УДК 517.946.9

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У РУХОМІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

В. П. Ляшенко
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E–mail: conon-v@yandex.ru

Розглядаються основні методи розв'язання крайових задач, що виникають під час побудови математичних моделей процесів термодифузії на основі лінійних і нелінійних крайових задач, а також нелокальних задач для рівняння параболічного типу. Описуються основні принципи побудови чисельних розв'язків шляхом зведення нелінійної крайової задачі до нелінійного інтегрального рівняння або до різницевої задачі. Розглянуті математичні моделі температурних розподілів у рухомому осесиметричному середовищі з рухомими та нерухомими межами.

Ключові слова: рівняння параболічного типу, нелінійна крайова задача, методи розв'язку, математична модель.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПОДВИЖНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

В. П. Ляшенко
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E–mail: conon-v@yandex.ru

Рассматриваются основные методы решения краевых задач, возникающие при построения математических моделей процессов термодиффузии на основе линейных и нелинейных краевых задач, а также нелокальных задач для уравнения гиперболического типа. Описаны основные принципы построения численных решений путем сведения нелинейной краевой задачи к нелинейному интегральному уравнению или к нелинейной разностной задаче. Рассмотрены математические модели температурных распределений в движущейся осесимметричной среде с движущимися и неподвижными границами.

Ключевые слова: уравнение параболического типа, нелинейная краевая задача, методы решения, математическая модель.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Значна кількість технологічних процесів відбувається при підвищених температурах, під час яких нагріванню піддається рухомий або нерухомий об'єкт.

Керування такими високоефективними процесами під час проведення натурних експериментів часто ускладнюється через неможливість контролювати температуру нагрівання об'єктів. Це трапляється, коли об'єкт, що нагрівається, має малі геометричні розміри, наприклад тонкий дріт, або коли нагрівання відбувається у середовищі, недосяжному для встановлення датчиків температури, наприклад, у контейнері.

В останні 20–30 років розроблені та знаходять широке застосування на практиці нові швидкісні способи термічної обробки металів і сплавів, у яких використовується циклічна імпульсна дія температури (електропластична та термоциклічна обробка). Тут контролювати температурний розподіл можна лише за допомогою математичної моделі, використовуючи розв'язки обернених задач для рівняння теплопровідності. Такі моделі дозволяють враховувати різні особливості технологічного процесу нагрівання, способи підведення тепла до рухомого об'єкту та умови теплообміну з навколишнім середовищем.

Як математичні моделі, що описують технологічні процеси нагрівання, розглядаються крайові та нелокальні задачі для рівняння теплопровідності, а також задачі з рухомими межами. Останнім часом до них приєдналися нелокальні задачі, що дозволяють більш точно описувати фізичні процеси, зокрема теплові [1].

Методи розв'язку лінійних, нелінійних крайових та нелокальних задач для рівняння теплопровідності розглядаються у роботах багатьох учених. Серед них слід відзначити таких, як Тихонов А.М., Самарський А.А., Березовський А.А., Марчук Г.І., Митропольський Ю.А., Слесаренко А.П., Ликов О.В., Андерсон Д. і інші [2–9]. Більшість з цих робіт, що носять загальнонауковий характер, не можна розглядати як математичні моделі.

Основними науковими проблемами, що виникають при побудові математичної моделі є розробка адекватної фізичної моделі температурного чи іншого процесу у рухомому або нерухомому середовищах, яка б дозволила на основі нелокальних, лінійних та нелінійних крайових задач побудувати методи розв'язку, аналітичні або чисельні, та дослідити збіжність чисельних алгоритмів розв'язку до розв'язку задачі.

Залучення нелокальних задач до математичних моделей дозволяє визначати основні параметри керування температурними полями спираючись на фізичні особливості технологічного процесу нагрівання [1, 3].

Метою роботи є дослідження методів розв'язку крайових задач, що виникають при побудові математичних моделей температурних розподілів у рухомих областях у вигляді крайових і нелокальних задач для рівняння теплопровідності.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.

1. *Аналітичні і чисельно-аналітичні методи.* Проблеми теплопередачі у найпростіших випадках досліджуються за допомогою класичних аналітич-

них методів розв'язання задач математичної фізики [5–7]. Для розв'язання більш складних задач залучають чисельні методи [6]. Аналітичні методи використовуються для розв'язання спрощених задач під час попереднього вивчення течії температурного процесу, а також при чисельному розв'язанні, для тестування обчислювальних алгоритмів. Дослідження математичних моделей досить часто починається з переходу у крайових задачах до безрозмірних змінних. Такий перехід дозволяє провести аналіз задачі (виділити малі і великі параметри). Після переходу до безрозмірних змінних скорочується число параметрів задачі, що особливо важливо при дослідженні технологічних процесів з великим числом параметрів керування. Виділення параметрів і критеріїв подібності дозволяє провести порівняння результатів експериментів, виявити подібність процесів. Але бурхливий розвиток обчислювальної техніки та її сучасні можливості дозволяють розв'язувати досить складні задачі, не переходячи до безрозмірних параметрів і змінних.

Основними аналітичними методами розв'язання лінійних задач з лінійними крайовими умовами для рівняння теплопровідності є методи інтегральних перетворень та метод поділу змінних Фур'є [5].

Одним із ефективних методів розв'язку крайових задач для рівняння теплопровідності є застосування функцій Гріна для розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння [10]

$$L(y) = p_0(x)y''(x) + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

Розв'язок шукається у вигляді

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds ,$$

де $G(x,s)$ – функція Гріна однорідної крайової задачі.

Найбільш повні математичні моделі призводять до нелінійних задач для рівняння теплопровідності. До них відносять задачі, що описують поширення тепла у рухомих і нерухомих середовищах, теплофізичні характеристики яких є змінними величинами та залежать від температури. Нелінійними є процеси з фазовими перетвореннями, спряжені задачі переносу тепла та речовини. Не маючі можливості побудувати загальний аналітичний розв'язок нелінійних задач переносу тепла, обмежуються частинними точними розв'язками [12]. Розв'язки нелінійних задач дозволяють встановити нові властивості математичних моделей, які відсутні у лінійних моделях та з більшою точністю описати температурні розподіли. Тому точні розв'язки нелінійних рівнянь мають важливе значення як у теоретичних, так і у практичних дослідженнях.

Спрощення вихідного нелінійного рівняння може бути досягнуто за рахунок перетворення залежних змінних. Використовуючи автомодельні змінні, можна звести вихідне рівняння з частинними похідними до звичайного диференціального рівняння.

Основними чисельними методами розв'язку нелінійних задач є різницеві методи [6].

Розглянемо деякі загальні особливості розв'язку нестаціонарних і нелінійних крайових задач різницевими методами. Будемо вважати, що розглядається наближений розв'язок задачі в області Ω на нескінченному або на скінченому відрізку часу $[0;T]$.

В області Ω вводиться просторова сітка w_h, у скінчено вимірному просторі H_h та рівномірна сітка за часом, $w_t = \{t | t = t_n = nt, n = 0,1,...N, Nu = T\}$ з кроком $t > 0$. Наближений розв'язок розглядається як функція $y_h(t_n)$ дискретного аргументу $t_n \in w_t$ зі значеннями із простору $H_h (y_h(t_n) \in H_h)$. У подальшому використовуються позначення $y_n = y_h(t_n)$.

Нехай $B_a, a = 0,1,...p$ – деякі лінійні оператори, що діють із простору H_h, а j_n – деяка сіткова функція. Назвемо $(p+1)$ – шаровою операторно-різницевою схемою різницеве рівняння

$$B_p y_{n+p} + B_{p-1} y_{n+p-1} + ... + B_0 y_n = j_n ,$$

що пов'язує різницевий розв'язок на $(p+1)$ часових шарах. Для однозначного визначення розв'язку необхідно задати p початкових умов значень $y_a, a = 0,1,...p-1$.

При $p=1$, задавши $y_0 \in H_h$, маємо двошарову різницеву схему

$$B_1 y_{n+1} + B_0 y_n = f_n, n = 0,1...$$

Аналогічно при $p = 2$ для відомих $y_0, y_1 \in H_h$ визначається тришарова різницева схема

$$B_2 y_{n+2} + B_1 y_{n+1} + B_0 y_n = f_n, n = 0,1... ,$$

Двошарова різницева схема записується у вигляді

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1}} + A y_n = j_n, n = 0,1,... ,$$

де $t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ крок за часом. Для переходу до канонічної двошарової схеми покладають $B = t_{n+1} B_1$, $A = B_1 + B_0$. Рівномірну за часом сітку, то можна записати у вигляді

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{t} + A y_n = j_n, n = 0,1,...$$

Двошарова різницева схема буде явною схемою, якщо $B = s(x)E$, $s(x) \neq 0$, в протилежному випадку ми маємо справу з неявною схемою [6].

Коректність різницевої схеми пов'язана із умовами існуванням, єдиного розв'язку і неперервною його залежністю від вхідних даних .

В обчислювальній практиці отримали широке поширення нелінійні різницеві схеми [6], у яких розв'язок на кожному часовому шарі знаходиться як розв'язок нелінійної різницевої задачі. Такі схеми будуються аналогічно різницевим схемам для лінійного рівняння теплопровідності. Наприклад, чисто неявна різницева схема має вигляд

$$b(x,y_{n+1})\frac{y_{n+1}-y_n}{t}+\Delta(y_{n+1})y_{n+1}=j\,(x,t_{n+1},y_{n+1}),x\in w,n=0,1,2....$$

з додатковими умовами

$$y_{n+1}=g(x,t_{n+1}),x\in\partial w\,,$$
$$y_0=u_0(x),x\in w\,.$$

Аналогічно будуються і інші схеми з вагами. Нелінійний аналог двошарової симетричної різницевої схеми (схеми Кранка - Ніколсон) має вигляд [6]

$$(b(x,y_n)+b(x,t_{n+1}))\frac{y_{n+1}-y_n}{t}+\Delta(y_n)y_n+\Delta(y_{n+1})y_{n+1}=j\,(x,t_n,y_n)+$$
$$+j\,(x,t_{n+1},y_{n+1}),x\in w,n=0,1,2....$$

Для знаходження різницевого розв’язку на новому часовому шарі у неявній схемі необхідно розв’язувати нелінійну різницеву задачу. Для визначення y_{n+1} використовуються ті або інші ітераційні процеси. Особливостями ітераційної реалізації нелінійних задач є те, що у якості початкового наближення природно брати розв’язок на попередньому шарі, тобто $w^k=y_n$, а також сіткова задача, для визначення y_{n+1}, містить малий параметр-крок за часом t. Цей параметр суттєво впливає на швидкість збіжності ітераційного процесу (чим менше t, тим вища швидкість збіжності відповідного ітераційного процесу).

Розглянемо нелінійну різницеву схему. Найпростіший ітераційний процес пов'язаний з послідовним уточненням нелінійних коефіцієнтів. У цьому випадку нове ітераційне наближення w^{k+1} для y_{n+1} знаходиться із розв’язку крайової задачі для різницевого рівняння

$$b(x,w^k)\frac{w^{k+1}-y_n}{t}+\Delta(w^k)w^{k+1}=j\,(x,t_{n+1},w^k),x\in w,n=0,1,2....$$

Розв’язок крайової задачі досить часто зводять до розв’язку відповідного їй інтегрального рівняння [10, 11]. Перехід від крайової задачі до інтегрального рівняння відбувається шляхом уведення та побудови функції Гріна [10]. Перехід від крайових задач до інтегральних рівнянь з постійними границями інтегрування застосовується як для лінійних, так і для нелінійних задач. Одним з основних методів розв’язку інтегральних рівнянь є метод квадратур. Основою цього методу є зведення задачі розв’язання інтегрального рівняння до розв’язання апроксимуючої системи алгебраїчних рівнянь, які можуть бути отримані заміною інтегралів скінченними сумами [11].

Ітераційні методи дозволяють отримати найбільш прості обчислювальні алгоритми розв’язку інтегральних рівнянь. Крім того, вони стають необхідними при розв’язанні багатьох нелінійних задач. Прикладом може слугувати процес розв’язку нелінійних інтегральних рівнянь методом квадратур, який не дивлячись на дискретизацію задачі, не звільняє від необхідності застосовувати ітераційні процедури під час розв’язання апроксимуючих нелінійних скінченних рівнянь.

Метод послідовних наближень застосовується для розв’язання нелінійних і лінійних інтегральних рівнянь. У випадку нелінійного рівняння як сама збіжність, так і швидкість збіжності залежать від початкового наближення і правої частини. Таким чином, вибір початкового наближення є суттєвим. При певних обмеженнях збіжність не залежить від початкового наближення.

Якщо яким-небудь чином функція $y_0(x)$ обрана, то для нелінійного рівняння $y(x)=\int_a^b K_k\left[x,s,y(s)\right]ds$, ітераційний процес будується за формулою

$$y_k(x)=\int_a^b K\left[x,s,y_{k-1}(s)\right]ds\,,\ k=1,2,3...$$

2. *Математичні моделі температурного поля рухомого осесиметричного ізотропного середовища з внутрішніми джерелами тепла.*

З фізичної точки зору рухомий дріт можна розглядати як осесиметричне ізотропне середовище з постійно або періодично діючими внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою I у зоні нагрівання. Зважаючи на це, можна стверджувати, що у своїй більшості температурне поле є осесиметричним і не залежить від координати j. У математичних моделях, де досліджується температурне поле з постійно діючим джерелом тепла, основним рівнянням є рівняння теплопровідності, у якому відсутні перша та друга похідні за координатою j.

$$l\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+l\,\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}-$$
$$-v(t)c\,r_n\frac{\partial T}{\partial z}-c\,r_n\frac{\partial T}{\partial t}=-w(T)\quad .\qquad (1)$$

Температурне поле у зоні нагрівання може бути визначено за допомогою розв’язку відповідної крайової задачі для рівняння (1). Процес нагрівання відбувається, коли середовище рухається через зону нагріву зі змінною або сталою швидкістю. У першому випадку процес нагрівання можна розглядати як нестаціонарний перехідний процес. Під час перехідного процесу, що протікає за проміжок часу $0\le t<t_0$ швидкість руху середовища $v(t)$ змінюється у межах $0\le v(t)<v=const$. Починаючи з деякого проміжку часу $t\ge t_0$, процес нагрівання стає стаціонарним. Він протікає з постійною швидкістю v при сталій температурі у кожній точці зони нагрівання. Вибір параметрів нагріву дозволяє підтримувати необхідну, з технологічної точки зору, температуру [12].

Визначення температурного розподілу у зоні нагрівання рухомого середовища під час перехідного та стаціонарного процесів з врахуванням перерозподілу температури за рахунок теплопровідності та втрат тепла з поверхні приводить до розв’язання наступної задачі для рівняння теплопровідності у циліндричній області

$\Omega:\{0<z<l, 0<r<r_0, 0<t\le t_0\}$

$$l\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+l\,\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}-v(t)c\,r_n\frac{\partial T}{\partial z}-c\,r_n\frac{\partial T}{\partial t}=-w(T), \quad (2)$$

$$T(r,z,0)=T_0, \vee\; T(r,z,t_0)=T(z), \quad (3)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\; l\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0}=-a\,(T-T_c)-es\,(T^4-T_c^4), \quad (4)$$

$$T(r,0,t)=T_0,\, T(r,l,t)=T_l, \quad (5)$$

де – $w(T)=\dfrac{I^2 r_0(1+bT)}{p^2 r_0^4}$ щільність внутрішніх джерел тепла, r_0 – питомий опір; l, c, r_n, b відповідно коефіцієнти теплопровідності, теплоємність, щільність, температурний коефіцієнт опору рухомого середовища.

Під час електропластичної обробки металів діють імпульсні джерела тепла.

У найбільш повній постановці, для ізотропного осесиметричного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками, коли джерело тепла є функцією температури і координат, температурне поле може бути описано за допомогою крайової задачі для нестаціонарного рівняння теплопровідності в області $\Omega_t=\{0<z<l, 0<r<r_0, 0<t\le t_0\}$ з границею $\partial\Omega$ [13]

$$l\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+l\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-vc\,r_n\frac{\partial T}{\partial z}-c\,r_n\frac{\partial T}{\partial t}=-W(z,t,T), \quad (6)$$

$$T(r,z,0)=T_0, \quad (7)$$

$$T(r,0,t)=f_{12}T_0, \quad T(r,l,t)=f_{12}T_l \quad (8)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\; l\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0}= f_{12}\left[-a\,(T)(T-T_c)-es\,(T^4-T_c^4)\right] \quad (9)$$

Функція $W(z,t,T)$ у випадку залежності джерел тепла від координати та часу має вигляд

$$W(z,t,T)=f_{11}(z)\,f_2(T),\, W(z,t,T)=f_{12}(t)\,f_2(T), \quad (10)$$

де $f_2(T)=\dfrac{I^2 r_0(1+bT)}{p^2 r_0^4}$.

Функції $f_{11}(z)$, $f_{12}(t)$ у залежності від фізичних особливостей процесу електропластичної обробки можуть мати вигляд

$$f_{11}(z)=\begin{cases} m\dfrac{z}{l_0}-mn, nl_0\le z\le\left(n+\dfrac{1}{m}\right)l_0 \\ 0, \left(n+\dfrac{1}{m}\right)l_0<z\le(n+1)l_0, z<0 \end{cases},$$

$$f_{12}(t)=\begin{cases} m\dfrac{t}{t_0}-mn, nt_0\le t\le\left(n+\dfrac{1}{m}\right)t_0 \\ 0, \left(n+\dfrac{1}{m}\right)t_0<t\le(n+1)t_0, t<0 \end{cases}.$$

Тут параметри m, n визначають характер дії імпульсів.

Для проектування систем керування температурним полем, що описується побудованими вище математичними моделями замість однієї із крайових умов уводиться нелокальна інтегральна умова, що визначає баланс енергії зони нагрівання.

Математична модель температурного поля ізотропного осесиметричного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками у вигляді недовизначеної крайової задачі (функція $I(t)$ є невідомою) із залученням нелокальної інтегральної умови для нестаціонарного рівняння теплопровідності в області $Q_{1t}=\{(z;r;t)\,|\,0<z<l, 0<r<r_0, 0<t\le t_0\}$ [10], дозволяє отримувати температурні розподіли, що адекватно описують температурне поле усередині області, а не лише на її границях

$$\int_{0+}^{t_0}\int_{0+}^{r_0}\int_{0}^{l}\frac{I(t)^2 r_0+bI(t)^2 r_0 T(r,z,t)}{r_0^4 p^2}dzdrdt= =cr_n\int_{0+}^{t}\iint_G (T(r,z,t)-T_0)dgdt+ +r_0 a\, l\int_{0+}^{t_0}\int_0^{r_0}\int_0^{l}\frac{T(r,z,t)-T_c}{v(t)}dzdrdt \quad (11)$$

Задача для рівняння (6) із нелокальною умовою (11), пов'язує шуканий розв'язок у внутрішніх точках області з умовами на її границі. Шляхом перетворення вона зводиться до нелокальної задачі. Знаходження розв'язку крайової задачі та його існування при наявності такої умови викликає значні труднощі, оскільки невідомі значення розв'язку на одній із границь області.

Застосування інтегральної умови для знаходження розв'язку обернених задач та визначення основних параметрів керування температурним полем дозволяє з більшою точністю описувати температурні розподіли у всій області, а не тільки на її межах. Тут особливо важлива роль відводиться розв'язкам нелокальних задач. Вони, на відміну від крайових задач, найбільш точно віддзеркалюють технологічний процес нагрівання та дозволяють визначати основні параметри керування температурними полями.

3. *Температурне поле у області з рухомими межами без фазових переходів.*

У порошковій металургії, під час виробництва стрижнів із тугоплавких металів, наприклад вольфраму, має місце операція ротаційного кування [13]. Перед цією операцією стрижень циліндричної або іншої форми довжиною L спочатку розігрівається електричним струмом до технологічної температури T_l, а потім подається у машину для кування зі швидкістю $v(t) \neq 0$. При цьому до одного кінця стрижня підведений нерухомий струмопідвід, а до іншого рухомий. З технологічної точки зору необхідно, щоб температура поверхні стрижня не була нижчою від T_l на протязі всієї операції кування. Виникає проблема керування температурним полем стрижня, коли його довжина зменшується за законом $x(t) = L - v(t)t$ протягом часу $0 < t < t_0$ прямуючи до нуля. Суть керування полягає у підтримці сталого значення температури стрижня, коли його довжина зменшується та прямує до нуля.

Математична модель температурного поля циліндричної області розглядається у вигляді задачі для лінійного рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами в області $\Omega: \ \{0 < z < x(t), 0 < r < r_0, 0 < t \le t_0\}$ [13]

$$\begin{gathered} l\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial T}{\partial r}\Big) + l\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \\ -v(t)c\,r_n\,\frac{\partial T}{\partial z} - c\,r_n\,\frac{\partial T}{\partial t} = -w(T,t) \end{gathered}, \qquad (12)$$

$$T(r,z,0) = T_0, \qquad (13)$$

$$T(r,0,t) = T_0, T(r,x(t),t) = T_l, \qquad (14)$$

$$\begin{gathered} l\,\frac{\partial T(r_0,z,t)}{\partial r} = -a\,(T - T_c) - \\ -es\,(T^4 - T_c^4), \ \frac{\partial T(0,z,t)}{\partial r} = 0 \end{gathered}. \qquad (15)$$

Час t визначається із умови $L - v(t)t = 0$. Функції $w(T,t)$, $v(t) \in C^1$ – неперервні додатно визначені. Розв'язки задач (2)–(5), (6)–(9)–(11), (12)–(15) наведені в роботах [1, 12–14].

Задача (12)–(15) належить до задач типу Стефана. Найбільш універсальним методом розв'язку задач Стефана є чисельні методи, які почали розроблятися з 50-х років 20 століття [5]. Поширені наступні чотири основні різницеві методи, що застосовуються до розв'язання задач Стефана: захоплення фазового фронту у вузол різницевої сітки, випрямлення фронтів, згладжування коефіцієнтів і схеми наскрізного розрахунку [14]. Характерна особливість перших двох методів полягає у тому, що в них різницеві схеми будуються з явним виділенням шуканого фронту фазового переходу. Для двох останніх методів використовуються різницеві схеми наскрізного розрахунку, у яких обчислення шуканих величин ведеться в усіх вузлах сітки за одними і тими ж формулами, незалежно від того, лежить чи не лежить вузол на поверхні фазового переходу.

Метод захоплення фазового фронту у вузол сітки використовується при розв'язанні одновимірних задач типу Стефана.

Метод згладжування коефіцієнтів є найбільш універсальним, придатним для чисельного розв'язку задач типу Стефана з будь-яким числом просторових змінних і будь-яким числом фазових фронтів. Він дозволяє застосовувати різницеві схеми наскрізного розрахунку, які характеризуються тим, що границя розділу фаз явно не виділяється і використовуються однорідні різницеві схеми [14].

ВИСНОВКИ. У роботі розглядаються основні методи розв'язання крайових задач, що виникають під час побудови математичних моделей процесів термодифузії на основі лінійних та нелінійних крайових задач, а також нелокальних задач для рівняння параболічного типу. Описуються основні принципи побудови чисельних розв'язків шляхом зведення нелінійної крайової задачі до нелінійного інтегрального рівняння або до різницевої задачі. Розглянуті основні математичні моделі температурних розподілів у рухомому осесиметричному середовищі з рухомими та нерухомими межами. Результати досліджень можуть бути застосовані під час розробки систем керування технологічними процесами виробництва дроту з покращеними фізико–механічними властивостями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2010. – Вип. № 4. – С. 158–162.
2. Березовский А.А. Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. – Киев: Наукова думка, 1968. – 165 с.
3. Устойчивость нелокальных разностных схем / А.В. Гулин, В.А. Мороз, Н.И. Ионкин. – С.-Питер ЛКИ, 2008. – 320 с.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Пер. с франц. Л.Р. Волевича. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
6. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер; пер. с англ. С.В. Сенина, Е.Ю. Шальмана. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
7. Уравнения математической физики / А.П. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
8. Задачі з вільними межами для нелінійного параболічного рівняння / Ю.О. Митропольський, А.А. Березовський, М.А. Березовський // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 10. – С. 1360–1372.
9. Слесаренко А.П. Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях // Проблемы машиностроения. – 2002. – № 4. – С. 72–80.
10. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 216 с.
11. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1978. – 292 с.

12. Математична модель температурного поля рухомого ізотропного середовища / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Вісник Запорізького національного університету. Серія «Фізико-математичні науки». – 2008. – № 1. – С. 130–135.

13. Розв'язаня однієї оберненої задачі Стефана / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Вісник Львівського університету. Серія «Прикладна математика. Інформатика». – 2009. – Вип. 15. – С. 251–257.

14. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

MATHEMATICAL MODELS AND METHODS FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN MOVING CYLINDRICAL REGION

V. Lyashenko

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E–mail: conon-v@yandex.ru

This paper considers the main methods for solving boundary value problems occurring while designing of mathematical models of thermal diffusion on the basis of linear and non-linear boundary value problems and non-local problems for hyperbolic equations. The basic principles of the numerical solutions by reducing of non-linear boundary value problem to non-linear integral equation or non-linear difference problem are described. The mathematical model of temperature distribution in a moving axisymmetric environment with moving and fixed boundaries are considered.

Key words: parabolic equation, nonlinear boundary value problem, solving methods, mathematical model.

REFERENCES

1. Investigation of the non-local problem with integral conditions / V.P. Lyashenko, O.B. Kobylskaya // *Bulletin of Kyiv Taras Shevchenko National University*. – 2010. – N 4. – PP. 158–162. [in Russan]

2. Berezovsky A.A. *Nonlinear boundary value problems of radiant body*. – Kiev: Naukova Dumka, 1968. – 165 p. [in Russan]

3. *Nonlocal stability of difference schemes* / A.V. Gulin, V.A. Moroz, N.I. Ionkin. – S.Piter: LKI, 2008. – 320 p. [in Russan]

4. Lions G.-L. *Some methods for solving non-linear boundary value problems* / Translation from French. L.R. Vlevich. – M.: Mir, 1972. – 587 p. [in Russan]

5. Lykov A.V. *The theory of heat conduction*. – M.: Higher School, 1966. – 599 p. [in Russan]

6. *Computatial fluid mechanics and heat transfer* / Dale A. Anderson, John C. Tannehill, Richard H. Pletcher; translation from English S.V. Senina, E.U. Shalmana. – M.: Mir, 1990. – 384 p. [in Russan]

7. *Equations of mathematical physics* / A.P. Tihonov, A.A. Samarskiy – M: Nauka, 1972. – 736 p. [in Russan]

8. Problems with free boundary for a nonlinear parabolic equation / U.O. Mitropolskiy, A.A. Berezovskiy, M.A. Berezovskiy // *Ukr. Math. Journal*. – 1997. – 49, N 10. – PP. 1360–1372. [in Russan]

9. Slesarenko A.P. Mathematical modeling of thermal processes in the complex shape bodies with nonstationary boundary conditions // *Probl. Of engineering*. – 2002. – N 4. – PP. 72–80. [in Russan]

10. Lizorkin P. I. Course of differential and integral equations with additional chapters analysis. – M.: Nauka, 1981. – 216 p. [in Russan]

11. *Methods for solving integral equations with computer programs* / A.F. Verlan, V.S. Sizikov. – Kyiv: Nauk. dumka, 1978. – 292 p. [in Russan]

12. Mathematical model of temperature field of a moving isotropic medium / V.P. Lyashenko, O.B. Kobylskaya // *Bulletin of Zaporizhye National University, Series "Physics and mathematics"*. – 2008. – N 1. – PP. 130–135. [in Russan]

13. Solved one inverse Stefan problem / V.P. Lyashenko, O.B. Kobylskaya // *Bulletin of Lviv University, Series "Applied Mathematics. Informatics"*. – 2009. – Pub. 15. – PP. 251–257. [in Russan]

14. *Computational heat transfer* / A.A. Samarskiy, P.N. Vabishchevich. – M: Editorial URSS, 2003. – 784 p. [in Russan]

Стаття надійшла 22.10.2012.
Рекомендовано до друку
д.т.н., проф. Гученком М.І.