишу <F9> или кнопку *Вычислить*. При этом, Excel пересчитывает формулы во всех открытых рабочих книгах. При нажатии сочетания клавиш <Shift + F9> или кнопки *Пересчет* листа Excel пересчитывает только активный лист.

Приступим к практическому использованию циклических ссылок на примере суммирования степенных рядов.

#### *Пример 1*

Вычислить сумму ряда

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \dots \quad (1)$$

с точностью  $\epsilon = 0,000001$ .

Ряд (1) является знакочередующимся степенным рядом. Общий член ряда (1) можно представить в виде:

$$y_i = (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \text{ где } i = 0, \dots, \infty. \quad (2)$$

Степенной ряд (1) сходится, причем абсолютно, на всей числовой оси и имеет в качестве суммы функцию  $\sin x$  при любом  $x$ . Этим рядом пользуются для вычисления значений  $\sin x$  при различных значениях аргумента  $x$ .

Алгоритм решения поставленной задачи включает следующие действия:

- вычисление последовательности  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  членов ряда (1), используя формулу (2);
- суммирование  $y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n$  тех членов ряда, абсолютная величина которых не меньше заданной точности  $\epsilon$ .

В результате, сумма первых членов ряда будет представлять сумму всего ряда (1) с заданной точностью, так как отброшенная сумма не превышает значения первого отброшенного члена ряда.

Решение поставленной задачи состоит из двух этапов.

1. Задание начальных значений переменным, участвующих в циклических вычислениях.
2. Циклические вычисления с применением циклических ссылок MS Excel.

Прежде всего установим ручной режим вычислений, установив переключатель *Вручную* на вкладке *Вычисления* диалогового окна *Параметры*. При этом флажок *Итерации* должен быть установлен.

#### *Задание начальных значений.*

Отметим, что вследствие установленного способа вычислений в Excel, ячейка с исходным значением должна находиться левее или выше ячейки с формулой.

В ячейки *A2, A3, A4, A5* вводим символы  $i, x, y, s$ , соответственно, где

- $i$  – индекс суммирования;
- $x$  – аргумент;

$y$  – член ряду;

$s$  – сума ряду;

Пусть значение аргумента  $x = 0,75$ .

При начальном значении индекса суммирования  $i = 0$  определим значение величины члена ряда  $y$  и суммы ряда  $s$ . Для этого:

– в ячейку B2 вводим число равное нулю, соответствующее начальному значению переменной цикла;

– в ячейку B3 вводим значение аргумента  $x$ , т. е. число 0,75;

– в ячейку B4 вводим значение величины первого члена ряда  $y_0$ , т. е. число, в данном случае, равное аргументу  $x$  или формулу =B3;

– в ячейку C5 вводим формулу =B4, нажимая клавишу <Enter> при каждом вводе.

В результате получим первоначальное значение суммы ряда  $s = x = 0,75$ .

*Циклические вычисления.*

Осуществим итерационный процесс суммирования членов ряда (1) с помощью циклических ссылок при значениях  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

В ячейке C5 осуществим вычисление суммы первых членов ряда, т.е. частичной суммы, которая будет представлять приближенно искомую сумму ряда. Для этого следует организовать циклический вычислительный процесс с помощью циклических ссылок MS Excel, выполнив следующие действия:

– в ячейку B5 вводим формулу = C5;

– выделим ячейку C2 и введем формулу = C2+1;

– в ячейку C3 введем формулу = B3;

– в ячейку C4 введем формулу общего члена ряда  $=(-1)^{C2} \cdot C3^{(2 \cdot C2 + 1)} / \text{ФАКТР}(2 \cdot C2 + 1)$ .

– в ячейку C5 введем формулу = B5 + C4.

Тем самым, ячейки B5, C2, C4, C5 связаны циклическими ссылками. В этих ячейках осуществляется итерационный процесс решения задачи. А именно, ячейка C2 содержит число выполненных циклов. В ячейке C4 вычисляется значение текущего члена ряда на очередном итерационном шаге. В ячейке C5 отображается значение суммы ряда. Ячейка B5 содержит значение суммы ряда на предыдущем шаге.

Каждый промежуточный результат вычисления используется в последующих вычислениях. Для этого, значения ячеек B5 и C4 суммируются и результат заносится в ячейку C5.

Осуществим итерации с циклическими ссылками, нажимая клавишу <F9> или <Shift + F9>.

Так как максимальное число итераций задано равным 1, тогда одно нажатие клавиши <F9> приведет к выполнению лишь одного цикла вычислений. Нажимайте клавишу <F9> столько раз, пока значение в ячейке C4 станет по абсолютной величине меньше заданной точности вычисления суммы ряда. В этом случае заданная точность решения  $\epsilon = 0,000001$  будет обеспечена.

Результат вычисления суммы степенного ряда с помощью циклических ссылок Excel представлен в

табл. 1. Для решения поставленной задачи потребовалось всего  $i = 5$  итераций. Сумма ряда составила величину  $s = 0,68163876$ .

Таблица 1 – Вычисление суммы степенного ряда

	A	B	C
1	Символы	Начальные значения	Вычисления с циклическими ссылками
2	i	0	5
3	x	0,75	0,75
4	y	0,75	-1,05808E-09
5	s	0,681638761	0,68163876

*“Снимок” итерационного процесса.*

Получим “снимок” итерационного процесса – последовательными приближениями. Для этого создадим таблицу, отображающую значения предыдущих и последующих оценок сумм ряда.

Установим автоматический режим вычислений. Для этого:

1) перезагрузим MS Excel. В этом случае автоматический режим вычислений установится по умолчанию.

2) или выполним команду меню *Сервис* → *Параметры*. В диалоговом окне *Параметры* перейдем на вкладку *Вычисления*. Снимем флажок *Итерации*. Переключатель установим на *Автоматически*. Установим *Предельное число итераций* равное 100. Значение *Относительная погрешность* оставим равным 0,001. Затем:

– в ячейки A1, B1, C1 введем символы  $i, y, s$ ;

– введем в ячейку A2 число 0;

– в ячейку B2 введем число 0,75, равное значению первого члена ряда;

– в ячейку C2 введем формулу =B2, нажимая клавишу <Enter> при каждом вводе.

Для продолжения итерационного процесса

– в ячейку A3 введем формулу =A2+1;

– в ячейку B3 введем формулу общего члена ряда  $=(-1)^{A3} \cdot B2^{(2 \cdot A3 + 1)} / \text{ФАКТР}(2 \cdot A3 + 1)$ ;

– в ячейку C3 введем формулу =C2+B3;

– выделим диапазон ячеек A3:C3 и осуществим копирование в диапазон A3:C7, тем самым осуществив ряд итерационных вычислений суммы ряда  $s$ .

Результаты вычислений сведены в табл. 2, из которой видно, что заданная точность вычисления суммы ряда (1) обеспечена при  $i = 5$ . При этом сумма ряда  $s = 0,68163876$ .

Предложенный метод суммирования степенных рядов можно использовать при вычислении значений многих элементарных функций, представляемых степенными рядами.

Например, пусть требуется вычислить значения функции  $Y = \text{arctg } x$  с точностью  $\epsilon = 0,000001$ .

Ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{(2i+1)} \quad (3)$$

представляет функцию  $\arctg x$ , если аргумент  $x$  принадлежит диапазону  $(-1 \leq x \leq 1)$ .

Установим ручной режим вычислений, установив переключатель *Вручную* на вкладке *Вычисления* диалогового окна *Параметры*. При этом, должен установлен флажок *Итерации*.

Таблица 2 – Снимок итерационного процесса

	A	B	C
1	i	y	S
2	0	0,75	0,75
3	1	-0,0703125	0,6796875
4	2	0,001977539	0,681665039
5	3	-2,64849E-05	0,681638554
6	4	2,06913E-07	0,681638761
7	5	-1,05808E-09	0,68163876

*Задание начальных значений.*

- в ячейку C2 введем число, равное нулю;
- в ячейку C3 введем значение аргумента  $x$ , принадлежащее области определения функции, т.е. любое число диапазона  $(-1 \leq x \leq 1)$ ;
- в ячейку C5 введем значение величины первого члена ряда  $y_0$ , т.е. число, в данном случае, равное аргументу  $x$ .

*Циклические вычисления*

- в ячейку B5 введем формулу = C5;
- выделим ячейку C2 и введем формулу = C2+1;
- в ячейку C4 введем формулу общего члена ряда  $=(-1)^{C2} * C3^{(2 * C2 + 1)} / (2 * C2 + 1)$ ,
- в ячейку C5 введем формулу = B5 + C4 ;
- клавишу <F9> следует нажать столько раз, пока значение в ячейке C4 станет по абсолютной величине меньше  $\epsilon = 0,000001$ .

Именно в ячейке C5 осуществляется вычисление суммы ряда, как результат сложения значений ячеек B5 и C4.

В результате, при  $x = 0,75$  значение суммы ряда (3) достигнет величины  $s = 0,643501$  на итерационном шаге  $i = 18$ , т.е. вычисления показали, что  $\arctg(0.75) \approx 0.643501$ .

**ВЫВОДЫ.** Метод простой итерации, основанный на применении циклических ссылок Excel, является эффективным и очень удобным средством позволяющий просто осуществлять суммирование степенных рядов с заданной точностью.

Циклические ссылки MS Excel можно также с успехом применить для решения алгебраических и трансцендентных уравнений, осуществлять вычисления

с заданной точностью функций, представленных степенными рядами. Применение циклических ссылок Excel возможно также при решении научных, экономических, инженерных задач, для которых применимы итерационные методы. В частности, такой экономической задачей является вычисление чистой прибыли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Додж М., Стинсон К. Эффективная работа с Microsoft Excel 2000. – СПб.: Питер, 2002. – 1056 с.
2. Ларсен Р. Инженерные расчеты в Excel. – М.: «Вильямс», 2002. – 544 с.
3. Уокенбах Дж. Подробное руководство по созданию формул в Excel 2003. – М.: «Вильямс», 2005. – 640 с.
4. Луговой А.В., Смагин Д.М. Циклические ссылки MS Excel: Итерационные методы решения задач. Вісник Кременчуцького державного університету ім. М. Остроградського. Кременчук: КДПУ, 2009. – Вип. 4 (57). Ч.2. С. 36-40.
5. Луговой А.В., Пуятин Е.П., Смагин Д.М., Степанов В.П. Численные методы решения задач на персональных компьютерах. – Кременчук: КГПУ, 2003. – 540 с.

REFERENCE

1. Dodge M., Stinson K. Effective work with Microsoft Excel 2000. – St.: Peter, 2002. – 1056 p. [in Russian].
2. Larsen R. Engineering calculations in Excel. – M.: "Williams", 2002. – 544 p. [in Russian].
3. Wkenbah J. A detailed guide to creating formulas in Excel 2003. – M.: "Williams", 2005. – 640 p. [in Russian].
4. Lugovoy A.V., Smagin D.M. Circular references MS Excel: Iterative methods for solving problems. Bulletin of the Kremenchug State University M. Ostrogradskiy. Kremenchug: KSPU, 2009. – Vol. 4 (57). P.2. – P. 36-40 [in Russian].
5. Lugovoy A.V., Putyatin E.P., Smagin D.M., Stepanov V.P. Numerical methods to solve problems on personal computers. – Kremenchug: KSPU, 2003. – 540 p. [in Russian].

Стаття надійшла 10.01.11  
Рекомендовано до друку  
д.т.н., проф. Гученком М.І.