

УДК 621.316.1

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИНХРОННИХ ДВИГУНІВ НА ПОСТІЙНИХ МАГНІТАХ ДЛЯ СИНТЕЗУ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ВИСОКОЕФЕКТИВНИМИ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ**П. Г. Плешков, І. В. Савеленко**

Кіровоградський національний технічний університет

просп. Університетський, 8, м. Кіровоград, 25006, Україна. E-mail: ivan.savelenko@gmail.com

А. В. Некрасов

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: ke@kdu.edu.ua.

Системи автоматичного керування електроприводами змінного струму, в тому числі і електроприводами на основі синхронних двигунів з постійними магнітами, у своїй більшості є нелінійні. Синтез класичних систем підпорядкованого керування для таких об'єктів вимагає вирішення питання врахування нелінійності електричних параметрів об'єкту керування, збурень, викликаних зміною моменту, похибками в каналах керування та ін. Все це підвищує складність синтезу систем автоматичного керування електроприводами та знижує ефективність їх роботи. Одним зі шляхів вирішення даної проблеми є синтез законів керування електроприводами змінного струму на основі теорії розривних керувань, а саме, шляхом застосування законів оптимального релейного керування. Застосування таких систем автоматичного керування дозволить покращити точність керування, а також забезпечити прийнятні показники якості перехідного процесу, що безумовно призведе до підвищення продуктивності електроприводів на основі синхронних двигунів з постійними магнітами. В зв'язку з тим, що система з релейним елементом є за своєю суттю дискретною імпульсною системою, то для вирішення задачі синтезу системи оптимального релейного керування найдоцільніше мати математичну модель об'єкта керування в дискретній формі. Розроблені дискретні математичні моделі синхронного двигуна з постійними магнітами в просторових $d-q$ координатах на основі методики перетворення рівнянь неперервних процесів у різниці рівняння і рівняння в Z -формі, а також отримані авторами дискретні передаточні функції для контурів струму та швидкості дозволяють реалізувати методики синтезу систем автоматичного оптимального релейного керування електроприводом із синхронними двигунами на постійних магнітах.

Ключові слова: системи автоматичного керування, релейні системи, синхронні двигуни на постійних магнітах.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ ДЛЯ СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЫСОКОЭФЕКТИВНЫМИ ЭЛЕКТРОПРИВОДАМИ**П. Г. Плешков, И. В. Савеленко**

Кіровоградський національний технічний університет

просп. Університетський, 8, м. Кіровоград, 25006, Україна. E-mail: ivan.savelenko@gmail.com

А. В. Некрасов

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

ул. Первомайская, 20, г. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: ke@kdu.edu.ua

Системи автоматичного управління електроприводами переменного тока, в том числе и электроприводы на основе синхронных двигателей с постоянными магнитами, в своем большинстве нелинейны. Синтез классических систем подчиненного управления для таких объектов требует учета нелинейности электрических параметров объекта управления, возмущений, вызванных изменением момента, погрешностями в каналах управления и др. Все это повышает сложность синтеза систем автоматического управления электроприводами и снижает эффективность их работы. Одним из путей решения данной проблемы является синтез законов управления электроприводами переменного тока на основе теории разрывных управлений, а именно путем применения законов оптимального релейного управления. Применение данных систем позволит улучшить точность управления, обеспечит приемлемые показатели качества переходного процесса, а также приведет к повышению производительности электроприводов на основе синхронных двигателей с постоянными магнитами. В связи с тем, что система с релейным элементом является по своей сути дискретной импульсной системой, то для решения задачи синтеза системы оптимального релейного управления целесообразно иметь математическую модель объекта управления в дискретной форме. Разработанные дискретные математические модели синхронного двигателя с постоянными магнитами в пространственных $d-q$ координатах на основе методики преобразования уравнений непрерывных процессов в разностные уравнения и уравнения в Z -форме, а также полученные авторами дискретные передаточные функции для контуров тока и скорости позволяют реализовать методики синтеза систем автоматического оптимального релейного управления электроприводом с синхронными двигателями на постоянных магнитах.

Ключевые слова: системы автоматического управления, релейные системы, синхронный двигатель на постоянных магнитах.

АКТУАЛЬНІСТЬ РАБОТИ. Сучасний автоматизований електропривод є складною електро-механічною системою, що складається із регулятора і об'єкта керування (рис. 1), який в більшості випа-

дків виявляється нелінійним.

Процес регулювання полягає в тому, що регулятор перешкоджає будь-яким відхиленням об'єкту керування від заданого стану, що виникають в ре-

зультаті впливу збурень і зміни задаючої дії [1, 2].

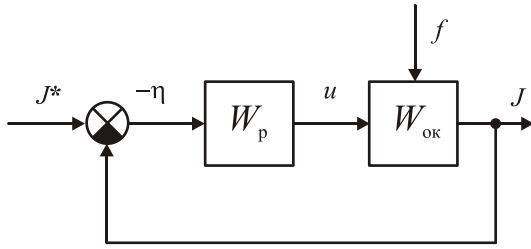


Рисунок 1 – Узагальнена структурна схема регулювання напруги в електричній мережі із глухозаземленою нейтраллю

На рис. 1: W_p – передаточна функція регулятора; $W_{ок}$ – передаточна функція об’єкту керування; f – збурення; J^* – сигнал задаючої дії; J – вихідний сигнал системи автоматичного керування; $\eta = J^* - J$ – помилка керування; u – сигнал керування.

Залежно від наявності зовнішніх впливів на систему автоматичного керування (САК) усі САК можуть бути поділені на автономні і неавтономні. В автономних САК зовнішні впливи відсутні. В неавтономних САК існують залежні від часу зовнішні впливи.

У нелінійних САК найбільш характерними є два процеси – рівновага і стійкі автоколивання, тому для таких систем розглядаються різні поняття стійкості:

- стійкість рівноваги;
- стійкість автоколивань;
- стійкість процесу, що обумовлений зовнішнім впливом для неавтономних систем.

Прагнення застосувати для аналізу нелінійних систем методи [3, 4], аналогічні методам дослідження лінійних систем, призвело до введення поняття збуреного та незбуреного руху системи.

До САК електроприводом висуваються різні вимоги, що витікають із конкретних умов їх роботи. Тим не менш можна виділити невелике число вимог, які відносяться практично до всіх САК – стійкість, швидкодія і точність. Остання вимога відноситься як до усталеного режиму, так і до перехідного процесу. В усталеному режимі точність визначається усталеною похибкою, а в перехідному процесі – величиною відхилення дійсного значення регульованої величини від заданого.

Із теорії автоматичного керування відомо, що збільшення коефіцієнту підсилення системи призводить до зниження усталеної похибки. Тому з точки зору усталеної точності бажано змінити коефіцієнт підсилення, в тому числі необмежено збільшити його без порушення стійкості системи.

В найпростіших одноконтурних системах збільшення коефіцієнту підсилення призводить до зниження стійкості [5, 6].

Для синтезу релейного регулятора необхідна розробка дискретних математичних моделей для СДПМ. Вирішення таких моделей доцільно викону-

вати в $d-q$ координатах за допомогою диференціальних рівнянь Парка–Горєва.

Мета роботи – створення математичних моделей для синтезу релейного регулятора в електроприводах синхронних двигунів середньої та великої потужності на постійних магнітах.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Згідно з теорією синтезу структур, стійких при необмеженому коефіцієнту підсилення [5, 6], стійкість САК може бути досягнута при необмежено великому коефіцієнту підсилення в багатоконтурних системах, що задовольняють певним структурним умовам якості [7, 8].

Такими властивостями володіють системи, регулятори яких побудовані за принципом мінімізації функціоналів квадратичних критеріїв якості виду:

$$J = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a\eta_k^2 + cU^2 \right) dt. \quad (1)$$

При $c \rightarrow 0$ лінійні регулятори таких систем трансформуються в релейні, для яких критерій якості має вигляд:

$$J = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^n a\eta_k^2 dt. \quad (2)$$

Таким чином, можлива побудова систем з релейними регуляторами, що забезпечують стійкість і задані показники регулювання.

У релейних системах при середніх значеннях сигналу на вході рівному нулю, релейний елемент під дією зворотних зв’язків, що охоплюють його спільно з окремими ділянками лінійної частини [9], перемикається з високою частотою із одного стійкого стану в інший, тобто така система забезпечує орбітальну асимптотичну стійкість. Такий режим називається ковзним, а значення сигналу на виході по абсолютній величині менше максимального і дорівнює одному із стійких станів.

В ковзному режимі релейна система володіє властивостями лінійної системи з нескінченно великим коефіцієнтом підсилення [4, 10]. Перш за все, такі системи володіють властивістю інваріантності по відношенню до зовнішніх збурень. На рис. 2 зображена система з регулюванням по відхиленню.

Для такої системи передаточна функція по збуренню при $k_n \rightarrow \infty$ рівна нулю:

$$W_3 = \frac{J(p)}{f(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_{33}(p)W_1(p)W_2(p)k_n} = 0. \quad (3)$$

В той же час передаточна функція по керуючому впливу відмінна від нуля і не залежить від параметрів $W_1(p)$, $W_2(p)$:

$$W_k = \frac{J(p)}{J^*(p)} = \frac{W_1(p)W_2(p)k_n}{1 + W_{33}(p)W_1(p)W_2(p)k_n} = \frac{1}{W_{33}(p)}. \quad (4)$$

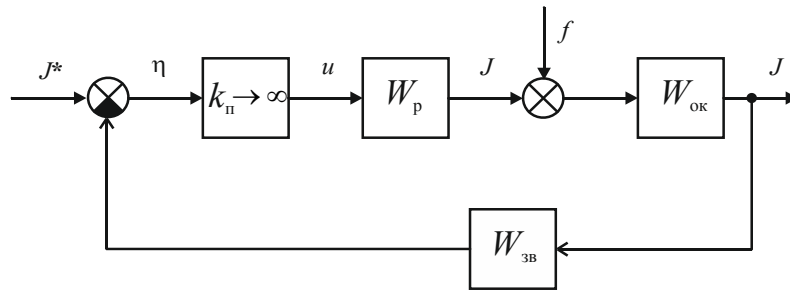


Рисунок 2 – Структурна схема приводу з СДПМ
 k_{π} – коефіцієнт підсилення; $W_{зв}$ – передаточна функція зворотного зв’язку

Це означає, що системі притаманна властивість інваріантності до зміни параметрів об’єкту керування. Таким чином, синтез релейних регуляторів, що працюють в ковзному режимі, є одним із шляхів створення високоякісних систем керування електроприводами.

Для синтезу САК такими приводами необхідно створити математичну модель СДПМ.

Рівняння Парка–Горева, записані в довільній системі координат ω_k , містять всю необхідну для вирішення задачі керування, і з допомогою елементарних перетворень можуть бути приведені до будь-якої системи координат. Один із методів перетворення зводиться до задавання величини $\omega_k = \omega_{\psi_r}$, потім визначення проекцій в новій системі координат, яка виконається звичайним способом – розкладанням вектора по координатним осям.

Система рівнянь, що описує динаміку перехідних процесів СДПМ в символічній формі:

$$\begin{cases} \dot{U}_S = \frac{d\dot{\Psi}_S}{dt} + j\omega_k \dot{\Psi}_S + I_S R_S; \\ \dot{U}_R = \frac{d\dot{\Psi}_r}{dt} + j(\omega_k - \omega) \dot{\Psi}_r + I_r R_r; \\ \dot{U}_b = \frac{d\dot{\Psi}_b}{dt} + j(\omega_k - \omega) \dot{\Psi}_b + I_b R_b. \end{cases} \quad (5)$$

Потокозчеплення СДПМ з електромагнітним збудженням і пусковими обмотками:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_S = I_S L_S + I_r L_m + I_b L_{Sb}; \\ \dot{\Psi}_r = I_S L_m + I_r L_r + I_b L_{rb}; \\ \dot{\Psi}_b = I_S L_{Sb} + I_r L_{rb} + I_b L_b, \end{cases} \quad (6)$$

де I_S – струм статора; I_r – струм пускової обмотки; I_b – струм еквівалентної обмотки збудження; L_S, L_r – індуктивності фаз статора і пускової обмотки; L_m – взаємодукація фази статора і пускової обмотки; $I_b L_{Sb}$ – величина, що характеризує потокозчеплення обмотки статора з полем постійного магніту; $I_b L_{rb}$ –

величина, що характеризує потокозчеплення пускової обмотки.

Рівняння моменту однополюсного ($p = 1$) СДПМ з трьохфазною обмоткою має вигляд:

$$M_{cq} = \frac{3}{2} \frac{L_m}{L_r \left(L_S - \frac{L_m^2}{L_r} \right)} I_m^* (\dot{\Psi}_r, \dot{\Psi}_S). \quad (7)$$

Запишемо рівняння в змінних $\dot{\Psi}_r$ і I_S . З цих рівнянь знаходимо:

$$\begin{cases} \dot{I}_r = \frac{\dot{\Psi}_r}{L_r} - \frac{I_S L_m}{L_r} - \frac{I_b L_{rb}}{L_r}; \\ \dot{\Psi}_S = L_S I_S + L_m \left(\frac{\dot{\Psi}_r}{L_r} - \frac{I_S L_m}{L_r} - \frac{I_b L_{rb}}{L_r} \right) + I_b L_{Sb}, \end{cases} \quad (8)$$

де $L'_S = L_S - \frac{L_m^2}{L_r}$; $L'_b = L_{Sb} - \frac{L_m L_{rb}}{L_r}$; $k_r = \frac{L_m}{L_r}$.

Так як вісь потокозчеплення ротора ω_{ψ_r} обертається зі швидкістю ротора ($\omega_k = \omega_{\psi_r}$), то можна записати:

$$\begin{cases} \dot{U}_S = L'_S \frac{dI_S}{dt} + k_r \frac{d\dot{\Psi}_r}{dt} + L'_b \frac{dI_b}{dt} + \\ + j \left(L'_S I_S + k_r \dot{\Psi}_r + I_b L'_b \right) \omega + I_S R_S; \\ \dot{U}_r = \frac{d\dot{\Psi}_r}{dt} + j(\omega_k - \omega) \dot{\Psi}_r + \\ + R_r \left(\frac{\dot{\Psi}_r}{L_r} - \frac{I_S L_m}{L_r} - \frac{I_b L_{rb}}{L_r} \right). \end{cases} \quad (9)$$

Рівняння в проекціях на вісі d і q з урахуванням $dI_b/dt = 0$ і $U_r = 0$, а також з урахуванням того, що струм I_b має лише складову по вісі d маємо:

$$\begin{cases} \dot{U}_d = I_d R_S + L'_S \frac{dI_d}{dt} + k_r \frac{d\Psi_r}{dt} - \omega L'_S I_q; \\ \dot{U}_q = I_q R_S + L'_S \frac{dI_q}{dt} + k_r \Psi_r \omega + \omega L'_S I_d + \omega I_b L'_b; \\ 0 = \frac{d\Psi_r}{dt} + \frac{R_r \Psi_r}{L_r} - I_d \frac{R_r L_m}{L_r} - I_b \frac{L_{rb} R_r}{L_r}; \\ J \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} k_r \Psi_r I_q \mp M_c. \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} b_{33} &= -\frac{R_S}{L'_S}; \quad b_{34} = -\frac{k_e}{L'_S}; \\ b_{44} &= 0; \quad d_1 = -\frac{1}{L'_S}; \quad d_2 = 0; \quad d_3 = \frac{1}{L'_S}; \quad d_4 = 0; \\ U_1 &= U_d + k_r U_n; \quad U_1 = U_d + k_r U_n; \quad U_2 = U_q. \end{aligned}$$

В математичній моделі СДПМ, що описується системою рівнянь (11), в якості параметрів прийняті $R_S, k_r, R_r, L'_S, L_r, k_e, U_n, J$. В паспортних даних СДПМ найчастіше вказуються лише R_S, R_r, L_r , інші ж можна визначити розглянувши номінальний (усталений) режим роботи, який характеризується величинами Θ_n, M_n, ω_n .

Позначимо $U_n = I_b \frac{L_{rb} R_r}{L_r}$ та $k_e = I_b L_b$ і запишемо систему диференціальних рівнянь, що описують динаміку електромагнітних змінних в системі координат d та q :

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_r}{dt} = -\frac{R_r}{L_r} \Psi_r + R_r k_r I_d + U_n; \\ \frac{dI_d}{dt} = -\frac{R_S + k_r^2 R_r}{L'_S} I_d + \frac{k_r R_r}{L'_S L_r} \Psi_r + \omega I_d + \frac{U_d + k_r U_n}{L'_S}; \\ \frac{dI_q}{dt} = -\frac{R_S}{L'_S} I_q - \omega \frac{k_e}{L'_S} + \frac{U_q}{L'_S} - \omega I_d - \omega \frac{k_r}{L'_S} \Psi_r; \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} k_r \frac{1}{J} \Psi_r I_q \pm \frac{1}{J} M_c. \end{cases} \quad (11)$$

Враховуючи перехресні зворотні зв'язки як збудження системи запишемо їх окремо:

$$\begin{cases} f_1 = \omega I_q; \\ f_2 = U_n; \\ f_3 = \omega \left(I_d + \frac{k_r \Psi_r}{L'_S} \right); \\ f_4 = \pm M_c. \end{cases} \quad (12)$$

Виходячи з вище сказаного, динаміку змінних Ψ_r, I_d, I_q і ω можна описати системою лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \frac{dI_d}{dt} = b_{11} \dot{I}_d + b_{12} \dot{\Psi} + d_1 U_1 + f_1; \\ \frac{d\Psi}{dt} = b_{21} \dot{I}_d + b_{22} \dot{\Psi} + d_2 U_2 + f_2; \\ \frac{dI_q}{dt} = b_{33} \dot{I}_q + b_{34} \omega + d_3 U_3 + f_3; \\ \frac{d\omega}{dt} = b_{43} \dot{I}_q + b_{44} \omega + d_4 U_4 + f_4, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad b_{11} &= -\frac{(R_S + k_r^2 R_r)}{L'_S}; \quad b_{12} = \frac{k_r R_r}{L'_S L_r}; \\ b_{21} &= k_r R_r; \quad b_{22} = -\frac{R_r}{L_r}; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -U_m \sin \Theta_n = I_{qn} R_S - \omega_n L'_S I_{qn}; \\ U_m \cos \Theta_n = I_{qn} R_S + \omega_n L'_S I_{dn} + \omega_n k_r \Psi_{rn} + \omega_n k_e; \\ -\frac{R_r}{L_r} \Psi_{rn} + R_r k_r I_{dn} + U_{In} = 0; \\ -(R_S + k_r^2 R_r) I_{dn} + \frac{R_r}{L_r} k_r \Psi_{rn} + L'_S \omega_n I_{qn} + U_{dn} + k_r U_{In} = 0; \\ \frac{3k_r \Psi_r I_{qn}}{2} = M_n = \frac{P_{2n}}{\omega_n}. \end{cases} \quad (14)$$

Структурна схема приводу з СДПМ наведена на рис. 3. На рис. 3 пунктирною лінією показано формування збуджуючих впливів.

Позначивши $A = k_r \Psi_r$ маємо $A = k_r \Psi_r = 2M_n / 3I_{qn}$. Із системи рівнянь (14) можна виразити:

$$\begin{cases} L'_S = \frac{U_m \sin \Theta_n + I_{dn} R_S}{\omega_n I_{qn}}; \\ k_e = \frac{U_{qn} - I_{qn} R_S - \omega_n L'_S I_{dn} - 2\omega_n M_{ном} / 3I_{qn}}{\omega_n}. \end{cases} \quad (15)$$

Рівняння 3 і 4 системи (14) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} -\frac{R_r}{L_r} \frac{A}{k_r} + R_r I_{dn} k_r + U_{In} = \\ = -R_r A + L_r R_r I_{dn} k_r^2 + U_{In} k_r = 0; \\ -R_S I_{dn} + k_r^2 R_r I_{dn} + \frac{A R_r}{L_r} + \\ + L'_S \omega_n I_{qn} + U_{dn} + k_r U_{In} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

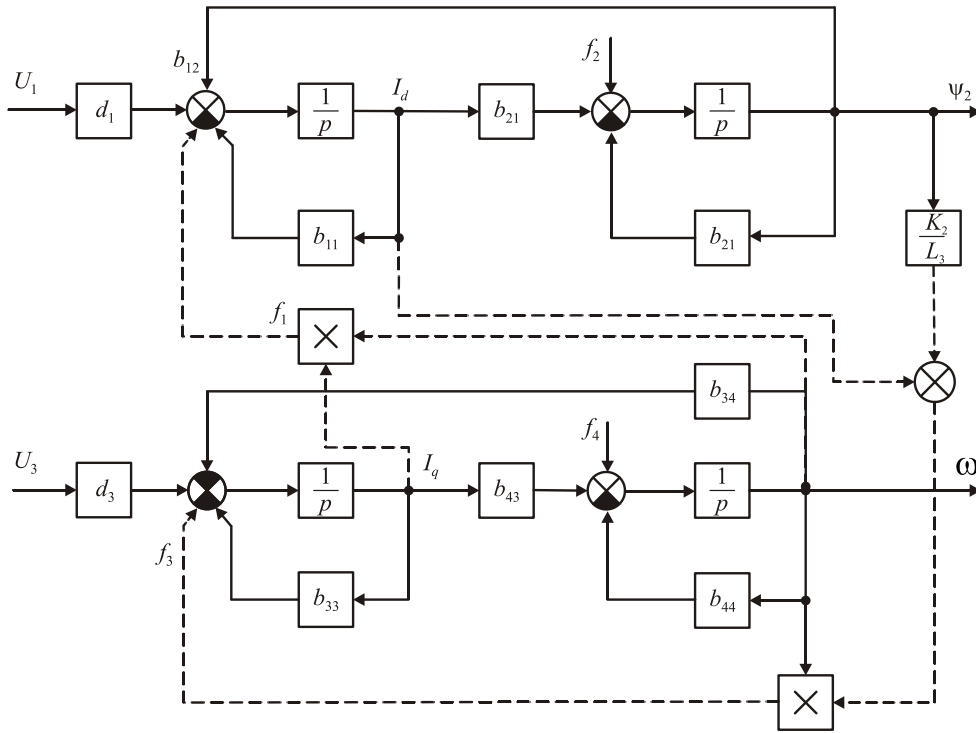


Рисунок 3 – Структурна схема приводу з СДПМ

Виразивши систему рівнянь (16) відносно k_r отримаємо:

$$k_r = \frac{L_r}{2} + \sqrt{\frac{I_r^2}{2} - \frac{AR_r/L_r + L'_S \omega_n I_{dн}}{R_r I_{dн}}} \cdot \frac{+U_{dн} + R_r A - R_S I_{dн}}{\times 1} \quad (17)$$

Звідки $\psi_r = A/k_r$, $U_{нн} = R_r (A/L_r k_r - k_r I_{dн})$.

Необхідною умовою визначення параметрів моделі СДПМ є знання кута навантаження Θ_n і струмів $I_{dн}$, $I_{qн}$. Якщо ці параметри невідомі, то їх можна визначити через $P_{1н}$, $Q_{1н}$, $\cos \Theta_n$ скориставшись наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} P_{1н} = mU(I_{qн} \cos \Theta_n - I_{dн} \sin \Theta_n); \\ Q_{1н} = mU(I_{qн} \sin \Theta_n + I_{dн} \cos \Theta_n); \\ \cos \Theta_n = \frac{I_d x_d + I_q R_S + E_0}{U}; \\ \sin \Theta_n = \frac{I_d x_q + I_d R_S}{U}; \\ I_{нн} = \sqrt{I_{dн}^2 + I_{qн}^2}. \end{cases} \quad (18)$$

Запишемо систему рівнянь (18) у вигляді:

$$\begin{cases} p = \frac{P_{1н}}{m} = I_{qн} (I_{dн} x_d + I_{qн} R_S + E_0) - \\ - I_{dн} (I_{qн} x_q - I_{dн} R_S) = I_{dн} I_{qн} x_d + I_{qн}^2 R_S + \\ + E_0 I_{qн} - I_{dн} I_{qн} x_q + I_{dн}^2 R_S; \\ q = \frac{Q_{1н}}{m} = I_{qн} (I_{qн} x_q - I_{dн} R_S) + I_{dн} (I_{dн} x_d + \\ + I_{qн} R_S + E_0) = I_{qн}^2 x_q - I_{qн} I_{dн} R_S + \\ + I_{qн} I_{dн} x_d + I_{dн} I_{qн} R_S + E_0 I_{dн} \end{cases} \quad (19)$$

Враховуючи співвідношення:

$$\begin{cases} I_{dн}^2 = I_{нн}^2 - I_{qн}^2; \\ E_0 = \frac{q - I_{qн}^2 x_q - x_d (I_{нн}^2 - I_{qн}^2)}{\sqrt{I_{нн}^2 - I_{qн}^2}}, \end{cases} \quad (20)$$

після очевидних перетворень системи (18) можна записати:

$$p = (x_d - x_q) I_{qн} \sqrt{I_{нн}^2 - I_{qн}^2} + I_{qн}^2 R_S + \\ + I_{qн} \frac{q - I_{qн}^2 x_q - x_d (I_{нн}^2 - I_{qн}^2)}{\sqrt{I_{нн}^2 - I_{qн}^2}} + R_S (I_{нн}^2 - I_{qн}^2). \quad (21)$$

Позначивши $p - I_{нн}^2 R_S = B$ і прирівнявши вираз (21) до нуля отримаємо:

$$(B + 2R_S I_{qн}^2)^2 (I_{нн}^2 - I_{qн}^2) + I_{qн}^2 I_{нн}^2 x_q = 0 \quad (22)$$

Після алгебраїчних перетворень рівняння (22) отримаємо бікубичне рівняння:

$$I_{qn}^6 + I_{qn}^4 \left(\frac{P}{R_S} - 2I_n^2 \right) + I_{qn}^2 \frac{P - I_n^2 R_S - x_q I_n^2 - 4R_S I_n^2 (P - I_n^2 R_S) - q}{R_S} + \frac{I_{qn}^2 (P - I_n^2 R_S)^2}{4R_S^2} = 0. \quad (23)$$

Розв'язком рівняння (23) буде номінальне значення струму I_{qn} . Тоді значення параметрів моделі можна знайти наступним чином:

$$\begin{cases} I_{dn} = \sqrt{I_n^2 - I_{qn}^2}; \\ U_{qn} = U_m \sin \Theta = I_{qn} x_q - I_{dn} R_S; \\ U_{dn} = \sqrt{U_m^2 - U_{qn}^2}. \end{cases} \quad (24)$$

Таким чином, знаючі паспортні дані СДПМ: P_{IH} , $\cos \varphi_n$, P_{2H} , η_n , I_n , ω_n , X_d , X_q , R_s , L_r , R_r можна визначити Θ_n , I_{dn} , I_{qn} , а потім і параметри математичної моделі.

Розглянемо математичну модель збуреного руху ЕП з СДПМ в координатах d, q . Для цього представимо диференційні рівняння СПДМ у вигляді системи ортогональної синхронної системи координат $d-q$. В цьому випадку вони приймуть вигляд:

$$\begin{cases} U_d = i_d r_d + x_d p i_d + x_{dD} p i_D - \omega x_q i_q - \omega x_{qQ} i_Q; \\ 0 = x_d p i_d + x_{dD} p i_D - x_d p; \\ 0 = i_D r_D + x_d p i_d + x_{dD} p i_D; \\ U_q = i_q r_s + x_q p i_q + x_{qQ} p i_Q + \omega x_{Mo} i_{Mo} + \omega x_d i_d + \omega x_{dD} i_D; \\ 0 = i_Q r_Q + x_q p i_q + x_{qQ} p i_Q; \\ Jp\omega = i_d (x_d i_d + x_{dD} i_D + x_{Mo} i_{Mo}) - i_q (x_q i_q + i_Q x_{qQ}) \pm M_c, \end{cases} \quad (25)$$

де

$$\varphi_d = L_d i_d + M_{dD} i_D + M_{dM} \left(\frac{X_M}{L_{Mn}} - \frac{3}{2} \frac{M_{Md} i_d}{L_{Mn}} - \frac{3}{2} \frac{M_{MD} i_D}{L_{Mn}} \right) = i_d x_d + i_D x_{dD} + x_0 \quad (26)$$

Приймаємо, що наведені складові виступають, як збурення для системи:

$$\begin{cases} f_1 = \omega x_q i_q + \omega x_{qQ} i_Q; \\ f_3 = \omega x_d i_d + \omega x_{dD} i_D; \\ f_5 = i_d (x_d i_d + x_{dD} i_D) - i_q (x_q i_q + i_Q x_{qQ}) + M. \end{cases} \quad (27)$$

Позначимо траєкторію заданого (бажаного) руху, індексом “*” та введемо позначення параметрів незбуреного руху як U_d^* , U_q^* , i_d^* , i_q^* , i_Q^* , ω^* . Враховуючі дані позначення введемо нові змінні:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= I_d = i_d - i_d^*; \quad \eta_2 = I_D = i_D - i_D^*; \quad \eta_3 = I_q = i_q - i_q^*; \\ \eta_4 &= I_Q = i_Q - i_Q^*; \\ \eta_5 &= \omega = \omega - \omega^*. \end{aligned}$$

Система диференціальних рівнянь збуреного руху прийме вид:

$$\begin{cases} U_1 = i_d (r_s + p x_d) + x_{dD} i_D p = \eta_1 (r_s + p x_d) + \eta_2 x_{dD} p; \\ 0 = i_d x_d p + i_D (r_D + x_{dD} p) = \eta_1 p x_d + \eta_2 (r_D + p x_{dD}); \\ U_3 = i_q (r_s + p x_q) + x_{qQ} i_Q p + \omega x_{Mo} I_{Mo} = \\ = \eta_3 (r_s + p x_q) + \eta_4 x_{qQ} p + \eta_5 x_{Mo} I_{Mo}; \\ 0 = i_q x_q p + i_Q (r_Q + x_{qQ} p) + \omega \cdot 0 = \\ = \eta_3 p x_q + \eta_4 (r_Q + p x_{qQ}); \\ 0 = i_q x_{Mo} I_{Mo} + i_Q \cdot 0 - Jp\omega = \eta_3 x_{Mo} I_{Mo} - \eta_5 Jp. \end{cases} \quad (28)$$

У запропонованій системі рівнянь прийняті позначення $U_1 = U_d - U_d^*$ та $U_3 = U_q - U_q^*$ являють собою додаткове, зверху U^* керування, що забезпечує рух $i_d = i_d^*$, $i_q = i_q^*$, $i_D = i_D^*$, $i_Q = i_Q^*$, $\omega = \omega^*$ незалежно від того, чим викликане дане відхилення.

При такому підході вектор керування U повинен формуватися у функції вектора відхилення n істинного руху від заданої траєкторії. Тобто регулятор не відрізняє відхилення, викликані зміною положення об'єкта керування від відхилень, викликаних збуреннями в електричних ланцюгах і механічними навантаженнями. Таким чином, можна розглядати два незалежні канали по осях d і q , що описуються системою лінійних рівнянь.

Імпульсне керування з відомим періодом дискретності T зумовлює доцільність застосування теорії імпульсних систем [3, 6] для аналізу та синтезу регульованих електроприводів з широтно-імпульсними перетворювачами (ШПІ).

Для отримання дискретних моделей була використана методика перетворення безперервних процесів в різниці рівняння та рівняння в Z -формі [3].

В результаті перетворень отримана система рівнянь і передавальні функції в Z -формі для вісі d :

$$\begin{cases} \dot{i}_{dcp} = \eta_{1cp} = U_1 \frac{P_{10} + P_{11} Z^{-1} + P_{12} Z^{-2}}{(1 + q_1 Z^{-1} + q_2 Z^{-2})}; \\ \dot{i}_{Dcp} = \eta_{2cp} = U_1 \frac{P_{20} + P_{21} Z^{-1} + P_{22} Z^{-2}}{(1 + q_1 Z^{-1} + q_2 Z^{-2})}. \end{cases} \quad (29)$$

З допомогою цієї системи рівнянь та передавальних функцій можуть бути реалізовані методики синтезу дискретних релейних регуляторів.

Алгоритм визначення імпульсної моделі системи ШПІ з СДПМ по осі q аналогічний як і для осі d .

Запишемо диференційні рівняння збуреного руху для контуру q згідно системи (14) у наступному вигляді:

$$\begin{cases} U_3 = p\eta_3 L_q + \eta_3 r_3 + p\eta_4 M_{qQ} + \eta_5 M_{MD} I_{Mo}; \\ 0 = p\eta_3 M_{qQ} + p\eta_4 L_Q + \eta_4 r_Q; \\ 0 = \eta_3 M_{MD} I_{Mo} - p\eta_5. \end{cases} \quad (30)$$

В результаті алгебраїчних перетворень (в даній роботі не приводяться) отримана система рівнянь і передавальні функції в Z-формі для вісі q :

$$\begin{cases} I_{qcep} = \eta_{3cep} = U_3 \frac{P_{10} + P_{11}Z^{-1} + P_{12}Z^{-2} + P_{13}Z^{-3}}{1 + q_1Z^{-1} + q_2Z^{-2} + q_3Z^{-3}}; \\ I_{Qcep} = \eta_{4cep} = U_3 \frac{P_{20} + P_{21}Z^{-1} + P_{22}Z^{-2} + P_{23}Z^{-3}}{1 + q_1Z^{-1} + q_2Z^{-2} + q_3Z^{-3}}; \\ \omega_{cep} = \eta_{5cep} = U_3 \frac{P_{30} + P_{31}Z^{-1} + P_{32}Z^{-2} + P_{33}Z^{-3}}{1 + q_1Z^{-1} + q_2Z^{-2} + q_3Z^{-3}}, \end{cases} \quad (31)$$

де $P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{30}, P_{31}, P_{32}, P_{33}, q_1, q_2, q_3$ – коефіцієнти, вирази для знаходження яких в даній роботі не приводяться.

З допомогою системи рівнянь (31) та передавальних функцій можуть бути реалізовані методики синтезу дискретних релейних регуляторів ЕП з СДПМ.

Імпульсна модель системи ШП з СДПМ для середніх значень I_d, Ψ_r , може бути отримана в результаті Z-перетворень. Збурений рух траєкторії контуру d може бути описаний системою неперервних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dI'_d}{dt} = b_{11}I'_d + b_{12}\Psi'_r + d_1U'_1; \\ \frac{d\Psi'_d}{dt} = b_{21}I'_d + b_{22}\Psi'_r + d_2U'_1. \end{cases} \quad (32)$$

Розв'язок системи відносно I'_d і Ψ'_d в операторній формі при $U'_1 = const$ та періоді дискретності рівному T має вигляд:

$$\begin{cases} I'_d(p) = U'_1 \frac{(1 - e^{-pT})(p - b_{22})}{p[(p - b_{11})(p - b_{22}) - b_{21}b_{12}]} = \\ = U'_1 \frac{(1 - e^{-pT})(p - c)}{(p + a)(p + b)}; \\ \Psi'_d(p) = U'_1 \frac{(1 - e^{-pT})b_{21}}{p(p + a)(p + b)}, \end{cases} \quad (33)$$

де a і b – корні рівняння $(p - b_{11})(p - b_{22}) - b_{21}b_{12} = 0$; $c = -b_{22}$, що відповідає структурній схемі на рисунку 4:

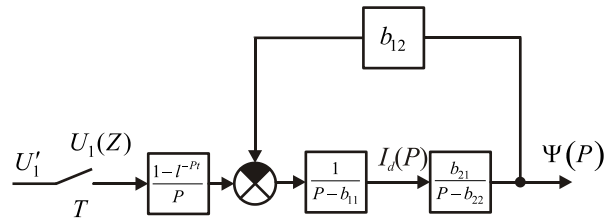


Рисунок 4 – Структурна схема моделі по вісі d з урахуванням дискретності перетворювача

Модифіковані Z-перетворення мають вигляд:

$$\begin{cases} I'_d(Z, m) = \frac{U'_1}{ab} \left[\frac{c(1 - Z^{-1})}{Z - 1} + \frac{b(c - a)e^{-amT}(1 - Z^{-1})}{(a - b)(Z - e^{-amT})} + \frac{a(b - c)e^{-amT}(1 - Z^{-1})}{(a - b)(Z - e^{-bmT})} \right]; \\ \Psi'_d(Z, m) = \frac{U'_1}{ab} \left[\frac{1 - Z^{-1}}{Z - 1} + \frac{be^{-amT}(1 - Z^{-1})}{(a - b)(Z - e^{-amT})} + \frac{ae^{-bmT}(1 - Z^{-1})}{(a - b)(Z - e^{-bmT})} \right]. \end{cases} \quad (34)$$

Проінтегрувавши $I'_d(Z, m)$ і $\Psi'_d(Z, m)$ відносно m в межах від 0 до 1 отримаємо середнє значення I'_d і Ψ'_d за заданий період дискретності. Після проведення перетворень отримаємо дискретні моделі середніх значень:

$$\begin{cases} I_{dcep}(Z) = \frac{U_1}{a^2 b^2 T(a - b)} \cdot \frac{1}{Z(Z - e^{-aT})(Z - e^{-bT})} \\ \left[c(a - b)abT \times (Z - e^{-aT})(Z - e^{-bT}) + \right. \\ \left. + b^2(c - a)(1 - e^{-aT})(Z - 1)(Z - e^{-bT}) + \right. \\ \left. + a^2(b - c)(1 - e^{-bT})(Z - 1)(Z - e^{-aT}) \right]; \\ \Psi_{dcep}(Z) = \frac{U_1}{a^2 b^2 T(a - b)} \cdot \frac{1}{Z(Z - e^{-aT})(Z - e^{-bT})} \\ \left[abT^2(a - b) \times (Z - e^{-aT})(Z - e^{-bT}) \right. \\ \left. + b^2(1 - e^{-aT})(Z - 1)(Z - e^{-bT}) + \right. \\ \left. + a^2(1 - e^{-bT})(Z - 1)(Z - e^{-aT}) \right]. \end{cases} \quad (35)$$

Після математичних перетворень рівняння приймуть вид:

$$\begin{cases} I_{dcep}(Z) = \frac{(P'_{21}Z^2 + P'_{11}Z + P'_{01})U_1}{Z(Z + Z_{11})(Z + Z_{21})}; \\ \Psi_{dcep}(Z) = \frac{(P'_{22}Z^2 + P'_{12}Z + P'_{02})U_1}{Z(Z + Z_{11})(Z + Z_{21})}, \end{cases} \quad (36)$$

де $Z_{11} = -e^{-aT}$; $Z_{21} = -e^{-bT}$.

Отримані математичні вирази аналогічні рівнянням (29), але визначення коефіцієнтів приведені до поліномів значно простіше.

Аналогічно можна отримати дискретні моделі відносно вісі q :

$$\begin{cases} I_{q\text{ср}}(Z) = \frac{(q'_{21}Z^2 + q'_{11}Z + q'_{01})U_3}{Z(Z + Z_{21})(Z + Z_{22})}; \\ \omega_{\text{ср}}(Z) = \frac{(q'_{22}Z^2 + q'_{12}Z + q'_{02})U_3}{Z(Z + Z_{21})(Z + Z_{22})}. \end{cases} \quad (37)$$

Отримані дискретні передаточні функції електромеханічного контуру струму та швидкості по осях d і q дозволяють синтезувати числові регулятори та провести аналіз перехідних процесів системи ШП-СДПМ.

ВИСНОВКИ. В результаті проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

1. Синтез систем автоматичного керування на основі релейних регуляторів, що працюють в ковзному режимі, є одним зі шляхів створення високоякісних систем керування електроприводами на основі СДПМ за рахунок їх інваріантності відносно зовнішніх збурень.

2. Розроблені дискретні математичні моделі на основі перетворення системи диференціальних рівнянь Парка-Горева для СДПМ можуть бути використані для реалізації методики синтезу систем автоматичного керування електроприводом із СДПМ на основі релейних регуляторів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Красовский А.А., Буков В.И., Шендрик В.С.. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными объектами. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами / Пер. с англ.; под ред. Б.Р. Левина. – М.: Радио и связь, 1982. – 323 с.
3. Изерман Р. Цифровые системы управления / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.
4. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1981. – 367 с.
5. Гурко А.Г. К изучению свойств функции Ляпунова в пространстве состояний системы управления // Автомобильный транспорт. – 2011. – Вып. 28. – С. 114–119.
6. Фалдин Н.В. Синтез оптимальных по быстродействию замкнутых систем управления. – Тула: Тул. политехн. ин-т, 1990. – 100 с.
7. Садовой А.В., Сухинин Б.В., Сохина О.В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами. – К.: ИСИМО, 1996. – 298 с.
8. Слежановский О.В., Дацковский Л.Х., Кузнецов И.С. Системы подчиненного регулирования электроприводов переменного тока с вентильными преобразователями. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 256 с.
9. Сохина Ю.В. Развитие методов структурно-алгоритмического синтеза систем оптимального управления электроприводами при неограниченном увеличении коэффициента усиления: автореф. дисс. ... канд. техн. наук; 05.09.03 – электромеханические комплексы и системы. – Донецьк, 1997. – 19 с.
10. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 576 с.

MATHEMATICAL MODELS SYNCHRONOUS MOTOR WITH PERMANENT MAGNETS FOR THE SYNTHESIS OF THE AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS OF THE HIGH EFFICIENT ELECTRIC DRIVE

P. Pleshkov, I. Savelenko

Kirovograd National Technical University
prosp. University, 8, Kirovohrad, 25006, Ukraine. E-mail: ivan.savelenko@gmail.com

A. Nekrasov

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University
vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail: ke@kdu.edu.ua.

Systems of the automatic management of electric AC drives, including electric drives on the basis synchronous motors with permanent magnets are usually nonlinear. The synthesis of classical slave control for control of such facilities require resolving the issue of consideration of nonlinear electrical parameters object control for the many perturbations caused by the change of moment, of errors in control channels and others. All this increases the complexity of synthesis of automatic control of electric drives and lowers effectiveness of their work. One solution to this problem is the synthesis of laws control of electric drives AC based on the theory of discontinuous controls, namely by applying the laws of optimal relay control. The use of such automatic control systems will improve the accuracy control and to ensure of desirable performance qualities of the transition process that will certainly lead to increased productivity drives on the basis of synchronous motors with permanent magnets. Due to the fact that the system with relay element is essentially discrete, pulse system ago to for solve the problem of synthesis of optimal relay control system is most expedient to have a mathematical model of control object in the discrete form. Розроблені дискретні математичні моделі синхронного двигуна з постійними магнітами в просторових d-q координатах на основі методики перетворення рівнянь неперервних процесів в різницеві рівняння і рівняння в Z-формі, а також отримані авторами дискретні передаточні функції для контурів струму та швидкості дозволяють реалізувати методики синтезу систем автоматичного оптимального релейного керування електроприводом з синхронними двигунами на постійних магнітах. Designed discrete mathematical model of synchronous motor with permanent magnets in d-q coordinates based on the methodology convert equations of continuous processes in difference equations and equations

in the Z-form. and obtained by the authors of discrete transfer function for circuits current and speed allow to realize the solutions of synthesis of automatic optimal relay control of the electric drives with synchronous motors on permanent magnets.

Key words: automatic control system, relay systems, synchronous motors with permanent magnets.

REFERENCES

1. Krasovskiy, A.A, Bukov, V.I and Shendrik, V.S. (1977), *Universal'nye algoritmy optimal'nogo upravleniya nepreryvnymi ob'ektami* [Universal algorithms for optimal control of continuous objects], Nauka, Moscow, USSR.
2. Sejdzh, Eh. and Uajt, Ch. (1982), *Optimalnoe upravlenie sistemami* [Optimal control of systems], Translated by Levin, B.R., Radio i svyaz, Moscow, USSR.
3. Izerman, R. (1984), *Tsifrovye sistemy upravleniya*. [Digital control systems]: Translated by Zabrodin, S.P., Mir. Moscow, USSR.
4. Utkin, V.I. (1981), *Skol'zyashchie rezhimy v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Sliding regimes in the tasks of optimization and control]. Nauka, Moscow, USSR.
5. Gurko, A.G. (2011), "By studying the properties of the Lyapunov function in the state space control system". *Avtomobilnyj transport. Sb. nauch. tr., HNADU*, vol. 28, pp. 114–119.
6. Faldin, N.V. (1990), *Sintez optimal'nykh po bystrodeystviyu zamknytykh sistem upravleniya* [Synthesis of performance optimal of closed control systems], Institute of polytechnic at the Tula, Tula, USSR.
7. Sadovoy, A.V., Sukhinin, B.V. and Sokhina, O.V. (1996), *Sistemy optimal'nogo upravleniya pretsizionnymi elektroprivodami* [Systems of optimal control of precision electric drives], "ISIMO", Kiev Ukraine.
8. Slezhanovskiy, O.V., Datskovskiy, L.Kh. and Kuznetsov, I.S. (1983), *Sistemy podchinennogo regulirovaniya elektroprivodov peremennogo toka s ventil'nymi preobrazovatelyami* [System of slave regulation drives of AC with the valve inverter], Energoatomizdat, Moscow, USSR.
9. Soxina, Yu.V. (1997), "Development of methods of structural and algorithmic synthesis of optimal control systems with electric unlimited increase gain". Abstract of Cand. Sci. (Tech.) dissertation, 05.09.03, Donetsk national technical university, Donetsk, Ukraine.
10. Tsypkin, Ya.Z. (1974), *Relejnye avtomaticheskie sistemy*. [Relay automatic systems], Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, Nauka, Moscow, USSR.

Стаття надійшла 30.04.2015.