

УДК 681.586.72.

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩИХ ПУСТОТ****Т. П. Козикова, П. С. Смолянський**

ГВУЗ «Криворожский национальный университет»

ул. Лермонтова, 13/48, г. Кривой Рог, 50002, Украина. E-mail: tayadubinina2008@yandex.ru

Поиск пустот техногенного и природного характера становится все более актуальной задачей в современных условиях. Основную опасность при этом представляют собой эволюционирующие пустоты, т.е. пустоты, которые изменяют свое положение в пространстве. Классическое решение такой задачи приводит к многомерным интегральным уравнениям относительно неизвестной плотности пространственно распределенных источников гравитационных аномалий. Показано, что традиционное решение такого многомерного интегрального уравнения даже для упрощенной среды затруднительно с высокой точностью. Предложен метод обнаружения большого класса эволюционирующих пустот на основании решения преобразованных интегральных уравнений первого рода. Проведены численные эксперименты для изучения эффективности предложенных алгоритмов. Показано, что предложенные алгоритмы могут быть распараллелены. Это является существенным преимуществом предлагаемых методов.

**Ключевые слова:** эволюционирующие пустоты, гравиразведка, дискретизация, локализация пустот, аппроксимация, обратные некорректные задачи, интегральные уравнения первого рода.

**ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ПУСТОТ, ЩО ЕВОЛЮЦІОНУЮТЬ****Т. П. Козикова, П. С. Смолянський**

ДВНЗ «Криворізький національний університет»

вул. Лермонтова 13/48, м Кривий Ріг, 50002, Україна. E-mail: tayadubinina2008@yandex.ru

Пошук пустот техногенного та природного характеру стає все більш актуальним завданням у сучасних умовах. Основну небезпеку при цьому становлять порожнечі, що еволюціонують, тобто порожнечі, які змінюють своє положення в просторі. Класичне рішення такого завдання призводить до багатовимірних інтегральних рівнянь щодо невідомої щільності просторово розподілених джерел гравітаційних аномалій. Показано, що традиційне вирішення такого багатовимірного інтегрального рівняння навіть для спрощеного середовища неможливе з високою точністю. Запропоновано метод виявлення великого класу еволюціонуючих пустот на підставі рішення перетворених інтегральних рівнянь першого роду. Проведено чисельні експерименти для вивчення ефективності запропонованих алгоритмів. Показано, що запропоновані алгоритми можуть бути распаралеленими. Це є значною перевагою запропонованих методів.

**Ключові слова:** рухомі порожнечі, гравірозвідка, дискретизація, локалізація пустот, аппроксимация, обернені некоректні задачі, інтегральні рівняння першого роду.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** Поиск пустот техногенного и природного характера становится все более актуальной задачей в современных условиях. Иногда пустоты образуются естественным образом, за счет геологических процессов, но чаще всего образование пустот носит техногенный характер [1].

С этим связана все возрастающая опасность катастрофического обрушения при добыче полезных ископаемых открытым способом, прежде всего, вблизи заброшенных или действующих шахтных выработок. Основную опасность при этом представляют собой эволюционирующие пустоты, т.е. пустоты, которые изменяют свое положение в пространстве. Особенно актуальной становится задача локализации пустот при добыче полезных ископаемых открытым способом. Постоянные взрывы провоцируют образование и миграцию пустот. Устранение последствий обрушения требует затрат значительных средств. Например, в [1] описаны многочисленные случаи катастрофического выхода на поверхность такого рода пустот в условиях Центрального Горнообогатительного комбината (ЦГОК).

Эти условия делают актуальной задачу построения эффективного алгоритма локализации пустот по результатам систематических гравиметрических измерений.

Задача обнаружения эволюционирующих пустот имеет целый ряд существенных особенностей, кото-

рые позволяют отнести ее решение к отдельному подклассу задач гравиметрии. Одной из главных характеристик эволюционирующих пустот есть средняя скорости движения полости.

Значительная часть пустот потенциально может быть отнесена к классу эволюционирующих. Только большинство из них мигрирует очень медленно, находясь почти в стационарном состоянии в течении нескольких лет и более. Отследить их эволюцию во времени не представляется возможным – мешают погрешности измерений гравиметра, изменения регионального фона, постоянная добыча руды в карьере. Каждый из этих факторов влияет на процесс гравиметрических измерений на несколько порядков больше, чем влияние почти незаметного движения полости. С другой стороны, медленная эволюция таких пустот делает их практически безопасными. Поэтому такие эволюционирующие пустоты здесь рассматриваться не будут.

Значительная часть эволюционирующих пустот движется к поверхности с некоторой средней скоростью в течение нескольких недель, а то и месяцев [1], что дает возможность накопить достаточную информацию путем систематических измерений для их локализации и определения основных характеристик, прежде всего объема. Именно для этих эволюционирующих пустот будут построены алгоритмы их локализации.

Наконец, движение очень небольшой части эволюционирующих пустот происходит стремительно. Такую полость, вероятней всего, не удастся обнаружить на основании относительно редких систематических измерений, т.к. частота измерений в этом случае явно недостаточна. Но если удастся обеспечить частые или даже непрерывные результаты гравиметрических измерений с помощью системы стационарных гравиметрических датчиков, то предложенные алгоритмы для обнаружения эволюционирующих пустот могут быть применены и к этому последнему классу эволюционирующих пустот практически без изменений. Однако следует заметить, что в этом случае стоимость системы резко возрастает за счет большого количества стационарных дорогостоящих гравиметров или большого количества измерений.

Цель работы – разработка метода обнаружения большого класса эволюционирующих пустот на основании решения преобразованных интегральных уравнений первого рода.

**МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.**

Методы гравиразведки основаны на теории обратных некорректных задач. Как известно [2–5], к обратным задачам относятся задачи восстановления структуры физического объекта по косвенным наблюдениям. Например, когда внутреннее строение объекта недоступно прямому исследованию, в то время как косвенная информация о его структуре может быть получена в виде измеренных собственных физических полей объекта.

В свою очередь, эти задачи, как правило, сводятся к решению интегральных уравнений первого рода относительно физических характеристик объекта, в нашем случае плотности среды. Решение классической задачи гравиразведки [2, 6, 9] приводит к многомерным интегральным уравнениям относительно неизвестной плотности  $\rho(x, y, z)$  пространственно распределенных источников гравитационных аномалий. Функцию плотности будем называть в дальнейшем средой. Требуется в этих условиях определить неизвестное распределение плотности  $\rho$  во всей трехмерной области  $D$ . Для этого следует решить трехмерное интегральное уравнение первого рода:

$$G \cdot \int_D (z - z_0) \cdot \rho(x, y, z) / R^3 \cdot dV = F_z(x_0, y_0, z_0). \quad (1)$$

Здесь  $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$  – расстояние между текущей точкой  $M(x, y, z)$  и точкой наблюдения  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , где  $M_0 \in T$ ,  $T$  – область наблюдений,  $D$  – исследуемая область, в которой локализованы источники гравитационных аномалий. Через  $F_z$  обозначена вертикальная проекция силы тяжести в точке наблюдения  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  от всей области  $D$ ,  $G$  – гравитационная постоянная. Теоретически можно считать известными значения  $F_z$  в каждой точке области  $T$  (области измерений). Для упрощения решения (1) можно считать среду бинарной (двухкомпонентной) [7]. Это означает, что

$\rho(x, y, z)$  принимает только два значения,  $\rho_c > 0$  – среднее значение для руды и 0 для пустот. В [8] показано, что гравиметрическая задача – уравнение (1) имеет единственное решение для такой среды.

Сразу следует заметить, что локализация неподвижных пустот, то есть решение уравнения (1) даже для бинарной среды представляет практически непосильную задачу для современных технологий и методов гравиметрии.

Универсальный способ решения уравнения (1) в общем случае состоит в дискретизации области  $D = \cup D_i$  на  $N$  элементов таким образом, чтобы  $D_p \cap D_q = \emptyset$  при  $p \neq q$ . Далее, полагаем плотность среды в пределах каждого элемента  $D_i$  постоянной и равной неизвестной величине  $\rho_i$ . Выберем  $N$  точек наблюдения  $M_j(x_j, y_j, z_j)$ ,  $j = 1, N$ , в которых будет задана вертикальная составляющая силы тяжести  $F_z$ .

Выполнив интегрирование  $A_{ij} = \int_{D_i} (z - z_j) / R^3 \cdot dV$  по объему  $D_i$ , получим коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестной величины  $\rho_i$  [2, 7, 9]. Здесь  $R = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}$ .

Таким образом, получена СЛАУ относительно неизвестной плотности  $\rho_i$ :

$$A\rho = F. \quad (2)$$

Здесь  $F$  – вектор нормальной составляющей силы тяжести в заданных точках наблюдения  $M_j$ . Как свидетельствуют численные эксперименты, СЛАУ (2) плохо обусловлена [6, 9], типичные числа обусловленности порядка  $10^7$  и более. Так что удовлетворительное решение СЛАУ (2) даже в случае бинарной среды получить не удастся. Наиболее сложной проблемой является следующее. Чтобы решить уравнение (2) необходимо задать правую часть СЛАУ, а для этого требуется  $N$  гравиметрических измерений высокой точности, причем, они должны быть распределены по дневной поверхности области  $D$  достаточно равномерно для снижения числа обусловленности СЛАУ, что в условиях карьера затруднительно или даже невозможно. Измерения высокой точности необходимы в силу плохой обусловленности матрицы СЛАУ (2). Однако абсолютная точность измерений современных гравиметров ограничена и редко меньше  $10^{-2}$  мГал, а стоимость особо высокоточных гравиметров составляет 100000 у.е. и более.

Единственным реальным источником большого количества гравиметрических данных могла бы быть аэрогравиразведка, однако при таком способе гравиметрических измерений абсолютная погрешность недопустимо высока [2, 11], порядка 0,5–1,0 мГал, к тому же аэрогравиметры имеют весьма высокую стоимость, кроме того, требуется привлекать специально оборудованные летательные средства.

Можно сделать вывод, что решить классическим способом дискретизированное уравнение (1) затруднительно. Следовательно, определить все пус-

тоты (даже значительного объема) с помощью методов гравиразведки в условиях сложной геометрии области  $D$  не представляется возможным.

Вместе с тем, для определения характеристик эволюционных пустот, при наличии систематических гравиметрических измерений, не требуется решения уравнения (1), а значит, и СЛАУ(2). Покажем это. Прежде всего, допустим, что в  $D$  может быть только одна эволюционирующая пустота в данный момент наблюдения. Точнее, может быть сколь угодно эволюционирующих пустот, но область  $D$  можно разбить на непересекающиеся подобласти, например,  $R$  и  $S$ , такие, что  $D = R \cup S$ ,  $R \cap S = \emptyset$ . Причем, разбиение выполнено таким образом, чтобы сила тяжести эволюционирующих пустот области  $S$  во всех точках области  $R$  была существенно ниже абсолютной погрешности используемого гравиметра, скажем, на порядок, и наоборот. В этих условиях области  $R$  и  $S$  можно анализировать совершенно независимо. Последнее условие практически всегда выполнено в силу достаточной редкости возникновения явления эволюции пустот и их разной скорости движения [1]. Но наиболее вероятно, что вся область  $D$  имеет только одну эволюционирующую полость.

Проведем дискретизацию уравнения (1) несколько иначе, чем ранее. Снова разобьем область  $D = \cup D_i$  на  $N$  непересекающихся ячеек таким образом, чтобы в данный момент эволюционирующая полость находилась полностью только в одной ячейке  $D_i$  и целиком ее занимала. Ячейки могут быть и неоднородными по плотности, в том числе могут содержать и пустоты, но только стационарные. Зафиксируем  $N$  точек наблюдения  $M_j$  на дневной поверхности, в которых будут постоянно производиться измерения нормальной силы тяжести.

Для учета нестационарного характера процесса уравнение (1) следует переписать в виде эволюционного:

$$G \int_D (z - z_j) \cdot \rho(x, y, z, T) / R^3 \cdot dV = F_z(x_j, y_j, z_j, T). \quad (3)$$

На первый взгляд, задача только существенно усложнилась. Однако траектория эволюционирующей полости занимает ничтожную часть области  $D$ , что позволяет существенно упростить решение (3). Выберем фиксированные моменты времени  $T_k$ . В каждый момент времени  $T_k$  измеряется величина нормальной силы тяжести в точках наблюдения  $M_j$ , всегда в одних и тех же.

Будем считать, что плотность среды в любые моменты времени  $T_k$  и  $T_{k+1}$  меняется только в ячейках  $D_k$  и  $D_{k+1}$ , в остальных ячейках плотности остаются неизменными. Также необходимо, чтобы траектория эволюционирующей полости в дискретные моменты времени  $T_k$  представляла собой подмножество ячеек. Заметим, что в этом случае дискретизация носит виртуальный характер, реальное разбиение на ячейки нам неизвестно и не нужно,

оно необходимо только для теоретического анализа уравнения (3).

Таким образом, мы принимаем, что полости не настолько велики и ячейки настолько непрочны, чтобы сразу вызвать обрушение в нескольких или же во всех ячейках, а обрушение в каждый момент времени  $T_k$  всегда происходит только в одной новой ячейке, либо ни в одной, тогда полость неподвижна. Причем порода из новой обрушившейся ячейки перетекает в старую ячейку, объем старой ячейки равен объему новой, плотности породы в ячейках также совпадают, но ячейки не обязательно движутся строго вертикально. Предположения о характере этого процесса подтверждаются фундаментальным исследованием [1]. Оказывается, в реальности ячейка имеет определенный запас прочности за счет механических свойств горных пород, из которых состоит свод ячейки. Этот запас прочности уменьшается постепенно, под воздействием внешних причин, карьерных взрывов, прежде всего. Именно этим и объясняется постепенный характер эволюции полости, а не ее полное и мгновенное катастрофическое обрушение. Это главное предположение предлагаемой модели и метода расчета.

Будем также считать известной усредненную плотность среды  $\rho_c$ . Если ячейка  $D_p$  достаточно удалена от дневной поверхности, то плотность среды в ячейке можно считать однородной и равной  $\rho_c$ , вариации плотности породы не существенны для расчета параметров эволюционирующей полости. Влиянию вариаций плотности среды на решение уравнения (1) была посвящена работа [7].

Обозначим:  $F_{JK}$  величину нормальной силы тяжести в точке наблюдения  $J$  в момент времени  $K$ .

Теперь запишем (3) для дискретных моментов времени  $T_k$

$$G \cdot \int_D (z - z_j) \cdot \rho(x, y, z, T_k) / R^3 \cdot dV = F_{JK}. \quad (4)$$

Выберем два момента времени, начальный момент  $T_Q$  и конечный момент  $T_P$ , причем  $T_Q < T_P$ .

Вычтем уравнение (4) для момента времени  $T_Q$  из уравнения (4) для момента времени  $T_P$ . Обозначим:

$$I_P = G \cdot \int_D (z - z_j) \cdot \rho(x, y, z, T_P) / R^3 \cdot dV = F_{JP}; \quad (5)$$

$$I_Q = G \cdot \int_D (z - z_j) \cdot \rho(x, y, z, T_Q) / R^3 \cdot dV = F_{JQ}. \quad (6)$$

В результате получим:

$$I_P - I_Q = F_{JP} - F_{JQ}. \quad (7)$$

Проанализируем структуру интегралов (5), (6) и их разности (7). Для всех ячеек, кроме ячеек  $D_p$  и  $D_Q$  величина плотности осталась неизменной согласно предыдущему. Поэтому в (7) интегралы по всем этим ячейкам не войдут. Остаются только две ячейки  $D_p$  и  $D_Q$ , положение и величина которых неизвестны. В момент времени  $T_Q$  ячейка  $D_p$  будет заполнена, а  $D_Q$  будет содержать полость, которую будем считать совпадающей со всей ячейкой. В мо-

мент времени  $T_p$  все будет наоборот. Теперь предположим, что в начальный момент времени  $T_Q$  полость пребывает на столь большой глубине, что величина нормальной силы тяжести от нее на дневной поверхности во всех точках наблюдения существенно ниже абсолютной погрешности используемого гравиметра, например, на порядок. Это второе предположение предлагаемой модели расчета. Тогда величинами  $I_Q$  и  $F_{JQ}$  в (7) можно пренебречь. Кроме того, влиянием всей неподвижной среды также можно пренебречь. В этих условиях можно представить движение полости в виде движения некоторого объема отрицательной плотности, равной  $-\rho_c$ .

При этих условиях (7) сводится к решению упрощенного интегрального уравнения первого рода:

$$G \cdot \int_{D_c} (z - z_j) \cdot (-\rho_c) / R^3 \cdot dV = F_{JP}. \quad (8)$$

В первом приближении влияние удаленного однородного тела с известной плотностью можно заменить однородным шаром, центр которого совпадает с центром тяжести тела [2, 11]. Исходя из этого, уравнение (8) может еще более упрощено. Таким образом, уравнение (8) было сведено к определению положения центра и радиуса шара известной плотности по результатам измерений нормальной силы тяжести на дневной поверхности. Действительно, правая часть уравнения (8) представляет собой первую конечную разность нормальной силы тяжести между текущим моментом и фиксированным "нулевым" моментом  $T_Q$ , когда влияние полости на показания гравиметра было исчезающе мало. В силу этого притяжение любых неподвижных областей, принадлежащих  $D$ , как однородных, так и неоднородных, не влияет на решение. Поэтому наличие стационарных полостей, и даже полостей, которые эволюционируют, но с существенно меньшей скоростью, не влияет на правую часть (8), так как они входят как в  $F_{JP}$ , так и в  $F_{JQ}$  и взаимно вычитаются.

Однако даже упрощенная задача (8) при наличии существенных ошибок измерений нормальной силы тяжести на дневной поверхности является также непростой для численного решения. Напомним, что реальная абсолютная погрешность эксплуатируемого гравиметра довольно высока – 0,03 мГал. Это главный источник ошибок решения (8).

Таким образом, для определения параметров эволюционной полости необходимо решить следующую задачу. На дневной поверхности заданы  $N$  фиксированных точек наблюдения, координаты которых известны. В этих точках систематически, в заданные моменты, измеряется нормальная составляющая силы тяжести  $V_J, J=1, N$ . Кроме того, заданы абсолютная погрешность измерений и средняя плотность среды  $\rho_c$ . Требуется определить по результатам наблюдений, имеется ли эволюционирующая пустота и ее параметры: объем и координаты центра тяжести в данный момент.

Нормальная составляющая силы притяжения в точке наблюдения  $M_J(x_J, y_J, z_J)$  от однородного

шара радиуса  $r$  и плотности  $\rho$ , центр которого расположен в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , определяется [11]:

$$F_Z(x_J, y_J, z_J) = G \cdot \pi \cdot 4 / 3 \cdot \rho \cdot (z_0 - z_J) \cdot r^3 / R_J^3.$$

Здесь  $R_J$  – расстояние между точками  $M_0$  и  $M_J$ .

Обозначим

$$Q_J = 3 \cdot F_Z(x_J, y_J, z_J) / (4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot G). \quad (9)$$

Таким образом, нужно решить систему нелинейных уравнений:

$$(z_0 - z_J) \cdot r^3 / R_J^3 = Q_J, J=1, N, \quad (10)$$

считая неизвестными координаты центра шара  $x_0, y_0, z_0$  и его радиус  $r_0$ , причем, число точек наблюдения  $N$ , а значит и уравнений в системе (10) велико, как правило, 50–100 и более. Следовательно, система (10) является переопределенной нелинейной системой уравнений.

На геометрию точек наблюдения не накладываются никаких ограничений: они могут находиться не обязательно в одной плоскости, все могут быть расположены на одной прямой и так далее. К затрудняющему решению (10) относится то обстоятельство, что расстояние  $\sqrt{(x_J - x_0)^2 + (y_J - y_0)^2}$  между точкой наблюдения  $M_J$  и проекцией центра шара на дневную поверхность, как правило, велико. Это связано с тем, что в условиях карьера не всегда можно найти удобную точку наблюдения для выполнения измерений. Но основная сложность решения системы (10) в том, что правая часть системы  $Q_J$  известна со значительной погрешностью.

Для решения (10) был применен нелинейный метод наименьших квадратов. Численные эксперименты показали, что систему (10) целесообразно решать в два этапа. Выберем среди всех точек наблюдения такую точку наблюдения, где величина  $Q_J$  будет максимальной, пусть это будет точка с номером  $M$ . Вычислим  $P_J = [R_J^2 \cdot (z_0 - z_M)] / [R_M^2 \cdot (z_0 - z_J)]$ . Таким образом, для решения системы (10) необходимо найти минимум функции

$$S(x_0, y_0, z_0) = \sum_{J=1}^N [Q_J / Q_M - P_J]^2. \quad (11)$$

Отметим достоинства функции (11) в плане минимизации. Благодаря тому, что рассматривается отношение величин  $Q_J / Q_M$ , относительная погрешность данных функции снижается, так как мы делим на максимальную по модулю величину измерений. Что еще существенней, в выражение (11) не входит величина радиуса шара, а только координаты его центра, от которых зависят, в частности, переменные  $R_J, R_M$ .

Минимум (11) будем искать с помощью метода безусловного градиента [10]. Область  $D$  определим в виде прямоугольного параллелепипеда. В численных экспериментах его размеры принимались равными 600x800x200 метров. Эти размеры важны только для выбора начальной точки приближения к решению, которую выбираем случайным образом, так чтобы она принадлежала области  $D$ .

После чего производим минимизацию (11) по формулам:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i - a \cdot \text{grad}_x(S_i), \\ Y_{i+1} &= Y_i - a \cdot \text{grad}_y(S_i), \\ Z_{i+1} &= Z_i - a \cdot \text{grad}_z(S_i). \end{aligned} \quad (12)$$

Как показали численные эксперименты, качество процесса минимизации (12) функции (11) невелико, точки минимума функции не расположены близко от заданных в эксперименте. Это связано, прежде всего, с большими ошибками измерений нормальной силы тяжести. Поэтому для повышения качества минимизации процесса (12) он производился многократно. Результирующие точки минимума (11) выбирались двумя способами:

1) выбирались такие значения  $x_0, y_0, z_0$ , при которых (11) принимает абсолютное минимальное значение среди всех многократных попыток минимизации (12);

2) результаты многократных попыток минимизации (12) усреднялись.

Далее, из двух полученных точек минимума выбиралась точка с минимальным значением величины:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \left( \sum_{j=1}^N G \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r_0^3 (z_0 - z_j) / R_j^3 - V_j \right)^2. \quad (13)$$

Величина  $U(x_0, y_0, z_0)$  представляет собой сумму квадратов уклонений решения от результатов измерений в точках наблюдения.

В конце первого этапа решения задачи по известным координатам центра шара находим радиус шара  $r_0$  по величине измерений нормальной силы тяжести в точке с номером  $M$ . Напомним, эта точка наблюдения, где величина  $Q_i$  будет максимальной, а значит и относительная погрешность измерений будет минимальной.

Следует отметить, что далеко не всегда точка абсолютного минимума 1) функции (11) была предпочтительнее усредненной точки 2). Очевидно, что таким образом сказывается влияние погрешностей измерения величины нормальной силы тяжести. На первом этапе оптимизации практически всегда довольно точно определяется радиус шара, но координаты его центра можно уточнить, в этом и состоит второй этап оптимизации.

Обозначим

$$T_j = 3 \cdot F_z(x_j, y_j, z_j) / (4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot G \cdot r_0^3). \quad (14)$$

Далее, будем минимизировать другую функции, которая подобна функции (11), но более благоприятна для оптимизации:

$$W(x_0, y_0, z_0) = \sum_{j=1}^N [T_j / T_M - P_j]^2. \quad (15)$$

Величины  $T_j$  вычисляются по формуле (14). Величина  $T_M$  выбирается таким же образом, как и в (11), то есть номера  $M$  в (11) и (15) совпадают. Минимизация (15) аналогична (11), кроме выбора начальной точки. Начальная точка для (15) выбирается уже вблизи минимума функции (11). Процесс минимизации (15) подобен (11).

В результате получаем две точки минимума – решения задач (11) и (15). Выбираем ту из них, в которой (13) принимает минимальное значение.

Следует заметить, что примерно в 40 % случаев минимум достигался на первом этапе, в остальных – на втором, поэтому второй этап не может быть отброшен без ущерба для точности решения.

Для проверки работы предложенной модели был поставлен ряд численных экспериментов. Прежде всего, было необходимо смоделировать процесс измерений с заданной абсолютной погрешностью. Будем считать, что погрешности измерений имеют нулевое математическое ожидание и распределены по нормальному закону. Для моделирования нормальной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и средней квадратичной ошибкой  $\delta$  воспользуемся преобразованием Бокса–Мюллера. Этот метод служит для моделирования стандартных нормально распределённых случайных величин по равномерно распределённым величинам. Определим:

$$\begin{aligned} z_0 &= \delta \cos(2\pi\varphi) \sqrt{-2 \ln(r)}, \\ z_1 &= \delta \sin(2\pi\varphi) \sqrt{-2 \ln(r)}. \end{aligned}$$

Тогда  $z_0$  и  $z_1$  будут независимы и распределены нормально с математическим ожиданием 0 и дисперсией  $\delta$ . Для моделирования ошибки достаточно одной этих двух величин. Погрешность измерений  $\delta$  могла изменяться в экспериментах. Далее, задавалась геометрия системы наблюдения – координаты точек наблюдения  $M_j(x_j, y_j, z_j)$ . Точки наблюдения для простоты выбирались в плоскости  $z=0$ , вдоль четырех прямых, параллельных оси ОХ, по всей длине области  $D$ , т.е. каждая линия наблюдения составляет 600 м. Число таких линий варьировалось в экспериментах от 2 до 4. На каждой линии точки наблюдения выбирались равномерно, число их менялось от 10 до 50. Но никаких ограничений на геометрию системы наблюдений в предлагаемом алгоритме не накладывается.

Прежде всего, было необходимо численно исследовать при заданной погрешности измерений, и геометрии наблюдения возможность определения параметров шара. В качестве примера рассмотрим задачу определения шара радиусом  $R=25$ м, координаты центра  $x_0=40$ м,  $y_0=60$ м,  $z_0=-100$ м, абсолютная погрешность измерений  $\delta$  равна 0,03 мГал. Для решения были задействованы три линии наблюдения, все точки наблюдения расположены равномерно на прямых дневной поверхности, которые проходят параллельно оси Х. Первая линия наблюдения имеет координату  $Y=120$ , на ней 40 точек наблюдения, на второй с координатой  $Y=150$  – 30 точек, и третья  $Y=180$  – 20 точек.

Было получено приближенное решение:  $x_p = 40,13$  м,  $y_p = 63,17$  м,  $z_p = -95,03$  м,  $R_p = 24,71$  м. Особенно следует отметить, что значение суммы квадратов уклонений (13) для точного решения равно  $S_0 = 1,095824 \cdot 10^{-3}$ , а для приближенного  $S_p = 1,084474 \cdot 10^{-3}$ , т.е. найденное приближение точнее удовлетворяет результатам измерений, чем точное решение, заданное в численном эксперименте. Это объясняется большой погрешностью измерений, и типично для проведенных экспериментов.

Рассмотренная задача достаточно трудна для численного решения. Дело в том, что полость расположена сбоку от всех точек измерений, но именно такая ситуация и характерна для рассматриваемого класса задач.

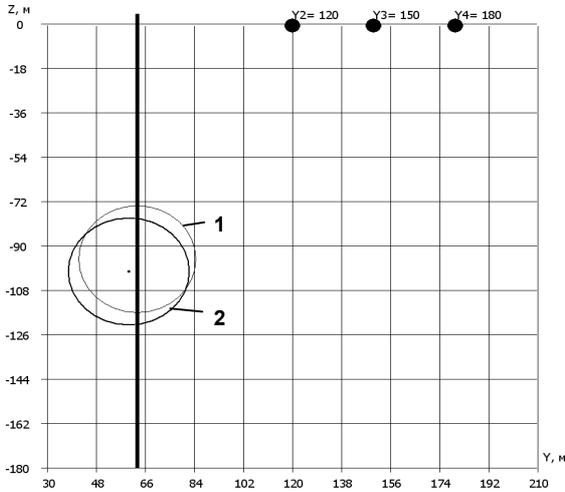


Рисунок 1 – Вертикальное сечение области D, проходящее через центр заданного шара:  
1 – расчетное решение, 2 – точное

На рис. 1 приведена графическая иллюстрация решения – вертикальное сечение, проходящее через точку  $x_0=40$ м (центр заданного шара). На рисунке показано, что вертикальная скважина, пробуренная через центр расчетного шара, пересечет и заданный первоначально в эксперименте (точное решение). Это решающий критерий качества решения.

На рис. 2 показано горизонтальное сечение области D, проходящее через центр заданного первоначально шара (точное решение), полученное в том же расчете.

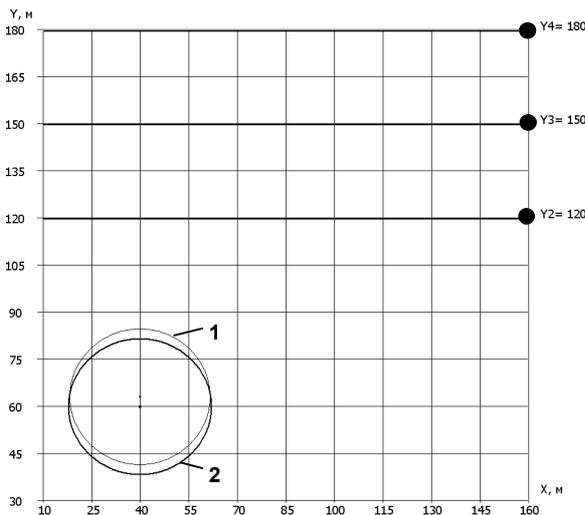


Рисунок 2 – Горизонтальное сечение обл. D, проходящее через центр заданного шара: 1 – расчетное решение, 2 – точное

На рис. 3 приведены результаты итоговых численных экспериментов. Целью этого численного эксперимента было изучение влияния погрешности гравиметра и параметров системы наблюдения на достоверность определения параметров эволюционирующей полости.

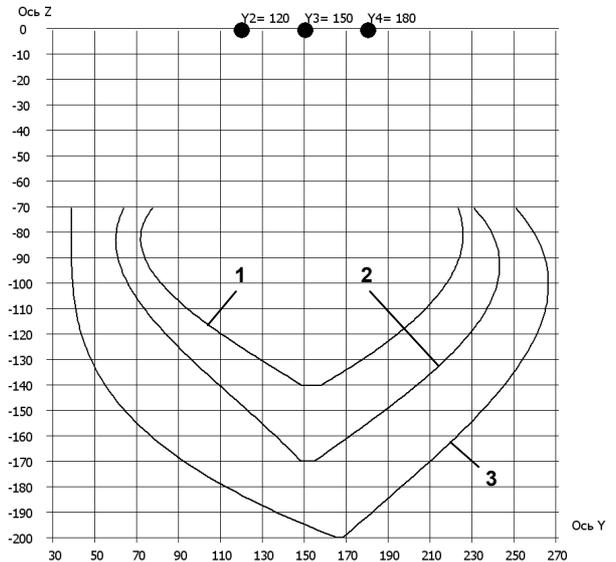


Рисунок 3 – Геометрия области достоверного определения параметров шара при абсолютной погрешности гравиметра:

1 – 0,03 мГал; 2 – 0,02 мГал; 3 – 0,01 мГал

Для различных уровней погрешностей  $\delta = (0,03, 0,02 \text{ и } 0,01 \text{ мГал})$  были рассчитаны зоны V точного определения параметров шара с вероятностью  $P=100\%$ . Были использованы следующие параметры системы наблюдения: первая линия наблюдения имеет координату  $Y=120$ , на ней 20 точек, на второй – с координатой  $Y=150 - 10$  точек, третья  $Y=180 - 20$  точек.

Очевидно, что теоретически область V в этом случае должна иметь вертикальную линию симметрии  $Y=150$ . Для расчета был выбран шар радиусом 25м, центр которого имел фиксированную координату  $X_c=40$ , а остальные координаты были произвольными.

В качестве критерия принадлежности области V точки  $M_i$  выбирался следующий. Задавалась погрешность измерения  $\delta$  и геометрия измерительной системы. Для точки  $M_i$  выполнялось  $K=20$  вариантов расчета параметров шара и определялись приближенные значения  $x_p, y_p, z_p, R_p$ . Если приближенное решение удовлетворяло условиям:  $\sqrt{(x_p - x_0)^2 + (y_p - y_0)^2} < 0.9 \cdot R_0$  (условие того, что шар определяется вертикальным бурением) и  $|z_0 - z_p| < R_0$ , то такое решение считалось приемлемым и полагалось, что  $M_i \in V$ .

Количество численных экспериментов, закончившихся успешно, обозначим через  $K_1$ . Следовательно, вероятность успешного определения параметров шара приближенно равна  $K_1/K$ . Обозначим

то, что вероятность определения параметров шара, центр которого размещен в точке  $M$ , равна  $P_i$ , как  $P(M)=P_i$ .

Форма области  $V$  определялась как результат пересечения фиксированных горизонтальных прямых  $Z_c = const$  с границей области  $V$ . Для этого выбиралось множество горизонтальных прямых  $Z_c = const$ , координаты которых кратны пяти, расчет начинался с нижней границы области  $V$ ,  $Z_c = -250$ м. Для этой глубины нормальная сила тяжести от заданного шара в точках наблюдения на поверхности существенно меньше погрешности гравиметра.

На прямой  $Z_c$  первоначально выбирались три точки: наиболее близкая к центру измерительной системы точка  $M_{OPT}(X_c, Y_{OPT}, Z_c)$ , координата  $Y$  которой вычислялась по формуле:  $Y_{OPT} = \sum_{i=0}^N K_i \cdot Y_i / \sum_{i=1}^N K_i$ , начальная крайняя левая точка  $M_L(X_c, Y_L, Z_c)$ , где  $Y_L = Y_N = -400$  и начальная крайняя правая точка  $M_P(X_c, Y_P, Z_c)$ , где  $Y_P = Y_K = 400$ . Предполагалось, что в точке  $M_{OPT}(X_c, Y_{OPT}, Z_c)$  наилучшие условия для определения параметров шара. Если  $P(M_{OPT}) < P_i = 100$ , то данная прямая расположена ниже области  $V$ , и не рассматривалась. Точки  $M_L(X_c, Y_L, Z_c)$  и  $M_P(X_c, Y_P, Z_c)$  выбраны так, что в них параметры шара правильно определить невозможно, то есть  $P(M_L) = 0$  и  $P(M_P) = 0$ .

Каждая горизонтальная прямая  $Z_c$  пересекает границу области  $V$  в двух точках, правой и левой, с координатами  $M_1(X_c, Y_1, Z_c)$  и  $M_2(X_c, Y_2, Z_c)$ . Эти точки будем искать методом половинного деления. Первоначально положим  $M_{L1} = M_L$ ,  $M_{L2} = M_{OPT}$ ,  $M_{P1} = M_{OPT}$ ,  $M_{P2} = M_P$ . Ясно, что  $M_1 \in [M_{L1}, M_{L2}]$ ,  $M_2 \in [M_{P1}, M_{P2}]$ . Определим  $M_{LC} = (M_{L1} + M_{L2}) / 2$ ,  $M_{PC} = (M_{P1} + M_{P2}) / 2$ . Определим  $P(M_{LC})$  и  $P(M_{PC})$ . Если  $P(M_{LC}) < P_i = 100$ , то следует положить  $M_{L1} = M_{LC}$ , иначе  $M_{L2} = M_{LC}$ , расчет ведется до тех пор, пока  $|M_{L1} - M_{L2}| < \varepsilon$ . В расчете в качестве  $\varepsilon$  выбиралось значение 3м. Аналогичные расчеты позволяют определить и правую точку области  $M_2$ . Располагая значениями  $M_1$  и  $M_2$  для предыдущей горизонтальной прямой  $Z_c$  для ускорения расчетов при переходе на следующую прямую  $Z_c + 5$  можно выбирать более оптимально точки  $M_L(X_c, Y_L, Z_c)$  и  $M_P(X_c, Y_P, Z_c)$ . Обозначим через  $M_L = M_1 - H_y$ ,  $M_P = M_2 + H_y$ , в расчете было выбрано  $H_y = 40$ м.

Площади областей  $V$  с погрешностями 0,03, 0,01 и 0,01 мГал равны соответственно 7595, 12418 и 21710 кв. метров и примерно пропорциональны абсолютной погрешности измерений.

Окончательная геометрия областей, которые показаны на рис. 3, была получена при помощи метода наименьших квадратов (МНК), где независимой

переменной является  $Z$ . Для правой и левой границы области  $V$  аппроксимация МНК строилась отдельно. Некоторая несимметричность правой и левой границ вызвана погрешностями измерений и расчета. Для большей точности построения геометрии области следует увеличить параметр  $K$  – число вариантов расчета в одной точке. Но даже и в этих условиях расчет всех трех областей  $V$  по предложенному алгоритму занял существенное время, порядка 32,5 часов машинного времени.

Следует заметить, что предлагаемые алгоритмы могут быть распараллелены. Действительно, основной расчет вариантов может вестись абсолютно параллельно, даже расчеты по минимизации (11) и (14) независимы друг от друга. Поэтому время счета практически обратно пропорционально числу используемых процессоров, что является большим преимуществом предлагаемых алгоритмов.

#### ВЫВОДЫ.

1) Предложен метод обнаружения большого класса эволюционирующих полостей на основании решения упрощенных интегральных уравнений первого рода. Получены расчетные формулы предлагаемого метода.

2) Предложен эффективный алгоритм расчета параметров эволюционных полостей при наличии высокой абсолютной погрешности измерений.

3) Проведены численные эксперименты для изучения эффективности предложенных алгоритмов по определению эволюционных полостей при различных уровнях погрешности и конфигурациях измерительной системы.

4) На основе предложенных алгоритмов реализован способ расчета геометрии области, в каждой точке которой можно было бы определить все параметры шара с заданной вероятностью  $P$ . Произведены численные эксперименты для подтверждения эффективности алгоритма такого решения.

5) Показано, что предложенные алгоритмы могут быть распараллелены. Это является существенным преимуществом предлагаемых методов.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Сазонов В.А., Сосик Д.И. Геофизика в маркшейдерском деле. – М.: Недра, 1989. – 120 с.
2. Гравиразведка. Справочник геофизика / Под ред. Мудрецов Е.А. – М.: Недра, 1990. – 608 с.
3. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
5. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. – Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1996. – 322 p.
6. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.
7. Козикова Т.П., Смолянский П.С. Адаптивный способ решения обратной задачи гравиразведки для двухкомпонентной среды // Математическое моделирование. – 2013. – № 1 (28). – С. 35–39.

8. Смолянський П.С., Козикова Т.П., Исследования математических методов решения гравиметрической задачи для локализации пустот // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. –2013. – Вип. 4/2013 (81). – С. 69–75.

9. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К.: Наукова думка, 1978. – 228 с.

10. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.

11. Маловичко А.К., Костицын В.И. Гравиразведка. – М.: Недра, 1992. – 357 с.

## NUMERICAL METHODS FOR THE LOCALIZATION OF MOVING VOIDS

**T. Kozikova, P. Smolyanskii**

Kriviy Rig National University

vul. Lermontova, 13/48, Kriviy Rig, 50002, Ukraine. E-mail: tayadubinina2008@yandex.ru

Nowadays detecting anthropogenic or natural voids is becoming an urgent problem, moving voids, i. e. those changing their position, being the most hazardous. The classical solution of the problem results in multidimensional integral equations for unknown density of diffused sources of gravitational anomalies. It is demonstrated that the traditional solution of such multidimensional integral equations is rather a complicated task even for simplified environments. The authors suggest the method of detecting a new class of moving voids based on solving modified integral equations of the first kind. Numerical experiments have been carried out to study efficiency of the suggested algorithms. It is also shown that the suggested algorithms can be parallelized that is a significant advantage of the methods.

**Key words:** moving voids, gravitational prospecting, discretization, void localization, approximation, inverse ill-conditioned problem, integral equations of the first kind.

## REFERENCES

1. Sazonov, V.A., Sosikov, D.I. (1989), *Geofizika v marksheyderskom dele* [In geophysics surveying business], Nedra, Moscow, Russia.

2. Mudretsova, E.A. (1990) *Gravitatsiya. Spravochnyk geofizika* [Gravity. Directory of geophysics], Nedra, Moscow, Russia.

3. Tikhonov, A.K., Goncharky, A.V., Stepanov, V.V., Yagola, A.G., (1990) *Chislennye metody resheniya nekorektnih zadach* [Numerical methods for solving ill-posed problems], Nauka, Moscow, Russia.

4. Tikhonov, A.V., (1979) *Chislennye metody resheniya nekorektnih zadach* [Methods for solving ill-posed problems], Nauka, Moscow, Russia.

5. Engl, H.W., Hanke, M., Neubauer, A., (1996) *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Netherlands.

6. Verlan, A.F., Sizikov, V.S., (1986) *Metodi integralnikh rivnyan, algoritmi i programi* [Integral equation methods, algorithms and programs], Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.

7. Kozikova, T.P., Smolyanskii, P.S. (2013) "An adaptive method for solving the inverse problem for the

two-gravity environment", *Mathematical modeling*, no. 1 (28), pp. 35–39.

8. Smolyanskii, P.S., Kozikova, T.P., (2013) "Investigation of mathematical methods for solving the gravity problem for localization of voids", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, no. 4 (81), pp. 69–75.

9. Starostenko, V.I., (1978) *Stoykost chislennikh metodov v zadachakh gravitacii* [Stability of numerical methods in problems of gravity], Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.

10. Vasilev, F.P., (1980), *Chislennye metody resheniya ekstremalnikh zadach* [Numerical methods for solving extremal problems], Nauka, Moscow, Russia.

11. Malovichko, A.K., Kostitsyn, V.I., (1992) *Gravitatsiya*[Gravity], Nedra, Moscow, Russia.

Стаття надійшла 27.02.2015.