УДК 517.946:519.634

МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ СТІНКИ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА

В. П. Ляшенко
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E–mail: conon-v@yandex.ru

У вигляді початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності розглянуто математичну модель, яка описує температурні розподіли стінки трубопроводу та оточуючого її середовища. Стінка трубопроводу має прямокутній внутрішній перетин і змінний зовнішній. Для визначення температури стінки за допомогою нелокальної інтегральної умови розв'язана задача на спряження, яка дозволяє визначати температурний розподіл усередині прямокутного трубопроводу. Розглянуто спрощену постановку задачі, наближений розв'язок якої дозволяє визначати температуру зовні трубопровода через температуру у його середині. Задача у більш складній постановці може бути розв'язано чисельним або чисельно-аналітичним способом.

Ключові слова: математична модель, температурне поле, початково-крайова задача, нелокальна інтегральна умова, рівняння Вольтерра, чисельно-аналітичний розв'язок.

МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ СТЕНКИ ДВУХСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

В. П. Ляшенко
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E–mail: conon-v@yandex.ru

В виде начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности рассмотрена математическая модель, описывающая температурные распределения в стенке трубопровода и окружающей ее среды. Стенка трубопровода имеет прямоугольное внутреннее и переменное внешнее сечение. Для определения температуры стенки введено нелокальное интегральное условие, и решена задача на сопряжение. Полученное решение позволяет определить температуру внутри прямоугольного трубопровода. Рассмотрено упрощенную постановку задачи, приближенное решенное которой позволяет определить температуру среды окружающей трубопровод через температуру внутри трубопровода. Решение задачи в более сложной постановке может быть получено численно-аналитическим методом.

Ключевые слова: математическая модель, температурное поле, начально-краевая задача, нелокальное интегральное условие, уравнение Вольтерра, численно-аналитическое решение.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Транспортування по трубопроводах рідини та газу, що мають підвищену температуру, викликають суттєву загрозу навколишньому середовищу. Особливо це має важливе значення у місцях занурення трубопроводів у воду або грунти, зокрема такі, що промерзають. Якщо температура переходу рідини з рідкого стану у твердий вища ніж температура оточуючого трубопровід середовища, то з'являється загроза перемерзання трубопроводу, що може привести до зупинки технологічного процесу транспортування [1–4]. Тому побудова математичних моделей температурнних розподілів у трубопроводах, його стінках і навколишньому середовищі становить значний науковий інтерес. У роботі [3] розглянуто математичні моделі, що описують температурні розподіли у трубопроводі – анізотропному двошаровому циліндрі у вигляді системи початково-крайових задач для рівняння теплопровідності.

Метою роботи є побудова математичних моделей температурних розподілів стінки трубопровода змінноого перетину у вигляді крайових задач для рівняння теплопровідності з метою прогнозування впливу температури у середині трубопровода на температуру стінки та оточуючого трубопровід середовища.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Товстостінний трубопровід, що розігрівається потоком розпеченого газу або рідини, можна представити як канал, що має прямокутній внутрішній перетин зі сталою або змінною площею $S(z)$. Газ або рідина рухається у каналі зі швидкістю v. На внутрішній поверхні трубопроводу має місце конвективний або кондуктивний теплообмін за законом Ньютона із внутрішньою поверхнею труби. До початку подачі рідини або газу у трубопровід температура всередині трубопроводу і на внутрішній поверхні труби вважаються сталими – $T_1(r,z,t)=T_1(r_{0-0},z,t)=T_2(r_{0+0},z,t)=T_0$.

1. *Постановка задачі.* Для визначення температурного поля всередині трубопроводу $T_1(r,z,t)$ та його перетину $T_2(r,z,t)$ за вказаних вище умов теплообміну отримуємо математичну модель у вигляді системи двох крайових задач в області [3]:

$$\Omega_t=\{0<r<R, z>0, t>0\}, \Omega_t=\Omega_{1t}\cup\Omega_{2t}$$

з границею $\partial\Omega$

$$c_1 r_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}+v\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)=l_1 div(gradT_1)-Wd(r)d(z)$$

$$(r,z)\in\Omega_{1t}=\{0<r<r_0, z>0, t>0\}$$

$$T_1(r,z,0)=T_0 \qquad (1)$$

$$l_1\frac{\partial T_1}{\partial r}=-a(T_1-T_2), (r,z)\in\partial\Omega, \lim_{|z|\to\infty}T_1=T_0;$$

$$c_2 r_2\frac{\partial T_2}{\partial t}=div(l_2 gradT_2)$$

$$(r,z)\in\Omega_{2t}=\{r_0<r<R, z>0, t>0\}, \qquad (2)$$

$$T_2(r,z,0)=T_0$$

$$l_2\frac{\partial T_2}{\partial r}=-a\left(T_1-T_2\right),\ (r,z)\in\partial\Omega\ ,\ \lim_{|z|\to\infty}T_2=T_0\,.$$

Тут div і $grad$ – оператори дивергенції і градієнта; l_1, c_1, r_1 і l_2, c_2, r_2 – коефіцієнт теплопровідності, теплоємність і густина газу або рідини усередині трубопроводу і його перетину; a – коефіцієнт теплообміну газу в каналі з внутрішньою поверхнею трубопроводу $\partial\Omega$; Ω – циліндрична область з поперечним перетином $S(z)$; W – потужність джерела тепла; $d(z)$ – дельта-функція Дірака, T_0 – початкова температура. Спрощені розв’язки задачі (1), (2) були отримані у роботі [3].

Розгрянемо задачі (1), (2) для зовнішньго перетину трубопровода у формі паралелепіпеда:

$$c_2r_2\frac{\partial T_2}{\partial t}=l_2div\left(gradT_2\right),\ ,\ t>0,\ (x,y,z)\in\partial\Omega \quad (3)$$

$$T_2\left(x,y,z,0\right)=T_0\,, \quad (4)$$

$$l_2\frac{\partial T_2}{\partial n}=-a\left(T_1-T_2\right),\qquad \lim_{|z|\to\infty}T_2=T_0\,. \quad (5)$$

У довільній точці зовнішнього паралелепіпеда для $r>r_0$, введемо нормально-тангенціальну систему координат t_1, t_2, n, пов'язану з внутрішньою нормаллю $\vec{n}$. У такій системі координат задача (3)–(5) записується у вигляді

$$c_2r_2\frac{\partial T_2}{\partial t}=l_2div_t\left(grad_tT_2\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(l_2\frac{\partial T_2}{\partial n}\right). \quad (6)$$

$$|t_1|>0,\quad 0<t_2<2p\ ,\ n>0,\quad t>0,$$

$$T_2\left(t_1,t_2,n,0\right)=T_0\ \ 0<t_2<2p\ \ n>0, \quad (7)$$

$$l_2\frac{\partial T_2}{\partial n}=-a\left(T_1-T_2\right),\ |t_1|>0,\quad 0<t_2<2p\ ,\ n=0,$$

$$\lim_{|t_1|,|n|\to\infty}T_2=T_0\ ,\ t>0\,. \quad (8)$$

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $T_0=0$. Цього завжди можна досягти, здійснюючи зміщення температури $-\ T'=T-T_0$.

Нашою метою є зведення задачі на сполучення (1)–(2) до задачі тільки для T_2 з можливим врахуванням впливу на температуру стінки та за її межами температури зовнішнього циліндра. Для цього, слідуючи ідеям локально одновимірного методу, з певною похибкою обмежимося розглядом одновимірної задачі (6)–(8), нехтуючи другими похідними по тангенціальних координатах. При $l_2=const$ для T_2 отримуємо початково-крайову задачу:

$$c_2r_2\frac{\partial T_2}{\partial t}=l_2\frac{\partial^2T_2}{\partial n^2}\ ,\ n>0\ ,\ t>0\,, \quad (9)$$

$$T_2\left(n,0\right)=0\ ,\ n>0\,, \quad (10)$$

$$l_2\frac{\partial T_2}{\partial n}=-a\left(T_1-T_2\right),\ n=0\ ,\ \lim_{|n|\to\infty}T_2=0\ ,\ t>0 \quad (11)$$

Розв’язок задачі (9)—(11) записується у вигляді

$$T_2\left(n,t\right)=-\sqrt{\frac{c_2r_2}{l_2p}}\int_0^t\frac{v(t)}{\sqrt{t-t}}exp\left(-\frac{c_2r_2n^2}{4l_2\left(t-t\right)}\right)dt\,,$$

де $v(t)=\dfrac{l_2}{c_2r_2}\dfrac{\partial T_2(0,t)}{\partial n}$. Звідси для $n>0$ отримуємо

$$T_2\left(0,t\right)=-\sqrt{\frac{c_2r_2}{l_2p}}\int_0^t\frac{l_2}{c_2r_2\sqrt{t-t}}\frac{\partial T_2\left(0,t\right)}{\partial n}dt\,. \quad (12)$$

Враховуючи крайову умову (11) з останньої рівності знаходимо

$$T_2\left(0,t\right)=\frac{a}{\sqrt{pc_2r_2l_2}}\int_0^t\frac{\left[T_1\left(0,t\right)-T_2\left(0,t\right)\right]}{\sqrt{t-t}}dt\,. \quad (13)$$

Отриману рівність можна розглядати як інтегральне рівняння Вольтера [5] для визначення $T_2(0,t)$.

Рівняння (13) встановлює зв'язок між значеннями шуканих температур усередині трубопроводу і на його поверхні S у довільні проміжки часу. Приймаючи його, приходимо до початково-крайової задачі для T_1:

$$\begin{aligned}&c_1r_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}+v\frac{\partial T_1}{\partial x}+v\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)=\\&=l_1div\left(gradT_1\right)+Wd(x)d(y)d(z)\end{aligned}\ , \quad (14)$$

$$(x,y,z)\in\Omega,\quad t>0,$$

$$T_1\left(x,y,z,0\right)=0\,, \quad (15)$$

$$l_1\frac{\partial^2T_1}{\partial n}=-a\left(T_1-T_2\right),\ (x,y,z)\in\partial\Omega,\ \lim_{|z|\to\infty}T_1=0, \quad (16)$$

доповненої інтегральним рівнянням (13).

Якщо коефіцієнт теплообміну a великий, то можна вважати, що на внутрішній та зовнішній поверхнях трубопроводу має місце ідеальний тепловий контакт

$$T_2=T_1,\qquad l_2\frac{\partial T_2}{\partial n}=l_1\frac{\partial T_1}{\partial n}\,. \quad (17)$$

Враховуючи рівність (12) можна записати T_1 у вигляді

$$T_1\left(0,t\right)=-l_1\sqrt{\frac{1}{pl_2c_2r_2}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-t}}\frac{\partial T_1\left(0,t\right)}{\partial n}dt\,. \quad (18)$$

Рівняння (18) є рівнянням Абеля [5, 6] відносно похідної, обертаючи яке, отримуємо

$$-l_1\frac{\partial T_1\left(0,t\right)}{\partial n}=-\sqrt{\frac{c_2r_2}{l_2p}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{T_1\left(0,t\right)}{\sqrt{t-t}}dt\ . \quad (19)$$

Отже, у разі ідеального теплового контакту (17) для визначення T_1 отримуємо незалежну від T_2 початково-крайову задачу з нелокальною за часом крайовою умовою

$$\begin{aligned}&c_1r_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}+v\frac{\partial T_1}{\partial x}+v\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)=\\&=l_1div\left(gradT_1\right)+Wd(x)d(y)d(z)\end{aligned} \quad (20)$$

$$(x,y,z)\in\Omega,\quad t>0,$$

$$T_1(x,y,z,0)=0, \tag{21}$$

$$-l_1\frac{\partial T_1(0,t)}{\partial n}=-\sqrt{\frac{l_2c_2r_2}{p}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{T_1(0,t)}{\sqrt{t-t}}dt,$$

$$(x,y,z)\in\partial\Omega,\quad \lim_{|z|\to\infty}T_1=0,\ t>0. \tag{22}$$

Нелокальна умова (19) відображає вплив теплофізичних характеристик середовища у трубопроводі на температурне поле стінки та за її межами.

Провівши усереднення рівняння [1] у задачі (20) – (22) і ототожнюючи $T_1(0,t)$ з середньою температурою, приходимо, до задачі для інтегро-диференціального рівняння теплопровідності:

$$c_1r_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}+v\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)=l_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)-$$
$$-\frac{L(z)}{S(z)}\sqrt{\frac{c_2r_2}{l_2p}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{T_1(z,t)}{\sqrt{t-t}}dt+\frac{W}{S(z)}d(z), \tag{23}$$

$$T_1(z,0)=0,\ |z|\ge 0,\ \lim_{|z|\to\infty}T_1(z,t)=T_0,\ t>0. \tag{24}$$

При великих швидкостях v можна знехтувати кондуктивним перенесенням тепла уздовж координати x порівняно з конвективним, що призводить до задачі [3]

$$c_1r_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}+v\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)=-$$
$$-\frac{L(z)}{S(z)}\sqrt{\frac{c_2r_2}{pl_2}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{T_1(z,t)}{\sqrt{t-t}}dt+\frac{W}{S(z)}d(z), \tag{25}$$
$$|z|>0,t>0,$$

$$T_1(z,0)=0,\quad \lim_{|z|\to\infty}T_1(z,t)=T_0, \tag{26}$$

або, вважаючи $z=vx$ отримуємо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+a(x)\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{u(x,t)}{\sqrt{t-t}}dt=fd(x), \tag{27}$$

$|x|>0,t>0)$, $u(x,0)=0$, $|u(x,t)|<M=const$,

де $f=const$.

Розв'язок задачі (23)–(24) та (25)–(26) можна отримати одним із чисельних методів.

Розглянемо одновимірний випадок прогрівання зовнішнього перетину труби, коли $v=0$ і похідними по x і z можна нехтувати. Задача (13)–(16) при цьому спрощується до вигляду

$$c_1r_1\frac{\partial T_1}{\partial t}=l_1\frac{\partial^2T_1}{\partial y^2}+Wd(y), \tag{28}$$
$$0<y<y_0,\quad t>0,$$

$$T_1(y,0)=0,\quad 0<y<y_0, \tag{29}$$

$$l_1\frac{\partial T_1}{\partial n}=-a(T_1-T_2),\quad y=y_0,\quad t>0; \tag{30}$$

$$T_2(0,t)=\frac{a}{\sqrt{pc_2r_2l_2}}\int_0^t\frac{\left[T_1(0,t)-T_2(0,t)\right]}{\sqrt{t-t}}dt. \tag{31}$$

Задача (28)–(31) еквівалентна одновимірній задачі на спряження (28)–(30) та

$$c_2r_2\frac{\partial T_2}{\partial t}=l_2\frac{\partial^2T_2}{\partial y^2},\quad y>y_0,\quad t>0, \tag{32}$$

$$T_2(y,0)=0,\quad y>y_0, \tag{33}$$

$$l_2\frac{\partial T_2}{\partial n}=-a(T_1-T_2),\quad y=y_0,\quad t>0. \tag{34}$$

Усереднюючи температурне поле $T_1(y,t)$ по координаті y

$$T_1(t)=\frac{1}{y_0}\int_0^{y_0}T_1(y,t)dy,$$

приходимо до задачі Коші, об'єднаної з інтегральним рівнянням Вольтерра [5] для визначення $T_1(t)$ і $T_2(t)$:

$$c_1r_1\frac{\partial T_1}{\partial t}=-\frac{a}{y_0}(T_1-T_2)-\frac{W}{y_0},\quad t>0,\quad T_1(0)=0 \tag{35}$$

$$T_2(0,t)=\frac{a}{\sqrt{pc_2r_2l_2}}\int_0^t\frac{\left[T_1(0,t)-T_2(0,t)\right]}{\sqrt{t-t}}dt. \tag{36}$$

Зведемо задачу на спряження (28)–(30), (32)–(34) до початково-крайової задачі в обмеженій області.

Розглянемо задачу (32)–(34). Згідно з принципом Дюгамеля [6] її розв'язок має вигляд:

$$T_2(y,t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_2r_2}{l_2p}}\int_0^t\frac{y-y_0}{(t-t)^{3/2}}e^{-\frac{c_2r_2(y-y_0)^2}{4l_2(t-t)}}T_2(y_0,t)dt \tag{37}$$

де $T_2(y_0,t)$ – значення шуканого розв'язку у точці $y=y_0$. Для його визначення можна зажадати виконання крайової умови (34). Скориставшись нею наближене значення $T_2(y_0,t)$, можна записати у вигляді

$$T_2(y,t)\cong\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_2r_2}{l_2p}}T_2(y_0,t)\times$$
$$\times\int_0^t\frac{y-y_0}{(t-t)^{3/2}}e^{-\frac{c_2r_2(y-y_0)^2}{4l_2(t-t)}}dt. \tag{38}$$

Похибка наближення пов'язана з винесенням з під знаку інтеграла (37) значень, $T_2(y_0,t)$, а не $T_2(y_0,t^*)$, де t^* – середнє значення з інтервалу $0<t<t$. Зінтегрувавши частинами інтеграл (38), отримуємо

$$T_2(y,t)\cong T_2(y_0,t)\left[1-erf\left(\frac{(y-y_0)\sqrt{c_2r_2}}{2\sqrt{l_2t}}\right)\right]=$$
$$=T_2(y_0,t)erfc\left(\frac{\sqrt{c_2r_2}(y-y_0)}{2\sqrt{l_2t}}\right), \tag{39}$$

де $erf\left(z\right)=\dfrac{2}{\sqrt{p}}\int_{0}^{z}e^{-a}\,da$ — інтеграл помилок [6].

Далі знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_2\left(y,t\right)}{\partial y}&=-T_2\left(y_0,t\right)\frac{\partial}{\partial y}erfc\left(\frac{\sqrt{c_2 r_2}\left(y-y_0\right)}{2\sqrt{l_2 t}}\right)=\\&=-T_2\left(y_0,t\right)\frac{2}{\sqrt{p}}exp\left(-\frac{c_2 r_2\left(y-y_0\right)^2}{2\sqrt{l_2 t}}\right).\end{aligned}\qquad(40)$$

Звідки витікає, що $\dfrac{\partial T_2\left(y_0,t\right)}{\partial y}=-T_2\left(y_0,t\right)\sqrt{\dfrac{c_2 r_2}{p l_2 t}}$.

Виключаючи з крайової умови задачі (32)–(34) похідну по y за допомогою отриманої рівності (40), знаходимо зв'язок між $T_2\left(y_0,t\right)$ і $T_1\left(y_0,t\right)$ у вигляді

$$-l\sqrt{\frac{c_2 r_2}{p l_2 t}}T_2\left(y_0,t\right)\approx a\left[T_2\left(y_0,t\right)-T_1\left(y_0,t\right)\right]$$

або $$T_2\left(y_0,t\right)\approx\frac{aT_1\left(y_0,t\right)}{a+l_2\sqrt{\dfrac{c_2 r_2}{p l_2 t}}}.$$

ВИСНОВКИ. Запропоновано математичну модель розподілу температури у стінці трубопроводу та за його межами у вигляді функції, що залежить від температури усередині трубопроводу. Отримана модель може бути використана під час проектування магістральних трубопроводів для визначення температури ґрунтів і водного середовища навколо нього.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1966. – 600 с.

2. Ляшенко В.П., Решетняк В.И., Иванов М.П. Разработка системы контроля и регулирования температуры технологического продуктопровода // Вісник КДПУ. – 2002. – № 12. – С. 126–128.

3. Розрахунок температурного поля у двошаровому циліндрі / В.П. Ляшенко, А.П. Слесаренко // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2011. – Вип. 6/2011 (71), част. 1. – С. 63–68.

4. Температурное поле осесимметричной среды с локальным поверхностным источником тепла / В.П. Ляшенко, Н.Г. Кирилаха // Питання прикладної математики і математичного моделювання: збірка наукових праць Дніпропетровського національного університету імені О. Гончара. – Дніпропетровськ, 2005. – С. 197–204.

5. Вольтера В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений – М.: Наука 1982. – 302 с.

6. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наукова думка, 1976. – 320 с.

MODEL OF THE TEMPERATURE FIELD OF THE WALL OF TWO-LAYERED CYLINDER

V. Lyashenko

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E–mail: conon-v@yandex.ru

A mathematical model as an initial-boundary problem for the heat equation is considered. The model describes the temperature distribution in the pipe wall and the neighboring environment. The wall of the pipe has a rectangular internal section and a variable external section. To determine the wall's temperature the conjugacy problem was solved with the help of nonlocal integral condition stipulated. The problem allows determining the temperature distribution inside of a rectangular pipe. A simplified formulation of the problem is also considered, which approximate solution allows for determination of the outside pipe temperature through the inside pipe temperature. More complex formulation of the problem implies solution by means of numerical or numerical-analytical method.

Key words: mathematical model, temperature field, initial-boundary problem, nonlocal integral conditions, Volterra equation.

REFERENCES

1. Lykov A.V. *The theory of heat conduction*. – Moscow: Higher School, 1966. – 600 p. [in Russan]

2. V.P. Lyashenko, Reshetnyak V.I., Ivanov M.P. Development of control and attemperation system of technological product pipeline // *Transactions of KSPU*. – 2002. – № 12. – PP. 126–128. [in Russan]

3. Calculation of the temperature field of a double-layered cylinder / V.P. Lyashenko, A.P. Slesarenko // *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*. – 2011. – Iss. 6/2011 (71), part. 1. – PP. 63–68. [in Russan]

4. Temperature field of axisymmetric environment with the local surface heat source / V.P. Lyashenko, N.G. Kirilaha // *Questions and Applied Mathematics mathematical modeling: Scientific Papers Dnepropetrovsk Oles Gonchar National University*. – Dnepropetrovsk, 2005. – PP. 197–204. [in Russan]

5. Volterra V. *Theory of functionals, integral and integro-diifferential equations*. – Moscow, 1982. – 302 p. [in Russan]

6. Galitsin A.S. Zhukovskii A.N. *Integral transformations and special functions in problems of heat transfer*. – Kyiv: Naukova Dumka, 1976. – 320 p. [in Russan]

Стаття надійшла 27.12.12.
Рекомендовано до друку
д.т.н., проф. Гученком М.І.