

УДК 519.63.001.57

**ЧИСЛОВО-АНАЛІТИЧНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ
ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ****А. Я. Бомба**Рівненський державний гуманітарний університет
вул. Остафова, 31, м. Рівне, 33000, Україна. E-mail: abomba@ukr.net**О. М. Гладка**Національний університет водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, Україна. E-mail: viklom@ukr.net

На основі синтезу числових методів комплексного аналізу і числово-аналітичних представлень розроблено ефективний конструктивний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач для двозв'язних криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями. Числово-аналітичні представлення розв'язків отримано шляхом поєднання числових (різницевих) і аналітичних методів (розділення змінних, інтегральних представлень тощо), які є узагальненням методів сумарних зображень на випадок розв'язування модельних нелінійних задач, що описують стаціонарні процеси фільтрації у криволінійних плоских пластах, провідність яких є функцією від потенціалу поля. Створений алгоритм автоматично вирішує проблему вибору вузлів і побудови динамічної сітки, знаходження невідомих значень (повної витрати, величини швидкості та ін.). Ефективність запропонованої методики продемонстровано на прикладі розрахунку характерних параметрів процесу фільтрації у сланцевому пласті.

Ключові слова: конформне (квазіконформне) відображення, метод сумарних зображень, числово-аналітичне представлення, нелінійна крайова задача, динамічна сітка.

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ
ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ****А. Я. Бомба**Ровненский государственный гуманитарный университет
ул. Остафова, 31, г. Ровно, 33000, Украина. E-mail: abomba@ukr.net**Е.Н. Гладкая**Национальный университет водного хозяйства и природопользования
ул. Соборная, 11, г. Ровно, 33028, Украина. E-mail: viklom@ukr.net

На основе синтеза численных методов комплексного анализа и численно-аналитических представлений разработан эффективный конструктивный подход к решению нелинейных краевых задач для двусвязных криволинейных областей, ограниченных эквипотенциальными линиями. Численно-аналитические представления решений получены путем сочетания численных (разностных) и аналитических методов (разделения переменных, интегральных представлений и т. д.), которые являются обобщением методов суммарных представлений на случай решения модельных нелинейных задач, описывающих стационарные процессы фильтрации в криволинейных плоских пластах, проводимость которых является функцией от потенциала поля. Созданный алгоритм автоматически решает проблему выбора узлов и построения динамической сетки, нахождения неизвестных значений (полного расхода, величины скорости и др.). Эффективность предложенной методики продемонстрирована на примере расчета характерных параметров процесса фильтрации в сланцевых пластах.

Ключевые слова: конформное (квазиконформное) отображение, метод суммарных представлений, численно-аналитическое представление, нелинейная краевая задача, динамическая сетка.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. На основі синтезу числових методів комплексного аналізу [1, 9] і числово-аналітичних представлень, які є узагальненням методів сумарних зображень, розроблено конструктивний підхід до розв'язання для двозв'язних криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями, нелінійних крайових задач, що моделюють стаціонарні процеси фільтрації у пористих середовищах [2], зокрема, сланцевих пластах. При цьому, вихідна задача зводиться до обернення квазіконформного відображення заданої фізичної області на відповідну область квазікомплексного потенціалу. Обернена задача на квазіконформне відображення є "малонелінійною" (нелінійність – локалізована), і полягає у знаходженні розв'язків системи еліптичних диференціальних рівнянь, що задовольняють задані (чи певним чином сконструйовані) крайові умови, умови ортогональності ліній динамічної сіт-

ки на границі області та інші додаткові умови [1].

У роботах [3, 4] розглядалися випадки, коли коефіцієнт провідності середовища вважався сталою ("усередненою") чи кусково-сталою функцією. При цьому, розв'язки відповідних задач у внутрішніх вузлах сітки знаходилися за допомогою відомих числово-аналітичних формул сумарних зображень [5-7], використання яких дозволило значно оптимізувати обчислювальний процес, оскільки дало можливість у комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці врахувати вплив усіх граничних та внутрішніх вузлів і, отже, пришвидшити досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

Але при моделюванні реальних процесів руху речовини у неоднорідних пористих чи тріщинуватих пластах з'являється необхідність враховувати зворотній вплив потенціалу поля швидкості на провідність середовища. Зокрема, такі задачі виникають

при моделюванні процесів у присвердловинних зонах під час видобутку сланцевого газу, наприклад, методами гідророзриву. При цьому, провідність самого пласта, як правило, є дуже низькою через значну щільність породи, а поблизу свердловини – суттєво зростає за рахунок "тріщин" гідророзриву, зменшення тиску через відкачування газу тощо.

У даній роботі розроблена методика викладена на прикладі розв'язання нелінійної крайової задачі для двозв'язної обмеженої екіпотенціальними лініями області з коефіцієнтом провідності, що є функцією від потенціалу поля швидкості, яка зводиться до обернення квазіконформного відображення даної області із умовним розрізом вздовж деякої лінії течії (яка знаходиться в процесі розв'язання задачі) на відповідну область квазікомплексного потенціалу, що є прямокутником з невідомою висотою (повною витратою). Використання числово-аналітичних представлень як компоненти раніше розроблених обчислювальних процедур дозволяє суттєво підвищити ефективність запропонованого алгоритму.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.

Постановка задачі. Розглянемо стаціонарний процес фільтрації у двозв'язній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій замкненими контурами – екіпотенціалами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ і $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$. Аналогічно [4], зробимо умовний розріз Γ вздовж вибраної лінії течії і отримаємо однозв'язну область $G_z^\Gamma = G_z / \Gamma$.

Процес фільтрації описуватимемо рівнянням руху $\vec{v} = \kappa(\varphi) \cdot \text{grad } \varphi$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$ [1], де $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$ – швидкість фільтрації; $\kappa(\varphi)$ – так званий, фіктивний коефіцієнт провідності, що характеризує проникність середовища, його схильність до деформації, густину і в'язкість субстанції, що фільтрується; φ – потенціал поля, такий, що $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$.

Ввівши, аналогічно [1], функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (квазіконформно спряжену до φ), приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z^Γ на відповідну прямокутну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром (повною витратою) $Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \kappa(\varphi) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z; \\ \varphi|_{L_*} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \\ \psi|_{L_0} &= 0, \quad \psi|_{L^0} = \oint_{L_*} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

де L_0, L^0 – відповідно нижній і верхній береги розрізу Γ .

Обернена до (1) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^Γ при невідомій витраті Q та природному розрізі Γ має вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} \kappa(\varphi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\kappa(\varphi) \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi} &= \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi} &= \lim_{\psi \rightarrow Q-0} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

і є еквівалентною задачі [4]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa(\varphi)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa(\varphi) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa(\varphi)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa(\varphi) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) &= x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right)_{\varphi=\varphi_*} &= 0, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right)_{\varphi=\varphi^*} &= 0, \\ Q &= \oint_{L_*} \frac{\kappa(\varphi)}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} dx + \frac{\kappa(\varphi)}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} dy, \\ J &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Числово-аналітичні представлення розв'язків нелінійної задачі (3) сконструйовано з використанням ідеї поетапної фіксації її окремих параметрів шляхом поєднання числових (скінченно-різницевих) і аналітичних (розділення змінних, інтегральних представлень тощо) методів, які можна вважати узагальненням методів сумарних зображень.

В області комплексного потенціалу будуюмо рівномірну ортогональну сітку і замінюємо G_ω сітковою областю $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta_\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1}; \psi_j = \Delta_\psi \cdot j, j = \overline{0, n+1}; \Delta_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \Delta_\psi = \frac{Q}{n+1}, \gamma = \frac{\Delta_\varphi}{\Delta_\psi}, m, n \in \mathbb{N}\}$, а крайові умови, умови періодичності на розрізі і умови ортогональності ліній динамічної сітки до відповідних ділянок границі фізичної області – скінченно-різницевиими аналогами [4]:

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, j = \overline{0, n+1}, \\ x_{i,0} = x_{i,n+1}, y_{i,0} = y_{i,n+1}, i = \overline{0, m+1}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_{i,j} = \alpha(x_{i+1,j} + x_{i-1,j}) + \beta(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) + \\ 0.05(x_{i-1,j-1} + x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j+1} + x_{i+1,j+1}), \\ y_{i,j} = \alpha(y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) + \beta(y_{i,j+1} + y_{i,j-1}) + \\ + 0.05(y_{i-1,j-1} + y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j+1} + y_{i+1,j+1}), \\ i = \overline{1, m}, j = \overline{0, n+1}, \\ \alpha = \frac{3\Delta_\varphi^2 \Delta_\psi^4}{5(\Delta_\varphi^2 \Delta_\psi^4 + \Delta_\varphi^4 \Delta_\psi^2)} - 0.1, \\ \beta = \frac{3\Delta_\varphi^4 \Delta_\psi^2}{5(\Delta_\varphi^2 \Delta_\psi^4 + \Delta_\varphi^4 \Delta_\psi^2)} - 0.1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + \\ + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{m,j} + x_{m-2,j} - 4x_{m-1,j})(x_{m,j+1} - x_{m,j-1}) + \\ + (3y_{m,j} + y_{m-2,j} - 4y_{m-1,j})(y_{m,j+1} - y_{m,j-1}) = 0, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + \\ + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \\ (3x_{i,n} + x_{i,n-2} - 4x_{i,n-1})(x_{i+1,n} - x_{i-1,n}) + \\ + (3y_{i,n} + y_{i,n-2} - 4y_{i,n-1})(y_{i+1,n} - y_{i-1,n}) = 0, \\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (6)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$.

Задаємо початкові значення невідомої величини γ (або шуканої витрати Q) та функцій x і y у граничних вузлах сіткової області $x_{0,j}$, $y_{0,j}$, $x_{m+1,j}$, $y_{m+1,j}$, $x_{i,n+1}$, $y_{i,n+1}$, $x_{i,0}$, $y_{i,0}$ з урахуванням крайових умов (4). Наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах сіткової області знаходимо як розв'язки наступних задач:

$$\begin{cases} \mathbb{L}x = 0, (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ x(\varphi_*, \psi) = \bar{x}_1(\psi), x(\varphi^*, \psi) = \bar{x}_2(\psi), \\ x(\varphi, 0) = \bar{x}_3(\varphi), x(\varphi, Q) = \bar{x}_4(\varphi); \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \mathbb{L}y = 0, (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ y(\varphi_*, \psi) = \bar{y}_1(\psi), y(\varphi^*, \psi) = \bar{y}_2(\psi), \\ y(\varphi, 0) = \bar{y}_3(\varphi), y(\varphi, Q) = \bar{y}_4(\varphi), \end{cases} \quad (8)$$

де $\mathbb{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa(\varphi)} \frac{\partial u(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa(\varphi) \frac{\partial u(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \right)$;
 $\bar{x}_1(\psi_j) = x_{0,j}$, $\bar{x}_2(\psi_j) = x_{m+1,j}$, $\bar{y}_1(\psi_j) = y_{0,j}$,
 $\bar{y}_2(\psi_j) = y_{m+1,j}$, $j = \overline{0, n+1}$, $\bar{x}_3(\varphi_i) = x_{i,0}$,
 $\bar{x}_4(\varphi_i) = x_{i,n+1}$, $\bar{y}_3(\varphi_i) = y_{i,0}$, $\bar{y}_4(\varphi_i) = y_{i,n+1}$,
 $i = \overline{0, m+1}$ (тут і надалі через $\bar{u}(\varphi, \psi)$, $(\varphi, \psi) \in G_\omega$,

позначено відповідне аналітичне продовження сіткової функції $u_{i,j} = u(\varphi_i, \psi_j)$, $(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega'$).

Розв'язок задачі (7) шукатимемо у вигляді:

$$x(\varphi, \psi) = \bar{u}(\varphi, \psi) + v(\varphi, \psi),$$

де $\bar{u}(\varphi, \psi)$ вибирається так, щоб $\bar{x}_1(\psi) - \bar{u}(\varphi_*, \psi) = 0$ і $\bar{x}_2(\psi) - \bar{u}(\varphi^*, \psi) = 0$, тобто

$$\bar{u}(\varphi, \psi) = \bar{x}_1(\psi) + \frac{\varphi - \varphi_*}{\varphi^* - \varphi_*} (\bar{x}_2(\psi) - \bar{x}_1(\psi)),$$

або (у вузлах сітки)

$$u_{i,j} = u(\varphi_i, \psi_j) = \frac{m+1-i}{m+1} x_{0,j} + \frac{i}{m+1} x_{m+1,j},$$

$i = \overline{0, m+1}$, $j = \overline{0, n+1}$,

а функція $v(\varphi, \psi)$ є розв'язком наступної крайової задачі з нульовими крайовими умовами по φ :

$$\begin{cases} \mathbb{L}v = \bar{F}(\varphi, \psi), (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ v(\varphi_*, \psi) = 0, v(\varphi^*, \psi) = 0, \\ v(\varphi, 0) = \bar{v}_3(\varphi), v(\varphi, Q) = \bar{v}_4(\varphi), \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{де } \bar{F}(\varphi, \psi) = -\mathbb{L}\bar{u} = -\kappa(\varphi) \frac{\partial^2 \bar{u}(\varphi, \psi)}{\partial \psi^2},$$

$$\bar{v}_3(\varphi) = \bar{x}_3(\varphi) - \bar{u}(\varphi, 0), \bar{v}_4(\varphi) = \bar{x}_4(\varphi) - \bar{u}(\varphi, Q).$$

Використовуючи метод розділення змінних, розв'язок задачі (9) шукатимемо у вигляді ряду:

$$v(\varphi, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p(\varphi) \Psi_p(\psi), \quad (10)$$

де $\Phi_p(\varphi)$ – розв'язки задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\kappa(\varphi)} \Phi'(\varphi) \right)' + \lambda \kappa(\varphi) \Phi(\varphi) = 0, \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \\ \Phi(\varphi_*) = \Phi(\varphi^*) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Як відомо [8], при достатньо гладкій функції $\kappa(\varphi) > \kappa_0 \geq 0$ задача (11) має нетривіальні розв'язки, тобто існує послідовність дійсних чисел $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p \leq \dots$, $\lambda_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \infty$, що є влас-

ними значеннями оператора $\left(\frac{1}{\kappa(\varphi)} \Phi'(\varphi) \right)'$, яким від-

повідають функції $\Phi_p(\varphi)$, що утворюють повну, ортонормовану з вагою $\kappa(\varphi)$ систему власних функцій

($\|\Phi_p\|^2 = \int_{\varphi_*}^{\varphi^*} \kappa(\xi) \Phi_p^2(\xi) d\xi = 1$). Для знаходження функ-

цій $\Phi_p(\varphi)$ можна скористатись варіаційними (наприклад, методом Рітца) чи різницевиими методами.

Для функцій $\Psi_p(\psi)$ маємо задачу:

$$\begin{cases} \Psi_p''(\psi) - \lambda_p \Psi_p(\psi) = \bar{F}_p(\psi), 0 < \psi < Q, \\ \Psi_p(0) = \bar{v}_{3p}, \Psi_p(Q) = \bar{v}_{4p}, \end{cases} \quad (12)$$

де $\bar{F}_p(\psi) = \frac{1}{\|\Phi_p\|^2} \int_{\varphi^*}^{\varphi} \bar{F}(\xi, \psi) \kappa(\xi) \Phi_p(\xi) d\xi$ – коефіцієнти Фур'є розкладу функції $\bar{F}(\varphi, \psi)$ по ортогональній з вагою $\kappa(\varphi)$ системі $\Phi_p(\varphi)$:

$$\bar{F}(\varphi, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{F}_p(\psi) \kappa(\varphi) \Phi_p(\varphi);$$

$$\bar{v}_{3p} = \frac{1}{\|\Phi_p\|^2} \int_{\varphi^*}^{\varphi} \bar{v}_3(\xi) \kappa(\xi) \Phi_p(\xi) d\xi,$$

$$\bar{v}_{4p} = \frac{1}{\|\Phi_p\|^2} \int_{\varphi^*}^{\varphi} \bar{v}_4(\xi) \kappa(\xi) \Phi_p(\xi) d\xi \text{ – коефіцієнти Фур'є розкладу по ортогональній з вагою } \kappa(\varphi) \text{ системі}$$

$$\Phi_p(\varphi) \text{ функцій } \bar{v}_3(\varphi) = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{v}_{3p} \Phi_p(\varphi),$$

$$\bar{v}_4(\varphi) = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{v}_{4p} \Phi_p(\varphi).$$

Загальний розв'язок крайової задачі (12) знаходиться аналітично у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння із заданими крайовими умовами і часткового розв'язку неоднорідного рівняння з нульовими крайовими умовами:

$$\Psi_p(\psi) = A_p e^{\sqrt{\lambda_p} \psi} + B_p e^{-\sqrt{\lambda_p} \psi} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \int_0^{\psi} \text{sh} \sqrt{\lambda_p} (\psi - \xi) \cdot \bar{F}_p(\xi) d\xi,$$

де A_p, B_p – деякі сталі, що визначаються із крайових умов.

Тоді, загальний розв'язок задачі (9) представляється у вигляді:

$$v(\varphi, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p(\varphi) \left(A_p e^{\sqrt{\lambda_p} \psi} + B_p e^{-\sqrt{\lambda_p} \psi} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \int_0^{\psi} \text{sh} \sqrt{\lambda_p} (\psi - \xi) \cdot \bar{F}_p(\xi) d\xi \right),$$

а загальний розв'язок задачі (7) матиме вигляд:

$$x(\varphi, \psi) = \bar{u}(\varphi, \psi) + \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p(\varphi) \left(A_p e^{\sqrt{\lambda_p} \psi} + B_p e^{-\sqrt{\lambda_p} \psi} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \int_0^{\psi} \text{sh} \sqrt{\lambda_p} (\psi - \xi) \cdot \bar{F}_p(\xi) d\xi \right). \quad (13)$$

Скінченно-різницевою аналогом формули (13) запишемо таким чином ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$):

$$x_{i,j} = u_{i,j} + \sum_{p=1}^m \Phi_{p,i} \left(A_p e^{j\sqrt{\lambda_p}} + B_p e^{-j\sqrt{\lambda_p}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \sum_{q=1}^{j-1} \text{sh} \sqrt{\lambda_p} (j-q) \cdot \bar{F}_{p,q}^* \right), \quad (14)$$

$$\text{де } F_{p,j}^* = \frac{1}{\|\Phi_{p,i}\|^2} \sum_{i=1}^m F_{i,j} \kappa_i \Phi_{p,i}, \quad \kappa_i = \kappa(\varphi_i),$$

$$F_{i,j} = -\kappa_i \left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_{\psi}^2} \right) = -\frac{\kappa_i}{(m+1)\Delta_{\psi}^2} \times \left((m+1-i) \left(x_{0,j+\frac{1}{2}} - x_{0,j-\frac{1}{2}} \right) + i \left(x_{m+1,j+\frac{1}{2}} - x_{m+1,j-\frac{1}{2}} \right) \right),$$

$\Phi_{p,i} = \Phi_p(\varphi_i)$ – значення у вузлах сіткової області G_{ω}^{γ} функцій $\Phi_p(\varphi)$, що є розв'язками задачі (11).

Для деяких часткових випадків функцій $\kappa(\varphi)$ їх можна виписати аналітично, зокрема, через спеціальні функції. В загальному випадку, функції $\Phi_p(\varphi)$ і відповідні їм значення λ_p знайдемо за допомогою різницьових методів.

Скінченно-різницевою аналогом задачі (11) будемо за методом балансу (інтегро-інтерполяційним методом), що забезпечує другий порядок точності, збіжність і стійкість отриманої різницевої задачі [8]:

$$\frac{1}{\Delta_{\varphi}} \left(\frac{1}{\kappa_{i+1/2}} \frac{\Phi_{p,i+1} - \Phi_{p,i}}{\Delta_{\varphi}} - \frac{1}{\kappa_{i-1/2}} \frac{\Phi_{p,i} - \Phi_{p,i-1}}{\Delta_{\varphi}} \right) - \lambda_p \kappa_i \Phi_{p,i} = 0,$$

$$\text{де } \kappa_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta_{\varphi}} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \kappa(\xi) d\xi, \quad \kappa_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta_{\varphi}} \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \kappa(\xi) d\xi.$$

Позначимо $\alpha_i = \frac{\kappa_{i-1/2}}{\kappa_{i+1/2}}, \beta_i = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1/2}}$ ($i = \overline{1, m}$) і отримаємо:

$$\begin{cases} \Phi_{p,i+1} - (1 + \alpha_i + \lambda_p \beta_i) \Phi_{p,i} + \alpha_i \Phi_{p,i-1} = 0, \\ \Phi_{p,0} = 0, \quad \Phi_{p,m+1} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для знаходження невідомих λ_p ($p \leq m$) необхідно розв'язати відносно λ рівняння $\det \mathbf{A} = 0$, де \mathbf{A} – тридіагональна матриця порядку $m \times m$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(1 + \alpha_1 + \lambda \beta_1) & \alpha_1 & 0 & \dots \\ 1 & -(1 + \alpha_2 + \lambda \beta_2) & \alpha_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Розв'язок системи різницьових рівнянь (15) можна знайти методом прогонки.

Аналогічно до (14), розв'язок задачі (8) матиме вигляд ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$):

$$y_{i,j} = \tilde{u}_{i,j} + \sum_{p=1}^m \Phi_{p,i} \left(C_p e^{j\sqrt{\lambda_p}} + D_p e^{-j\sqrt{\lambda_p}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \sum_{q=1}^{j-1} \text{sh} \sqrt{\lambda_p} (j-q) \cdot \tilde{F}_{p,q}^* \right), \quad (16)$$

$$\text{де } \tilde{u}_{i,j} = \frac{m+1-i}{m+1} y_{0,j} + \frac{i}{m+1} y_{m+1,j},$$

$$\tilde{F}_{p,j}^* = \frac{1}{\|\Phi_{p,i}\|^2} \sum_{i=1}^m \tilde{F}_{i,j} \kappa_i \Phi_{p,i},$$

$$\tilde{F}_{i,j} = -\kappa_i \left(\frac{\tilde{u}_{i,j+1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j-1}}{\Delta_\psi^2} \right) = -\frac{\kappa_i}{(m+1)\Delta_\psi^2} \times \left((m+1-i) \left(y_{0,j+\frac{1}{2}} - y_{0,j-\frac{1}{2}} \right) + i \left(y_{m+1,j+\frac{1}{2}} - y_{m+1,j-\frac{1}{2}} \right) \right).$$

Алгоритм розв'язання задачі (3) в загальному вигляді може бути описаний наступним чином. Задаємо кількість $m \times n$ вузлів розбиття сіткової області G_ω^y , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі та бажаний рівень квазіконформності відображення δ_* , нульове наближення невідомої величини γ (або шуканої витрати Q), початкові наближення значень функцій x і y у граничних вузлах (координати граничних вузлів динамічної сітки) так, щоб виконувались умови (4) і обчислюємо за формулами (14), (16) початкові наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах (координати внутрішніх вузлів динамічної сітки). Знаходимо значення γ і Q за формулами:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\gamma_{i,j}^{(1)} + \gamma_{i,j+1}^{(1)}}{\gamma_{i,j}^{(2)} + \gamma_{i+1,j}^{(2)}}, \quad Q = \Delta_\psi \cdot \frac{n+1}{\gamma}, \quad (17)$$

де, $\gamma_{i,j}^{(1)} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}$,
 $\gamma_{i,j}^{(2)} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}$.

Після цього, уточнюємо координати граничних вузлів (4), (5) і обчислюємо нове наближення координат внутрішніх вузлів за формулами (14), (16); знаходимо γ та Q за (17).

Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів, якщо величина зміщення вузлів на границі за проведеному k -ту загальну ітерацію

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$$

більша за ε ,

то повторюємо перерахунок параметрів задачі. У протилежному випадку зупиняємо ітераційний процес і оцінюємо ступінь квазіконформності

$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій умов Коші-Рімана:

$$\delta_1 = \max_{i,j=2}^{m-1,n-1} \left| \kappa_i (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=2}^{m-1,n-1} \left| (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \kappa_i \gamma (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|.$$

Якщо $\delta \leq \delta_*$, то вважаємо, що задача розв'язана із необхідною точністю, інакше, збільшуємо кількість вузлів розбиття області чи змінюємо співвідношення між m і n (значення параметрів m і n доцільно задавати так, щоб виконувалася умова $\gamma \approx 1$, що з

геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної) та повторюємо кроки алгоритму.

Часткові випадки функції $\kappa(\varphi)$ дозволяють значно конкретизувати вигляд формул (14), (16) чи підхід до розв'язання задачі (11), або навіть отримати розв'язки задач (7), (8) у аналітичному вигляді, що значно покращує ефективність вищенаведеного алгоритму.

Зауважимо, що формули (14), (16) можна вважати узагальненням класичних формул сумарних зображень [5-7] на випадок задач типу (7), (8): якщо покласти $\kappa(\varphi) = 1$ то розв'язками (11) будуть функції

$$\Phi_p(\varphi) = \frac{2}{\varphi^* - \varphi_*} \sin \frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} (\varphi - \varphi_*)$$

(або в точках

$$\text{сітки: } \Phi_{p,i} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{\pi p i}{m+1},$$

які відповідають власним значенням $\lambda_p = \left(\frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} \right)^2$ (скінченно-

різницеві аналоги яких $\lambda_p = \frac{4}{\Delta_\varphi^2} \sin^2 \frac{\pi p}{2(m+1)}$), а загальний розв'язок задачі (7) матиме вигляд:

$$x(\varphi, \psi) = \bar{u}(\varphi, \psi) + \frac{2}{\varphi^* - \varphi_*} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_p e^{\frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} \psi} + B_p e^{-\frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} \psi} + \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\pi p} \int_0^\psi \left[\operatorname{sh} \frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} (\psi - \xi) \times \bar{F}_p(\xi) \right] d\xi \right\} \sin \frac{\pi p}{\varphi^* - \varphi_*} (\varphi - \varphi_*).$$

Скінченно-різницевий аналог цієї формули з урахуванням

$$F_{p,j} = -\sqrt{\frac{2}{(m+1)^3}} \left(\frac{x_{0,j} + x_{m+1,j}}{\Delta_\psi^2} \right) \sum_{i=1}^m i \sin \frac{\pi p i}{m+1},$$

запи-

ється ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$):

$$x_{i,j} = \frac{m+1-i}{m+1} x_{0,j} + \frac{i}{m+1} x_{m+1,j} + \sum_{p=1}^m P_{i,p} \left\{ A_p \mu_p^j + B_p \nu_p^j - \sum_{q=1}^{j-1} \left[\frac{\mu_p^{j-q} - \nu_p^{j-q}}{\mu_p - \nu_p} \times \frac{x_{0,q} + x_{m+1,q}}{\Delta_\psi^2 (m+1)} \sum_{i=1}^m i P_{i,q} \right] \right\} = \sum_{p=1}^m P_{i,p} (A_p \mu_p^j + B_p \nu_p^j - \gamma^2 \sum_{q=1}^{j-1} \frac{\mu_p^{j-q} - \nu_p^{j-q}}{\mu_p - \nu_p} (P_{1,p} x_{0,q} + P_{m+1,p} x_{0,q})), \quad (18)$$

де $P = [P_{i,k}]_{i,k=1}^m = \left[\sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{\pi k i}{m+1} \right]_{i,k=1}^m$ – квадратна

симетрична матриця P -трансформацій,

$$\mu_i^j = e^{\frac{2j}{\Delta_\varphi} \sin \frac{\pi i}{2(m+1)}}, \quad \nu_i^j = e^{-\frac{2j}{\Delta_\varphi} \sin \frac{\pi i}{2(m+1)}}.$$

У випадку $\kappa(\varphi) = \varphi^k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ в (11) маємо диференціальне рівняння Бесселя і його часткові розв'язки можуть бути записані аналітично із використанням циклічних функцій [8]:

$$\Phi_p(\varphi) = \varphi^{\frac{k+1}{2}} J_{\pm \frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_p \varphi^{k+1}}{k+1} \right),$$

де $J_{\pm \frac{1}{2}}$ – функції Бесселя першого роду,

$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}$, $J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}$. Тоді, загальний розв'язок задачі (11) матиме вигляд:

$$\Phi_p(\varphi) = \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi \sqrt{\lambda_p}}} \left(C_1 \sin \frac{\sqrt{\lambda_p} \varphi^{k+1}}{k+1} + C_2 \cos \frac{\sqrt{\lambda_p} \varphi^{k+1}}{k+1} \right),$$

де C_1, C_2 – деякі сталі, і враховуючи крайові умови

отримаємо:
$$\lambda_p = \left(\frac{\pi p(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} \right)^2,$$

$$\Phi_p(\varphi) = \frac{2(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} \sin \frac{\pi p}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} (\varphi - \varphi_*)^{k+1}.$$

Загальний розв'язок задачі (7) у цьому випадку представляється у вигляді:

$$\begin{aligned} x(\varphi, \psi) = & \bar{u}(\varphi, \psi) + \frac{2(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} \times \\ & \times \sum_{p=1}^{\infty} \left(A_p e^{\frac{\pi p(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} \psi} + B_p e^{-\frac{\pi p(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} \psi} + \right. \\ & \left. + \frac{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}}{\pi p(k+1)} \int_0^{\psi} \operatorname{sh} \frac{\pi p(k+1)}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} (\psi - \xi) \cdot \bar{F}_p(\xi) d\xi \right) \times \\ & \times \sin \frac{\pi p}{(\varphi^* - \varphi_*)^{k+1}} (\varphi - \varphi_*)^{k+1}, \end{aligned}$$

а його скінченно-різницевої аналог матиме вигляд

(18), де $\mu_i^j = e^{\frac{2j \sin \frac{\pi i(k+1)}{2(m+1)^{k+1}}}{\Delta \varphi}}$, $\nu_i^j = e^{-\frac{2j \sin \frac{\pi i(k+1)}{2(m+1)^{k+1}}}{\Delta \varphi}}$,

$$P = [P_{i,j}]_{i,j=1}^m = \left[\sqrt{\frac{2(k+1)}{(m+1)^{k+1}}} \sin \frac{\pi i j}{(m+1)^{k+1}} \right]_{i,j=1}^m.$$

Відповідні часткові випадки формули (16) записуються аналогічно (18).

Числові розрахунки. Як приклад, розглянемо стаціонарну задачу фільтрації у сланцевому пласті G_z , обмеженому еліптичним контуром живлення $L^* = \{x + iy : x = 8 \cos(t), y = 6 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, що містить одну свердловину $L_* = \{x + iy : x = 0.3 \cos(t) + 1.5, y = 0.3 \sin(t) + 1.5, 0 \leq t < 2\pi\}$

при заданих значеннях потенціалів $\varphi^* = 1$ і $\varphi_* = 0$ на даних контурах (відповідно). Коефіцієнт провідності представимо у вигляді: $\kappa = \kappa(\varphi) = \kappa_0 \pm \alpha_z \cdot \varphi$, де κ_0 – природний коефіцієнт провідності пласта, α_z – коефіцієнт збурення.

На рис. 1 зображено розраховану динамічну сітку у випадках: а) $\kappa = 1$ (отримане значення повної витрати становить $Q = 2.02699$), б) $\kappa(\varphi) = 1 + \varphi$, що відповідає явищу інтенсифікації віддачі пласта ($Q = 2.94801$), в) $\kappa(\varphi) = 1 - 0.5\varphi$, що свідчить про кольматацію привибійної зони свердловини ($Q = 1.59065$).

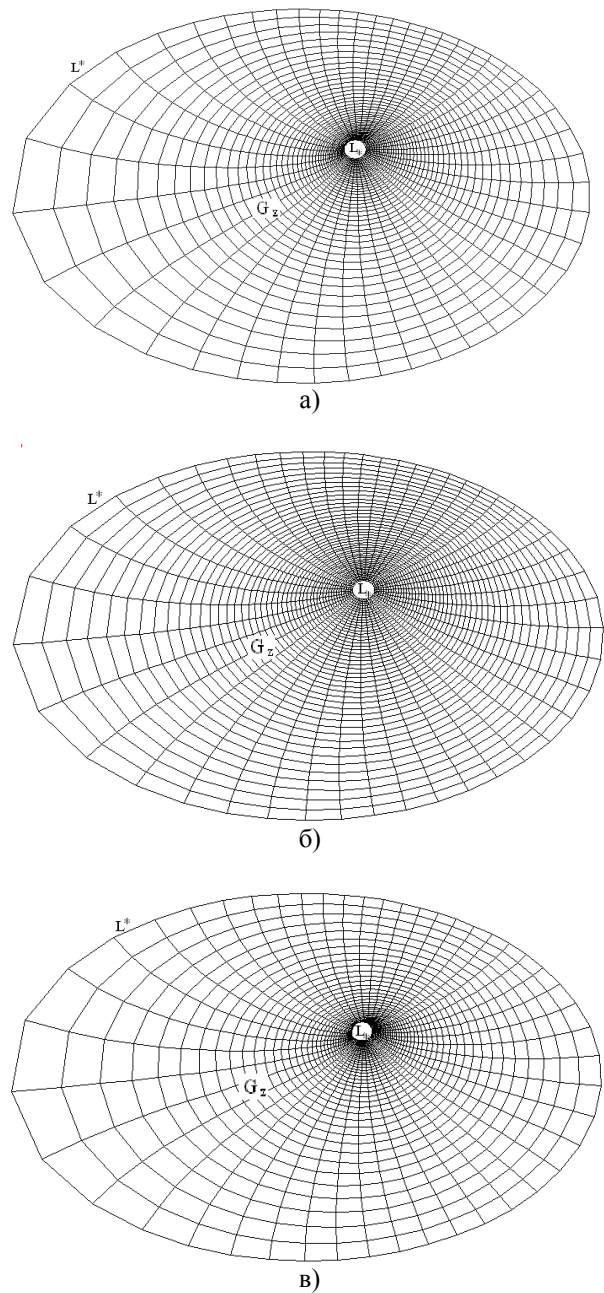


Рисунок 1 – Динамічна сітка при а) $\kappa = 1$, б) $\kappa(\varphi) = 1 + \varphi$, в) $\kappa(\varphi) = 1 - 0.5\varphi$

ВИСНОВКИ. Таким чином, для розв'язання широкого класу нелінійних крайових задач, що моделюють стаціонарні процеси фільтрації у пористих пластах, в яких коефіцієнт провідності задається як функція від потенціалу поля, сконструйовано ефективний підхід на основі синтезу числових методів комплексного аналізу і числово-аналітичних узагальнень методів сумарних зображень, що, зокрема, суттєво пришвидшує досягнення спряженості відповідних шуканих гармонічних функцій і значною мірою дозволяє уникати накопичення обчислювальних похибок та є зручним для комп'ютерної реалізації. Перспективою досліджень є поширення запропонованого підходу на прогнозування процесів, описаних у роботі [2].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопечкий В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ : Наукова думка, 2007. – 308 с.
2. Сергиенко І.В., Скопечкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наукова думка, 1991. – 432 с.
3. Бомба А.Я., Кузьменко А.П., Гладка О.М. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей // Вісник Київського нац. університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2012. – № 2. – С. 87–94.
4. Бомба А.Я., Гладка О.М. Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2012. – № 2 (108). – С. 20–31.
5. Положий Г.М. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. – К: Изд-во КГУ, 1962. – 161 с.
6. Ляшко И.И., Великоиваненко И.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. – К.: Наукова думка. – 1973. – 264 с.
7. Глуценко А.А. Один приближенный метод решения нестационарных задач математической физики // Доклады АН УССР. – Сер. А. – 1978. – № 6. – С. 490–494.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
9. Bomba A.Ya., Terebus A.V. A spatial generalization of the method of conformal mappings for the solution of model boundary value filtration problems // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – 187, № 5. – PP. 596–605.
10. Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications. – Basel–Boston–Berlin, Birkhauser, 1997.

NUMERICAL-ANALYTICAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF A CLASS OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS

A. Bomba

Rivne State Humanitarian University

vul. Ostafova, 31, Rivne, 33000, Ukraine. E-mail: abomba@ukr.net

O. Hladka

National University of Water Management and Nature Resources Use

vul. Soborna, 11, Rivne, 33028, Ukraine. E-mail: viklom@ukr.net

The authors have developed more efficient constructive approach to solving of nonlinear boundary value problems for double-connected curvilinear domains bounded by equipotential lines. This method is based on syntheses of the numerical methods complex and analysis of the numerical-analytical representations. Numerical-analytical representations of solutions was obtained by combining the numerical (finite-difference) and analytical methods (separation of variables, integral representations, etc.), which are the generalization of summary representation methods for the case of model nonlinear problems that describe the stationary filtration process in curvilinear plane layers with a conductivity depending functionally on a field potential. The algorithm developed solves automatically the nodes selection problem and design of a dynamic grid, and unknown parameters finding (total flow, speed values, etc.). The effectiveness of the method proposed was demonstrated in the case of calculation of the characteristic parameters of the filtering in the shale stratum.

Key words: conformal (quasiconformal) mapping, method of summary representations, numerical-analytical representation, nonlinear boundary value problem, dynamic grid.

REFERENCES

1. Bomba, A.Ya., Bulavatsky, V.M., Skopetsky, V.V. (2007), *Nelineini matematychni modeli protsessiv geogidrodinamyky* [Nonlinear mathematical models of geohydrodynamics processes], Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.
2. Sergienko, I.V., Skopetsky, V.V., Deineka, V.S. (1991), *Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie protsessov v neodnorodnykh sredakh* [Mathematical

modeling and investigation of processes in heterogeneous environments], Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.

3. Bomba, A.Ya., Kuzmenko, A.P., Hladka, O.M. (2012), «The Syntheses of the numeric methods conformal mappings and summary representations in modeling by ideal fields for curvilinear domains» // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*, no. 2, pp. 87–94, Ukraine.

4. Bomba, A.Ya., Hladka, O.M. (2012) «The synthesis of the numerical methods quasiconformal mappings, summary representations and domain decomposition for solving nonlinear boundary value problems in layered mediums» // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, no. 2 (108), pp. 20–31, Ukraine.

5. Polozhii, G.M. (1962), *Chislennoe reshenie dvumernykh i trekhmernykh kraevykh zadach matematicheskoi fiziki i funktsii diskretnogo argumenta* [The numerical solution of two-dimensional and three-dimensional boundary-value problems of mathematical physics and function of the discrete argument], Publishing house of KSU, Kyiv, Ukraine.

6. Lyashko, I.I., Velikoivanenko, I.M. (1973), *Chislennno-analiticheskoe reshenie kraevykh zadach teorii filtratsii* [Numerical-analytical solution of boundary value problems of filtration], Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.

7. Glushchenko, A.A. (1978), «One approximate method for solving non-stationary problems of mathematical physics» // *Reports of the Ukrainian Academy of Sciences*, no. 6, pp. 490–494.

8. Samarskii, A.A., Gulin, A.V. (2003), *Chislennye metody matematicheskoi fiziki* [Numerical methods of mathematical physics], Nauchnyi Mir, Moscow, Russia.

9. Bomba, A.Ya., Terebus, A.V. (2012), «A spatial generalization of the method of conformal mappings for the solution of model boundary value filtration problems» // *Journal of Mathematical Sciences*, no. 5 (187), pp. 596–605.

10. Skubachevskii, A.L. (1997), «Elliptic functional differential equations and applications», Birkhauser, Basel–Boston–Berlin.

Стаття надійшла 22.04.2013.