УДК 519.876.5

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТИСКУ В ТРУБОПРОВОДІ ЗА НАЯВНОСТІ ВИТОКІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ФОРМУЛИ ДАЛАМБЕРА

А. П. Олійник, Л. О. Штаєр
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна. E–mail: lida.shtayer@gmail.com

Проаналізовано класи моделей течії в’язкої рідини та газу в трубопроводах за наявності відбору рідини через поверхню. Враховано особливості випадків течії рідин (двовимірна система Нав’є–Стокса з розривними граничними умовами) та газу з малими збуреннями (акустичне наближення). Запропоновано математичну модель розподілу тиску в трубопроводі за наявності витоків з коректним заданням граничних умов, які дозволяють враховувати інтенсивність витоку та його координати. Для системи рівнянь моделі одержано аналітичний розв’язок з використанням формули Даламбера. Розроблено спосіб задання початкових умов для тиску та його похідної по часу. Введено залежності для оцінки розподілу тиску та повздовжньої компоненти швидкості за наявності витоків. Приведено аналіз одержаних результатів, визначено межі застосування методики та напрямки подальших досліджень.

Ключові слова: рівняння коливань, малі витоки, формула Даламбера, початкові умови, розподіл тиску.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ В ТРУБОПРОВОДЕ ПРИ НАЛИЧИИ УТЕЧЕК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛЫ ДАЛАМБЕРА

А. П. Олийнык, Л. Е. Штаер
Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа
ул. Карпатская, 15, г. Ивано-Франковск, 76019, Украина. E–mail: lida.shtayer@gmail.com

Проанализированы классы моделей течения вязкой жидкости в трубопроводах при наличии отбора жидкости через поверхность. Учтены особенности случаев течения жидкостей (двухмерная система Навье–Стокса с разрывными граничными условиями) и газа с малыми возмущениями (акустическое приближение). Предложена математическая модель распределения давления в трубопроводе при наличии утечек с корректной постановкой граничных условий, которые позволяют учитывать интенсивность утечки и её координаты. Для системы уравнений модели получено аналитическое решение с использованием формулы Даламбера. Разработан способ задания начальных условий для давления и его производной по времени. Введены зависимости для оценки распределения давления и продольной компоненты скорости при наличии утечек. Приведен анализ полученных результатов, определены пределы применимости методики и направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: уравнение колебаний, малые утечки, формула Даламбера, начальные условия, распределение давления.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Задача виявлення витоків з трубопроводів є актуальною науково-технічною задачею, вирішенню якої присвячено численні експериментальні та теоретичні дослідження [1, 2], автори яких пропонують як теоретичні співвідношення для визначення координат дефектів та оцінки розподілу тиску в трубопроводі з дефектами [1], так і методики їх експериментального виявлення [3]. Існуючі математичні моделі [1, 2] дозволяють одержувати лише наближені формули для розрахунку вказаних параметрів за наявності значного об’єму додаткової інформації.

Мета роботи полягає у пошуку точного розв’язку задачі визначення розподілу тиску в трубопроводі за наявності дефектів і дослідженні його поведінки за наявності малих за геометричними розмірами дефектів.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. З математичної точки зору задача моделювання течії в’язкої рідини за наявності витоків зводиться до необхідності розв’язання системи диференційних рівнянь виду:

$$L(\bar{u}) = 0\,, \qquad (1)$$

де $L(\bar{u})$ − диференційний оператор з початковими

$$\bar{u}\big|_{t=0} = \tilde{u}(\bar{x})\,, \qquad (2)$$

та граничними умовами:

$$\bar{u}\big|_{\partial G} = u_g(t)\,, \qquad (3)$$

де $\bar{u}(x)$ − розподіл швидкостей та тиску в початковий момент часу, $u_g(t)$ − розподіл швидкостей та тиску на границі досліджуваної області. До систем виду (1)–(3) належить найбільш відома система рівнянь Нав’є–Стокса [4], яка в загальному випадку записується у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y} + \varpi\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu \times \\ \times\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x; \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} + \varpi\dfrac{\partial \upsilon}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu \times \\ \times\left(\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}\right) + g_y; \\ \dfrac{\partial \varpi}{\partial t} + u\dfrac{\partial \varpi}{\partial x} + \upsilon\dfrac{\partial \varpi}{\partial y} + \varpi\dfrac{\partial \varpi}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu \times \\ \times\left(\dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial z^2}\right) + g_z; \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho \upsilon)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho \varpi)}{\partial z} = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

де u, υ, ϖ − компоненти вектора швидкості в тривимірній декартовій системі координат; ρ − густина; ν − кінематична в'язкість рідини; g_x, g_y, g_z − компоненти вектора масових сил по відповідних осях.

Граничні та початкові умови еквівалентні (2), (3), проте функція $u_g(t)$ у випадку, коли має місце перетікання рідини через поверхню області G, не є неперервною функцією своїх аргументів. Система (4) лише в окремих випадках (наприклад, для потенціальних течій, коли існує функція $\Phi(\bar{x},t)$, така, що $\nabla\Phi(\bar{x},t)=\bar{u}$, при цьому $\Phi(\bar{x},t)$ називають потенціалом течії [4]) має точний розв'язок.

Зокрема для потенціальної течії використовується співвідношення $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial \varpi}{\partial x}; \frac{\partial \upsilon}{\partial z}=\frac{\partial \varpi}{\partial y}; \frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$, які за умови нехтування в'язкими членами в системі (4) зводять систему (4) до відомого інтегралу Коші-Лагранжа [4], оскільки за таких умов

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+\varpi\frac{\partial u}{\partial z}=u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\varpi\frac{\partial \varpi}{\partial x}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+\upsilon^2+\varpi^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right),$$

а (4) перетворюється у відому залежність $\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}=\mathrm{const}$.

Це дозволяє одержати точний розв'язок системи рівнянь Нав'є–Стокса, проте граничні умови при цьому повинні бути неперервними.

У випадку, коли розмірність задачі по просторових координатам дорівнює 2, розв'язком системи Нав'є–Стокса без урахування масових сил, в'язких ефектів та нестаціонарного характеру процесу може бути будь-яка аналітична функція, що задовольняє умовам Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$, при цьому єдиність розв'язку визначається виключно задоволенням граничних умов, заданих у вигляді значень u та υ лише в двох точках, що суттєво звужує клас практичних задач, що можуть бути розв'язані з використанням такого підходу, оскільки, як правило, граничні умови задається на всій границі досліджуваної області.

Випадки чисельного розв'язання системи (4) ускладнюються розмірністю задачі − у випадку нестаціонарного процесу її розмірність дорівнює 4. Для багатьох параметричних задач дослідження в'язкої течії, проте, систему (4) можна суттєво спростити.

У випадку стаціонарного поля швидкостей для течії в'язкої рідини в трубопроводі з дефектами система (4) може бути записана у вигляді:

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \\ u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}\right); \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0, \end{cases} \qquad (5)$$

де u та υ − повздовжня та поперечна компоненти швидкості з граничними умовами в прямокутній області:

$$\begin{cases} u\big|_{x=0}=-\frac{ky^2}{4\mu}+\frac{kRy}{2\mu}; \quad u\big|_{y=0}=u\big|_{y=2R}=0; \\ \upsilon\big|_{x=0}=\upsilon\big|_{y=0}=0; \quad \upsilon\big|_{y=2R}=\begin{cases} 0, \ x\le x_1;\ x\ge x_2; \\ \upsilon_{leak}, \ \ x\in[x_1,x_2], \end{cases} \end{cases} \qquad (6)$$

де $[x_1; x_2]$ − відрізок, на якому відбувається витік рідини; $u\big|_{x=0}$ − розподіл повздовжньої компоненти швидкості, що задається у формі Пуазейля; R − радіус труби; x − координата по довжині труби; y − поперечна координата; ν − кінематична в'язкість рідини. Граничні умови (6) можуть задавати різну кількість дефектів по довжині трубопроводу.

Система (5), (6), як і багато інших варіантів (4), що одержуються при вивченні течії в'язкої рідини, може бути розв'язана з використанням чисельних методів, одержані при цьому результати засвідчують, що в рамках стаціонарної моделі (5), (6) можна встановити ефект спадання величини швидкості течії по довжині трубопроводу, що цілком співпадає з відомими висновками і результатами [1]. При цьому встановлено, що модель (5), (6) найкраще описує випадки течії в'язкої рідини в трубопроводі при характерних швидкостях процесу 2–6 м/с.

Як і будь-яка модель, що реалізується чисельно, система (5), (6) повинна бути досліджена з точки зору апроксимації, стійкості та збіжності різницевих схем, які суттєво залежать від геометрії досліджуваної області, параметрів сітки, фізико-механічних характеристик рідини, що транспортується. Крім того, вказана модель та точність її реалізації залежить від відношення між довжиною об'єкта та його діаметром − якщо виконується умова $L \gg D$, де L − довжина досліджуваної ділянки, D − її діаметр, стійкість розрахунків втрачається при невеликій кількості кроків ($N=100$) по повздовжній координаті, після чого втрачається як фізичний зміст розв'язку, так і відбувається експоненційне накопичення похибки. Тому модель (5)-(6) є обмеженою у використанні, особливо при вивченні течії газу, що викликає необхідність використання інших моделей. Останнє з рівнянь (4) за умови $\rho=\mathrm{const}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho \upsilon)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho \varpi)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0. \qquad (7)$$

Зокрема, при вивченні течії газу в трубопроводах суттєвими є нестаціонарні ефекти, які враховуються в так званій акустичній моделі, при цьому розглядається одновимірна область моделювання. Модель поширення хвиль в трубопроводі записується у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\rho}{S}\dfrac{\partial u}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{S}{\rho c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}, \end{cases} \tag{8}$$

де p – тиск; $\dfrac{\partial p}{\partial x}$, $\dfrac{\partial p}{\partial t}$ – похідні, що характеризують його зміну по координаті та часу; ρ – густина; u – лінійна швидкість; S – площа поперечного перерізу; c – швидкість звуку в середовищі.

Граничні та початкові умови, які необхідні для розв'язку вказаної системи, виставляються лише для тиску, оскільки саме розподіл тиску цікавить найбільшою мірою при дослідженні трубопроводів за наявності витоків – по-перше, а, по-друге, задання умов на тиск є достатнім, оскільки, система (8) записується у вигляді:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\dfrac{\rho}{S}; \\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho c^2}{S}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \end{cases} \tag{9}$$

одержуємо:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{10}$$

тобто як класичне рівняння коливань.

Аналогічний результат можна одержати шляхом аналізу системи (4), записаної для нестаціонарного процесу для випадку двовимірної течії:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}\right); \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho \upsilon)}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

а також співвідношення для швидкості звуку:

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2. \tag{12}$$

З урахуванням одновимірного характеру процесу, нехтуючи конвективними членами, система (11) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial t}, \end{cases} \tag{13}$$

а, враховуючи (12), система (13) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}, \end{cases} \tag{14}$$

звідки одержується рівняння, що співпадає з (10). Оскільки трубопровід в даному випадку можна розглядати як одновимірний безкінечний стержень, для рівняння (10), що випливає з (8) та (9), необхідно задати умови в початковий момент часу:

$$p\big|_{t=0} = \varphi_1(x); \ \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x). \tag{15}$$

Аналітична структура функцій $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ визначається наступним чином: враховуючи, що в трубопроводі за нормальних умов експлуатації перепад тиску є лінійною функцією координати, в зоні поза витоком вона записується у вигляді $p_0 - \varepsilon x$, де p_0 – початкове значення тиску на виході з насосної станції, ε – коефіцієнт зменшення тиску по лінійній координаті, в зоні витоку тиск задається деякою величиною p_a (наприклад, в попередніх розрахунках можна вважати, що p_a дорівнює атмосферному). В такому випадку:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} p_0 - \varepsilon x, & -L < x < a;\ b < x < L; \\ p_a, & a \le x \le b, \end{cases} \tag{16}$$

де $[a;\, b]$ – межі зони витоку; $[-L;\, L]$ – межі досліджуваної ділянки трубопроводу. З математичної точки зору, оскільки зона витоку є малою в порівнянні з довжиною ділянки, можна вважати $|L| \to \infty$.

Для знаходження початкових умов як швидкість зміни тиску $\dfrac{\partial p}{\partial t}$ використаємо друге рівняння системи (8), яке записується у вигляді:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{\rho c^2}{S}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}. \tag{17}$$

Для знаходження $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ скористаємось (в зоні поза дефектом) інтегралом Бернуллі:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{u_0^2}{2} = \frac{p_0 - \varepsilon x}{\rho} + \frac{u^2}{2}, \tag{18}$$

де p_0, u_0 – значення тиску та швидкості на виході з насосної станції; p, u – значення відповідних параметрів в контрольній точці.

Із залежності (18) одержуємо:

$$\begin{cases} u = \sqrt{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon x}{\rho}}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\varepsilon}{\rho\sqrt{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon x}{\rho}}}. \end{cases} \tag{19}$$

Таким чином, з урахування сталості величини p_a в (16), для $\dfrac{\partial p}{\partial t}$ записуємо:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} -\dfrac{\rho c^2}{S}\dfrac{\varepsilon}{\rho}\dfrac{1}{\sqrt{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon x}{\rho}}}, & -L < x < a, \\ & b < x < L; \\ 0, & a \le x \le b. \end{cases} \tag{20}$$

Розв'язок задачі (10) з умовами (16) та (20) записується у формі Даламбера [5]:

$$p(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_1(x-ct) + \varphi_1(x+ct)\right) + \\ + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\varphi_2(\xi)d\xi. \tag{21}$$

Використання формули Даламбера дозволяє, по-перше, побудувати аналітичний розв'язок вказаної задачі, одержати формули для розрахунку тиску та швидкості в трубопроводі, а, по-друге, використання такого підходу вирішує проблему впливу на розв'язок розривного характеру початкових умов для тиску та його похідної по часу (формули (16) та (20)), оскільки формула Даламбера не містить похідних функцій (16) та (20), а розривний характер цих функцій не впливає на точність розв'язку – для того, щоб функція була б інтегрована по Ріману на відрізку, необхідно, щоб вона була обмеженою на цьому відрізку та мала б на ньому, взагалі кажучи, злічену кількість точок розриву [5]. Очевидно, що (16) та (20) таким умовам задовольняють.

З врахуванням формул для визначення $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$, залежність (21) приймає різний вигляд в різних зонах трубопроводу.

2.1 Якщо $x+ct<a$ або $b<x+ct$:

$$p(x,t) = \frac{1}{2}\left(p_0 - \varepsilon(x-ct) + p_0 - \varepsilon(x+ct)\right) + \\ + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} -\frac{\rho c^2}{S}\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{1}{\sqrt{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon\xi}{\rho}}}d\xi = p_0 - \varepsilon x - \\ - \frac{\rho c}{2S}\left[\sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon(x+ct)}{\rho}} - \sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon(x-ct)}{\rho}}\right]. \tag{22}$$

2.2 Якщо $a<x+ct$:

$$p(x,t) = \frac{1}{2}\left(p_0 + \varepsilon(x-ct) + p_a\right) - \\ - \frac{\rho c}{2S}\left[\sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon a}{\rho}} - \sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon(x-ct)}{\rho}}\right]. \tag{23}$$

2.3 Якщо $b>x+ct$:

$$p(x,t) = p_0 - \varepsilon x - \\ - \frac{\rho c}{2S}\left[\sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon a}{\rho}} - \sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon(x-ct)}{\rho}}\right] - \\ - \frac{\rho c}{2S}\left[\sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon(x+ct)}{\rho}} - \sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon b}{\rho}}\right], \tag{24}$$

або, спрощуючи (24), можна одержати:

$$p(x,t) = p_0 - \varepsilon x - \frac{\rho c}{2S}\left[\sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon(x+ct)}{\rho}} + \right. \\ \left. + \sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon a}{\rho}} - \sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon b}{\rho}} - \sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon(x-ct)}{\rho}}\right]. \tag{25}$$

Розглянемо випадок, коли величина зони витоку мала $(a \to b)$, знайдемо наступну границю:

$$\lim_{a\to b}\left[\sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon a}{\rho}} - \sqrt{u_0^2 + \frac{2\varepsilon b}{\rho}}\right] = \\ = \lim_{a\to b}\frac{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon a}{\rho} - u_0^2 - \dfrac{2\varepsilon b}{\rho}}{\sqrt{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon a}{\rho}} + \sqrt{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon b}{\rho}}} = \\ = \lim_{a\to b}\frac{2\varepsilon}{\rho}\frac{a-b}{\sqrt{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon a}{\rho}} + \sqrt{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon b}{\rho}}} = 0. \tag{26}$$

Це означає, що залежність (25) за умови (26) співпадає з (22), що відповідає зоні відсутності витоку.

Якщо умова $a \to b$ не виконується, то роздільна здатність методики оцінки наявності витоків визначається величиною δ:

$$\delta = \frac{2\varepsilon}{\rho}\frac{a-b}{\sqrt{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon a}{\rho}} + \sqrt{u_0^2 + \dfrac{2\varepsilon b}{\rho}}}. \tag{27}$$

Важливого значення набуває дослідження випадку наявності кількох дефектів. З точки зору математичного моделювання система рівнянь (8) записується аналогічно, в той час, як граничні умови записуються у вигляді, який гарантує врахування наявності кількох дефектів:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} p_0 - \varepsilon x, & [-L; L] \Big/ \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i \le x \le b_i\}; \\ p_{a_i}, & a_i \le x \le b_i, \end{cases} \tag{28}$$

де $[a_i, b_i]$ – зони дефектів, $i = 1, 2, ..., N$.

Формула (28) дозволяє врахувати наявність N витоків, при цьому напрямком подальшого дослідження може бути визначення величини p_{a_i}. Очевидно, що (28) є справедливим лише в тому випадку, коли дефекти розташовані на достатній відстані один від одного, оскільки в іншому випадку необхідно більш детально визначити розподіл тиску поза зонами дефекту. Крім того, заслуговує подальшого вивчення випадок, коли система (8) записується у вигляді:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\rho}{S}\dfrac{\partial u}{\partial t} + f(x,t); \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{S}{\rho c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}, \end{cases} \tag{29}$$

де $f(x,t)$ – деяка зовнішня збурюючи сила (вібрації, додаткові навантаження тощо). В такому випадку рівняння (10) може бути записане у вигляді:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{30}$$

з відповідними початковими умовами, а розв'язок задачі у формі Даламбера [5] набуває вигляду:

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \frac{1}{2}\big(\varphi_1(x - ct) + \varphi_1(x + ct)\big) + \\ &+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_2(\xi)d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(s,t)\,ds dt, \end{aligned} \tag{31}$$

де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – обчислюються за (16) або (28) та (20). Важливого значення набуває також фізичне моделювання вказаних процесів з метою порівняння результатів розрахунків та вимірів, а також реалізація інших моделей, що відтворюють процеси течії по трубах за наявності витоків.

За одержаними значеннями тиску за формулами (22)-(25) з використанням рівнянь системи (14) проводиться розрахунок поля швидкостей шляхом інтегрування відповідних рівнянь за відомим розподілом $p(x,t)$. При цьому можна використовувати будь-яке з рівнянь системи (14), оскільки $p(x,t)$ побудовано таким чином, що виконується будь-яке з рівнянь (14).

ВИСНОВКИ. 1. Формули (22)-(25) є практично важливими, якщо умова $a \to b$ не виконується (відсутні малі витоки), при цьому роздільна здатність методики оцінки наявності витоків визначається величиною δ за формулою (27).

2. Формула (23), яка є справедливою безпосередньо в зоні витоку, несе найбільше інформації про перепад тиску – тобто, найбільш ефективною вказана методика є лише на достатньо близькій відстані до дефекту.

3. Методика оцінки перепаду тиску за формулами (22)-(25) з технологічних параметрів використовує лише добре відомі значення p_0, u_0, ε. Певну складність складає лише визначення p_a в (16), ця величина повинна бути визначена експериментально. Для надземних ділянок трубопроводу цю величину можна вважати рівною атмосферному тиску.

4. Пропонована методика оцінки тиску та швидкостей в трубопроводах за наявності витоків може бути використана при створенні методик виявлення витоків в трубопроводах різного призначення, на відміну від існуючих методик [1], одержані розрахункові залежності не використовують апарату δ-функцій, що дозволяє розробити відносно прості методики інженерного розрахунку параметрів течії в трубопроводах з витоками.

5. Проведені дослідження засвідчують, що, незважаючи на різний характер течії рідини та газів, математичних моделей, які залучаються до їх опису, основи і закономірності процесу течії з витоками залишаються незмінними, а саме – характерні розміри зон впливу дефектів, вплив інтенсивності витоку.

6. Подальші дослідження можуть стосуватись дослідження наявності кількох дефектів в трубопроводі із граничними умовами у формі (28) та визначення p_{a_i}, а також врахування додаткових навантажень, які представлені у формулах (29) та (31). Доцільним було б також порівняння результатів для єдиної ділянки з дефектами типу витоків, які можна одержати з використанням всіх описаних в роботі моделей течії в'язкої рідини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Щербаков С.Г. Проблемы трубопроводного транспорта нефти и газа. – М.: Недра, 1982. – 208 с.

2. Методи математичного моделювання в задачах контролю витоків рідин з трубопроводів / Л.М. Заміховський, Л.О. Штаєр // Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського. – Кременчук, 2011. – Вип. 5/2011 (70). – С. 32–34.

3. Неразрушающий контроль и диагностика: справочник / Клюев В.В., Соснин Ф.Р., Ковалев А.В. и др.; под ред. В. В. Клюева. – М.: Машиностроение, 2003. – 656 с.

4. Седов Л.И. Механика сплошных сред. – М.: Наука, 1984. – Т. 2. – 572 с.

5. Методы математической физики / Г. Джеффрис, Б. Свирлс. – М.: Мир, 1970. – 343 с.

MODELLING OF THE PRESSURE DISTRIBUTION IN THE PIPELINE HAVING LEAKAGES USING D'ALEMBERT FORMULA

A. Olijnyk, L. Shtayer
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
vul. Karpatska,15, Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine. E–mail: lida.shtayer@gmail.com

To estimate the low leakage influence on the pressure and velocity distribution in a pipeline, the mathematical models of the viscous liquid flow velocity have been designed by the authors. It is found that the Navier-Stokes steady model shows good results for the liquid stream. The authors have suggested the mathematical model describing the gas stream in pipeline with leakages with the accurate set of boundary limits. The authors have offered two methods of acoustic approximation model with taking into account a one-dimensional character of stream, the sound velocity formula, and neglecting of the convection terms of the Navier-Stokes system. The mathematical model for estimation of pressure distribution of pipelines having leakages using d'Alembert formula has been suggested in the article. The presentation of initial conditions for pressure and its derivative for the method offered have been designed. The pressure distribution depending on the leakages in the pipeline has been derived and the results obtained have been analyzed by the authors. The paper contains the feasibility of this technique use with its limitations specified. In the end of the paper there are conclusions as for future investigations.

Key words: the oscillation equation, low leakage, d'Alembert formula, initial conditions, pressure distribution.

REFERENCES

1. Shcherbakov, S.G. (1982), *Problemy truboprovodnogo transporta nefti i gaza* [Problems of Oil and Gas Pipeline Transport], Nedra, Moscow, Russia.
2. Zamikhovskij, L.M., Shtayer, L.O. (2011), “Mathematical Modelling Methods in the Pipeline’s Liquid Leakage Control Problems”, *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, vol. 70, iss. 5, pp. 32-34, Kremenchuk, Ukraine.
3. Klyuev, V.V., Sosnin, F.R., Kovalev, A.V. et al. (2003), *Nerazrushajushchij control i diagnostika: spravochnik* [Non-Destructive Control and Diagnostics: Directory], ed. by V.V. Klyuev, 2nd edition, Mashinostroenie, Moscow, Russia.
4. Sedov, L.I. (1984), *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continium Media Mechanics], vol. 2., Nauka, Moscow, Russia.
5. Jeffreys, G., Swirles, B. (1970), *Metodi matematicheskoj fiziki* [The Mathematical Physics Equations], Mir, Moscow, Russia.

Стаття надійшла 12.02.2013.