УДК 519.517.946

ЗАСТОСУВАННЯ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ КЕРУВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИМ ПОЛЕМ

В. П. Ляшенко, О. Б. Кобильська
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E–mail: leca91@ya.ru

Розглядається математична модель теплового процесу, що відбувається у рухомому осесиметричному ізотропному середовищі з періодично діючим джерелом тепла. Для визначення параметра керування тепловим процесом розв'язана обернена задача з інтегральною умовою для рівняння теплопровідності. Запропонована методика визначення параметра керування температурним полем. Обернена задача теплопровідності представлена в екстремальній постановці. Для розв'язання отриманої задачі використано ітераційні методи.

Ключові слова: початково-крайова задача, волочіння, параметр керування, інтегральна умова.

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ

В. П. Ляшенко, О. Б. Кобильская
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E–mail: leca91@ya.ru

Рассматривается математическая модель температурного поля в движущейся осесимметричной среде с периодически действующим источником тепла. Для определения параметров управления тепловым процессом решена обратная задача с интегральным условием для уравнения теплопроводности. Предложена методика определения параметра управления температурным полем. Обратная задача теплопроводности представлена в экстремальной постановке. Для решения полученной задачи использованы итерационные методы.

Ключевые слова: начально-краевая задача, волочение, параметр управления, интегральное условие.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ**.** Виробництво тугоплавкого і важкодеформованого дроту без попереднього розігріву перед пластичною деформацією призводить до зниження якості продукції і часто буває неможливим. Застосування технології електропластичного волочіння (ЕПВ) у процесі виробництва тонкого дроту періодично діючими імпульсними внутрішніми джерелами тепла дозволяє знизити зусилля пластичної деформації та вести процес волочіння при понижених температурах [1]. Однією з основних технологічних проблем, що виникають під час реалізації ЕПВ є визначення параметрів керування зазначеним процесом, які б дозволили максимально знизити зусилля волочіння. Ці параметри можна визначити шляхом дослідження математичної моделі процесу ЕПВ та розв'язання оберненої задачі для рівняння, яке описує температурне поле. Математична модель такого процесу у найбільш повній постановці призводить до дослідження та розв'язання нелінійних і нелокальних задач для рівнянь теплопровідності та термопружності [2, 3]. Аналітичних методів розв'язання таких задач не існує, тому для їх цього можна ефективно застосовувати ітераційні методи [4].

Постановка задачі. З математичної точки зору температурне поле рухомого дроту під час процесу ЕПВ можна розглядати як температурне поле рухомого осесиметричного ізотропного середовища з діючими імпульсними внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою I в зоні нагрівання. За таких умов температурне поле в зоні нагрівання може бути визначено за допомогою розв'язку крайової задачі для рівняння теплопровідності [1–3].

Розглянемо загальну постановку задачі визначення температурного поля в обмеженому середовищі рухомого зі швидкістю $v(t)$ дроту, який розігрівається внутрішніми джерелами тепла. Процес нагрівання відбувається у два етапи.

На першому етапі нагрівання відбувається зі змінною швидкістю $v(t)$ руху середовища. Це нестаціонарний перехідний процес. Він має місце, коли дріт, який нагрівається, починає рухатися. Під час перехідного процесу, який відбувається протягом часу $0 \le t < t_0$, швидкість руху середовища $v(t)$ змінюється в межах $0 \le v(t) < v = const$. Якщо під час перехідного процесу в зоні нагрівання діють постійні джерела тепла, параметри яких не змінюються, то температурне поле буде нестаціонарним. Коли нагрівання дроту відбувається одночасно з пластичною деформацією, а температура під час нагрівання не дозволяє вести процес волочіння, не порушуючи умову нерозривності, то це призводить до обриву дроту [1]. Тому одночасно з питанням визначення температурного розподілу під час перехідного процесу виникає проблема визначення таких параметрів керування процесом нагрівання, за яких температурне поле під час руху середовища зі змінною $v(t)$ швидкістю стає стаціонарним. Цього можна досягти, обравши відповідним чином щільність джерел тепла.

Починаючи з деякого моменту часу, при $t \ge t_0$, швидкість руху дроту стає постійною $v = const$. Вибір параметрів керування дозволяє підтримувати в зоні ЕПВ необхідний з технологічної точки зору режим обробки. Розглянемо початково крайову задачу для рівняння теплопровідності, розв'язання якої дозволяє визначити температурне поле рухомого дроту, в зоні нагрівання якого діє джерело тепла зі щільністю $w(z,t,T)$, що залежить від координат та температури [2].

Оскільки перехід від нестаціонарного температурного поля (перехідний процес) до стаціонарного процесу відбувається неперервно в часі, то на початку стаціонарного процесу повинна виконуватися умова узгодження температурних розподілів, тобто $\lim_{t\to t_0-0} T(r,z,t) = \lim_{t\to t_0+0} T(r,z,t)$.

Мета роботи – знайти оптимальні значення параметрів керування процесом ЕПВ під час перехідного процесу волочіння, коли дріт рухається зі змінною швидкістю.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Визначення нестаціонарного температурного розподілу під час перехідного процесу призводить до розв'язання наступної початково крайової задачі для рівняння теплопровідності в області Ω_t, $\Omega_t : \{(z,r,t) | 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \le t_0\}$ [3]

$$l\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + l\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - vcr_n\frac{\partial T}{\partial z} - cr_n\frac{\partial T}{\partial t} = -W(z,t,T), (r,z)\in\Omega_t \quad (1)$$

$$T(r,z,0) = T_0, \quad (2)$$

$$l\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = f_{12}\left[a(T_c - T) - es(T_c^4 - T^4)\right],$$
$$l\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=L} = f_{12}\left[a(T - T_c) - es(T^4 - T_c^4)\right], \quad (3)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0,\ l\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0} = = f_{12}\left[-a(T)(T - T_c) - es(T^4 - T_c^4)\right], \quad (4)$$

де $w(z,t,T)$ у випадку залежності джерел тепла від координати і часу має вигляд

$$W(z,t,T) = f_{11}(z) f_2(T), \quad (5)$$
$$W(z,t,T) = f_{12}(z) f_2(T),$$

де $f_2(T) = \frac{I^2 r_0(1+bT)}{p^2 r_0^4}$, ρ_o, β – питомий опір і температурний коефіцієнт опору дроту.

Функції $f_{11}(z), f_{12}(t)$ залежно від технологічних особливостей процесу можуть мати вигляд

$$f_{11}(z) = \begin{cases} m\frac{z}{l_0} - mn, nl_0 \le z \le \left(n + \frac{1}{m}\right)l_0 \\ 0, \left(n + \frac{1}{m}\right)l_0 < z \le (n+1)l_0, z < 0 \end{cases},$$

$$f_{12}(t) = \begin{cases} m\frac{t}{t_0} - mn, nt_0 \le t \le \left(n + \frac{1}{m}\right)t_0 \\ 0, \left(n + \frac{1}{m}\right)t_0 < t \le (n+1)t_0, t < 0 \end{cases}.$$

$$f_{13}(t) = \begin{cases} \frac{2kt}{t_0} - 2kn, \\ nt_0 \le t \le (n + \frac{1}{2mk})t_0 \\ \frac{1}{m}, \\ (n + \frac{1}{2mk})t_0 < t \le (n + \frac{2m-1}{2mk})t_0 \\ -\frac{2kt}{t_0} + 2(kn+1), \\ (n + \frac{2m-1}{2mk})t_0 < t \le (n + \frac{1}{k})t_0 \\ 0, \\ (n + \frac{1}{k})t_0 < t < (n+1)t_0 \end{cases}$$

Тут параметри *m, n* визначають циклічний характер дії джерел тепла. Функції $f_{11}(z), f_{12}(t)$ є кусково-неперервними і додатно визначеними.

Залучимо інтегральну рівність

$$\int_{0+}^{t_0}\int_0^{2p} dj \int_{0+}^{r_0}\int_0^{l} \frac{I(t)^2 r_0 l + bI(t)^2 r_0 l T(r,z,t)}{v(t) r_0^4 p^2} dzdrdt =$$
$$= al\int_{0+}^{t}\iint_G \frac{T(r,z,t) - T_c}{v(t)} dg dt +$$
$$+ cr_n \int_{0+}^{t_0}\int_0^{2p} dj \int_0^{r_0}\int_0^{l} (T(r,z,t) - T_0) dzdrdt. \quad (6)$$

Вона виражає баланс енергії зони нагрівання. Функцію джерела тепла (5) будемо вважати невідомою функцією. Визначивши її, можна знайти температурне поле в даній області з розв'язку прямої задачі для рівняння теплопровідності (1).

Будемо шукати функцію керування $I(t)$ з умови мінімізації втрат тепла. Модуль різниці між виділеною реально енергією w_1 і енергією, отриманою із розв'язку задачі w_2, яка відповідає даному керуванню, повинен бути мінімальним. Керування $I(t)$ відповідає мінімуму нев'язки $J(t)$, що характеризує модуль різниці енергій виділеної реально і отриманої із розв'язку задачі.

Міру відхилення енергій, виділеної реально і отриманої із розв'язку задачі під час нагрівання, виражає функціонал в просторі функцій $I(t)$

$$J(I) = \min |w_1 - w_2|.$$

Його числове значення визначає відстань у функціональному просторі з метрикою $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i^j - y_i^j\right|$ між виділеною енергією, розрахованою зі значенням $I(t)$, і поглиненою енергією. Замість неперервної функції $I(t)$ розглянемо її скінчено вимірний аналог у вигляді вектора $I=\{I_1, I_2.....I_m\}^T$, компоненти якого отримані дискретизацією на часовій сітці $I_m = I(t_m)$. Будемо вважати, що часовий ряд $\{I_n\}_1^m$ використовується для кусково поліноміальної апроксимації шуканої функції.

Після усереднення за радіусом та зваживши на те, що температурне поле не залежить від кутової координати, умова (6) набуває вигляду (7)

$$\int_{0+}^{t_0}\int_{0}^{l}\frac{I(t)^2 r_0 l + b\, I(t)^2 r_0 u(z,t) l}{r_0^4 p^2 v(t)} dzdt = \tag{7}$$
$$= c r_n \int_{0+}^{t_0}\int_{0}^{l}(u(z,t)-T_0)dzdt + \frac{a\, l}{2p\, r_0}\int_{0+}^{t_0}\oint_{l}\frac{u(z,t)-T_c}{v(t)}dzdt.$$

Замінимо інтеграл скінченою сумою

$$J(I) = \Delta t \Delta x \sum_{n=1}^{m}\sum_{n=1}^{m}\left|W_1(I, x_n, t_n) - W_2(t_n)\right| \equiv$$
$$\equiv \Delta t \Delta x \left\|W_1[I] - W_2\right\| ,$$

де $\Delta t, \Delta x$ – кроки за часом і координатою, $W_1[I]$ – вектор виділеної реально енергії, W_2 – вектор енергії, отриманої з розв’язку задачі, обчислений за відомим значенням параметра I [4].

Таким чином, обернену задачу в екстремальній постановці можна звести до задачі мінімізації нев’язки енергії $\min_I\left|W_1[I] - W_2\right|$ у просторі з метрикою

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i^j - y_i^j\right|.$$

Для розв’язку задачі будемо використовувати ітераційний процес

$$I^{k+1} = I^k + \Delta I^k, k = 0,1\ldots,$$

де I_0 – початкове наближення шуканого параметру.

Як приросту ΔI^k при переході до наступного наближення використовується вектор

$$\Delta I^k = -b_k x^k,$$

де x^k – напрям від I^k; b_k – скалярна величина, що визначає довжину кроку вздовж цього напрямку.

Введемо до розгляду градієнт цільової функції

$$J'(I) = \left\{\frac{\partial J}{\partial I_1}, \frac{\partial J}{\partial I_2}, \frac{\partial J}{\partial I_3}\cdots\frac{\partial J}{\partial I_n}\right\}.$$

Припустимий напрям спуску x^k задаємо таким чином, щоб кут між ним і напрямом, протилежним градієнту $I'(I^k)$ у точці I^k був гострим, тобто виконувалась умова

$$\cos a = \frac{\left(J'^K, x^K\right)}{\left\|J'^K\right\|\cdot\left\|x^K\right\|} > 0,$$

$$J'^K = J'\left(I^k\right).$$

Глибина спуску b_k, що характеризує величину кроку при переході до наступного наближення, обирається як невідємне значення b, локально мінімізуюче цільову функцію за напрямом x^k.

Розглянутий метод спуску дозволяє покроково корегувати керування параметра I, послідовно зменшуючи значення функції $J\left(I^{k+1}\right) \le J\left(I^k\right)$. Так як диференціальний оператор рівняння (1) додатно визначений, можна допустити, що обернена задача має єдиний розв’язок, функція $J(t)$ має один мінімум, якщо вихідний функціонал є опуклим. Ця умова виконується для лінійних задач, а побудована послідовність буде збіжною до екстремального значення.

Ітераційну послідовність для мінімізації цільової функції можна побудувати відповідно до методу найшвидшого спуску або спряжених градієнтів.

У методі найшвидшого спуску

$$x^k = J'^k,$$

$$b_k : J\left(q^{k+1}\right) = \min_{b\ge 0} J\left(q^k - b\, J'^k\right).$$

Із останньої умови легко отримати формулу

$$b_k = \left\|J'^k\right\| / 2\left\|W_1\left[J'^k\right]\right\|.$$

У методі спряжених градієнтів

$$x^k = J'^k + g_k x^{k-1}, g_0 = 0.$$

Крок спуску визначається з умови мінімуму функції $J\left(q^{k+1}\right)$. У лінійному випадку будемо мати формулу

$$b_k = \frac{\left(J'^k, x^k\right)}{2\left\|W_1\left[x^k\right]\right\|}.$$

На рис. 1 зображені графіки температурних розподілів, отримані з розв'язку задачі (1)–(5). Функція $I(t)$ була знайдена методом спуску [4]. Чисельні розрахунки були зроблені для матеріалів цинк і вольфрам.

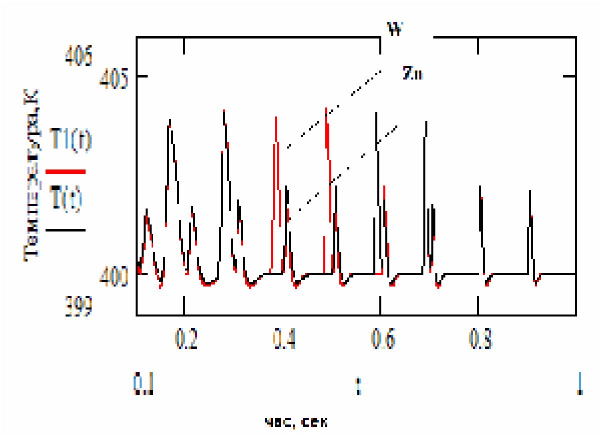

Рисунок 1 – Графіки температурних розподілів отримані для цинку і вольфраму із розв'язку (1)–(5) при значеннях параметрів

$$j = 10^7 \left[\frac{A}{m^2}\right], a = 1\left[\frac{W}{m^2 K}\right], \ v = 0,1\left[\frac{m}{c}\right],$$

$$r_0 = 0,2 \cdot 10^{-3}\left[m\right], \ L = 10^{-2}\left[m\right]$$

ВИСНОВКИ. Розглянута математична модель теплового процесу, котрий відбувається в рухомому осесиметричному ізотропному середовищі з діючими імпульсними внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою I в зоні нагрівання. На основі розв'язання оберненої задачі для рівняння теплопровідності запропонована методика визначення параметра керування температурним полем під час електропластичного волочіння.

Залучення інтегральної умови до початково-крайової задачі теплопровідності дозволило представити її в екстремальній постановці. Для отримання чисельних значень параметра керування були використані ітераційні градієнтні методи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Влияние электромагнитных полей на пластичность и прочность материалов: монография / О.А. Троицкий, В.П. Ляшенко, Е.Б. Кобыльская и др.; под. ред. В.Е. Громова. – Новокузнецк: Изд-во «СибГИУ», 2011. – 218 с.

2. Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов / О.А. Троицкий, В. И. Сташенко и др. // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ). – Харьков, 2011. – Вып. 4/2011. – С. 111–117.

3. Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении / В.П. Ляшенко Е.Б. Кобыльская, Т.А. Григорова, О.А. Троицкий // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук, 2011. – Вип. 4/2011 (69), част. 1. – С. 57–62.

4. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.

5. Темкин А.Г. Обратные методы теплопроводности. – М.: Энергия, 1973. – 464 с.

APPLICATION OF ITERATION METHODS FOR DETERMINATION OF TEMPERATURE FIELD CONTROL PARAMETERS

V. Lyashenko, L. Kobilskaya
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University
vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E–mail: leca91@ya.ru

This paper considers the mathematical model of temperature field for the mobile isotropic environment with periodically operating heat sources. For determination of the thermal process control parameters the inverse problem for the heat conductivity equation with an integrated condition is solved. The calculation method for the temperature field control parameter is offered. The inverse heat conduction problem is reduced to the extreme condition. To solve this problem the iteration methods are used. The temperature field control parameters for different materials and various environmental conditions of heat exchange on the surface of the cylinder are obtained.

Key words: boundary value problem, drawing, control parameter, integral condition.

REFERENCES

1. *Influence of the electromagnetic fields on plasticity and durability of materials: Monograph* / O.A. Troitskiy, V. Lyashenko, L. Kobilskaya; under red. V.E. Gromov. – Novokuznetsk: «SibGIU», 2011. – 218 p. [in Russian]

2. Electroplastic drawing and new technologies to create lightweight wire / O.A. Troitskiy, V.I. Stashenko, V. Ryzhkov and all. // *Problems of Atomic science and Technology (PAST)*. – Kharkov, 2011. – Iss. 4/2011. – PP. 111–117. [in Russian]

3. Research of the thermal component of the properties on the wire at electroplastic drawing / V.P. Lyashenko, E.B. Kobilskaya, T.A. Hryhorova O.A. Troitskiy // *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*. – Kremenchuk, 2011. – Iss. 4/2011 (69), part. 1. – PP. 57–62. [in Russian]

4. Alifanov O.M. *Inverse problems of heat transfer*. – M.: Mashinostroenie, 1988. – 280 p. [in Russian]

5. Temkin A.G. *Inverse methods of thermal conductivity*. – M.: Energiya, 1973. – 464 p. [in Russian]

Стаття надійшла 27.08.2012.
Рекомендовано до друку
д.т.н., проф. Драгобецьким В.В.