

УДК 517.958:532.72

### МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОТОКІВ МАСИ У ДВОФАЗНІЙ СМУЗІ З АРКСИНОС-РОЗПОДІЛОМ ШАРУВАТИХ ВКЛЮЧЕНЬ ЗА НУЛЬОВОЇ ПОЧАТКОВОЇ КОНЦЕНТРАЦІЇ

**А. Є. Чучвара**

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача Національної академії наук України  
вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, м. Львів, Україна. E-mail: davydoka@gmail.com

Досліджено випадковий дифузійний потік домішкової речовини у двофазній багатошаровій смузі з областями найімовірнішого розташування включень біля границь тіла. Структуру шаруватого матеріалу змодельовано ймовірнісним арксинус-розподілом. Крайову задачу сформульовано для функції потоку маси за нульової початкової умови на функцію концентрації, знайдено крайову умову на потік на нижній границі тіла. Розв'язок крайової задачі знайдено у вигляді ряду Неймана. Одержано формулу для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз потоку маси у смузі з арксинус-розподілом шаруватих включень. На прикладі шаруватого композиту мідь-залізо проведено аналіз залежності усередненого потоку від параметрів структури та характеристик середовища. Встановлено, що збільшення об'ємної частки заліза у композиті зменшує усереднені потоки домішки.

**Ключові слова:** дифузія, потік маси, випадково неоднорідна шарувата структура, арксинус-розподіл, усереднення за ансамблем конфігурацій фаз.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ МАССЫ В ДВУХФАЗНОЙ ПОЛОСЕ С АРКСИНОС-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СЛОИСТЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ НУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

**А. Е. Чучвара**

Центр математического моделирования Института прикладных проблем механики и математики  
им. Я. С. Подстригача Национальной академии наук Украины  
ул. Дж. Дудаева, 15, 79005, г. Львов, Украина. E-mail: davydoka@gmail.com.

Исследован случайный диффузионный поток примесного вещества в двухфазной многослойной полосе с областями наиболее вероятного расположения включений у границ тела. Структуру слоистого материала смоделировано вероятностным арксинус-распределением. Краевая задача сформулирована для функции потока массы при нулевом начальном условии на функцию концентрации, найдено краевое условие на поток на нижней границе тела. Решение краевой задачи найдено в виде ряда Неймана. Получено формулу для усредненного по ансамблю конфигураций фаз потока массы в полосе с арксинус-распределением слоистых включений. На примере слоистого композита медь-железо проведен анализ зависимости усредненного потока от параметров структуры и характеристик среды. Установлено, что увеличение объемной доли железа в композите уменьшает усредненные потоки примеси.

**Ключевые слова:** диффузия, поток массы, случайно неоднородная слоистая структура, арксинус-распределение, усреднение по ансамблю конфигураций фаз.

**АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ.** Одним із найбільш поширених класів композитів, що використовуються у сучасному автомобілебудуванні, металургійній та гірничовидобувній промисловості, приладобудуванні, сільському господарстві, медицині, будівельній галузі тощо є шаруваті композитні матеріали (рис. 1а), які володіють спектром унікальних властивостей [1-4]. Шаруваті композити виготовляють з різних природних матеріалів, металів, сплавів, полімерів, штучних волокон, кераміки, поєднання яких дозволяє не тільки збільшити час експлуатації виробів та їх надійність, але водночас забезпечує зменшення енерго- та матеріалоємності виробництва, витрат на технічне обслуговування.

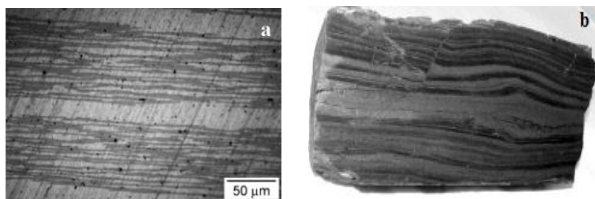


Рисунок 1 – Приклади шаруватих структур композиту  $Cu - Fe$  (а) та метаморфічної породи джеспіліту (б)

У природному геологічному середовищі також часто зустрічаються шаруваті багатофазні структури. Прикладами таких об'єктів є структури родовищ корисних копалин, осадових, магматичних, метаморфічних порід (рис. 1б) [5, 6]. Вплив внутрішніх неоднорідностей на специфіку протікання фізичних процесів у таких середовищах необхідно враховувати під час проведення екологічного моніторингу, інженерно-геологічних досліджень земельних ділянок, зокрема, для встановлення можливості виконання будівельних робіт.

Оцінювання функціональних характеристик, прогнозування надійності та стійкості композиційних матеріалів, встановлення оптимальних технологічних параметрів їх виготовлення, дослідження властивостей складних геологічних об'єктів тощо базується насамперед на моделюванні процесів, зокрема, масоперенесення, що у них протікають. При цьому для забезпечення повноти досліджень, як правило, необхідно визначати різні фізичні характеристики процесу перенесення маси – концентрацію мігруючих частинок, їх хімічний потенціал, дифузійний потік. В умовах, коли невідомою є точна геометрична конфігурація багатофазних тіл, параметри середовища розглядають як випадкові ве-

личини, що зумовлює стохастичний характер досліджуваних фізичних полів [7].

У працях [8, 9] запропоновано підхід до математичного опису процесів перенесення маси у тілах випадково неоднорідної структури, відповідно до якого крайову задачу зводять до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння, а розв'язок знаходять у вигляді ряду Неймана, зручного для проведення процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз. Роботи [10, 11] присвячені узагальненню підходу до математичного опису концентрації мігруючої речовини на основі формулювання контактної-крайових задач, що дає можливість явно враховувати стрибок концентрації на міжфазних границях. У праці [12] запропоновано підхід до математичного опису дифузійних потоків у випадково неоднорідних шаруватих тілах, який базується на отриманні рівняння дифузії для функції потоку та обґрунтуванні коректного формулювання початкових і граничних умов.

Метою роботи є математичне моделювання випадкових потоків домішкової речовини у двофазній стохастично неоднорідній смугі з арксинус-розподілом шаруватих включень на основі підходу, розробленого у [12].

**МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.** Нехай у двофазній смугі товщини  $z_0$ , яка складається з  $n_0$  підшарів фази  $j=0$  (матриця) та  $n_1$  підшарів фази  $j=1$  (включення), відбувається процес дифузії домішкової речовини. Припускаємо, що об'єм, який займає фаза  $j=0$ , є набагато більшим, ніж об'єм іншої фази, а коефіцієнти дифузії є сталими в межах кожної з фаз

$$D(z) = \begin{cases} D_0, & z \in \Omega_0; \\ D_1, & z \in \Omega_1, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\Omega_j$  – область, яку займає фаза  $j$ .

Координати розташування підшарів вважаємо невідомими, при цьому приймаємо, що прошаки у тілі найбільш ймовірно розташовані біля границь тіла (рис. 2).

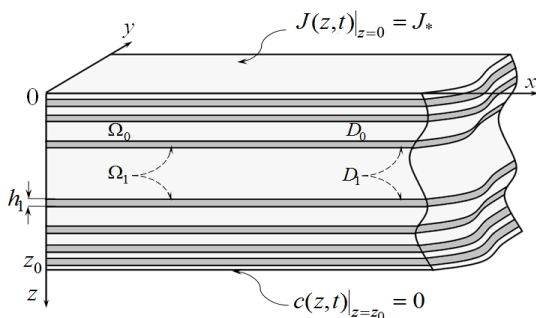


Рисунок 2 – Можлива реалізація двофазної багатошарової смуги з найбільш ймовірним розташуванням включень біля границь тіла

Таку випадкову неоднорідну шарувату структуру можна описати за допомогою ймовірнісного арксинус-розподілу, що є частковим випадком бета-розподілу, і має функцію густини вигляду [13]:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{z_0}{z_0-z}\right)^{1-\alpha}, & z \in [0; z_0]; \\ 0, & z \notin [0; z_0], \end{cases} \quad (2)$$

де  $\Gamma(x)$  – гама-функція,  $\alpha$  – ступінь вільності розподілу ( $0 < \alpha < 1$ ).

На рис. 3. показано залежність функції густини розподілу (2) від різних значень ступеня вільності  $\alpha = 0,1; 0,3; 0,5; 0,9$  (криві 1-4).

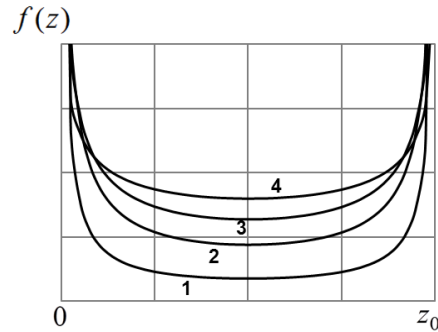


Рисунок 3 – Густина розподілу  $f(z)$

Значимо, що чим більше значення параметра  $\alpha$ , тим ймовірніше знаходження включень посередині смуги. Натомість зменшення ступеня вільності збільшує ймовірність розташування включень біля границь  $z=0$  та  $z=z_0$  (рис. 3), при цьому області ймовірного знаходження включень ущільнюються до відповідних поверхонь.

Потік домішкової речовини  $J(z,t)$  у двофазній випадково неоднорідній смугі описується таким рівнянням дифузії [14]:

$$\frac{\partial J(z,t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 J(z,t)}{\partial z^2}. \quad (3)$$

Приймаємо, що у початковий момент часу відсутній дифузійний потік у тілі:

$$J(z,t)|_{t=0} = 0; \quad (4)$$

на «верхній» поверхні шару  $z=0$  потік є сталий, а на «нижній» поверхні смуги  $z=z_0$  концентрація домішкової речовини  $c(z,t)$  дорівнює нулю:

$$J(z,t)|_{z=0} = J_* \equiv const, \quad c(z,t)|_{z=z_0} = 0. \quad (5)$$

Друга умова (5) означає, що дифузійний потік на границі  $z=z_0$  дорівнює деякій функції часу  $F(t)$ , яку визначаємо додатково з відповідної крайової задачі для концентрації мігруючої речовини. З умови (4) випливає, що початкова концентрація в тілі може бути сталою або кусково-сталою [14], тут розглянемо випадок  $c(z,t)|_{t=0} = 0$ .

Відповідно до розвинутого підходу [12], розв'язок крайової задачі (3)-(5) шукаємо у вигляді ряду Неймана. Для цього вводимо до розгляду випадкову функцію просторової координати – «функцію структури», що задовольняє умові суцільності тіла [15]:

$$\eta_{ij}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_{ij}; \\ 0, & z \notin \Omega_{ij}, \end{cases} \quad \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ij}(z) = 1. \quad (6)$$

Тут  $j$  – номер фази,  $i$  – номер включення в рамках фази  $\Omega_{ij}$  –  $i$ -та однозв'язна область  $j$ -ї фази

$$(\Omega_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} \Omega_{ij}).$$

Тоді коефіцієнт дифузії (1) можна подати через функцію  $\eta_{ij}$  (6) у вигляді

$$D(z) = \sum_{i=1}^{n_0} D_0 \eta_{i0}(z) + \sum_{i=1}^{n_1} D_1 \eta_{i1}(z). \quad (7)$$

Підставивши співвідношення (7) у рівняння (3) та ввівши до розгляду детермінований оператор

$$L_s(z) = \sum_{i=1}^{n_1} (D_1 - D_0) \eta_{i1}(z) \partial^2 / \partial z^2, \text{ одержимо інтег-}$$

ро-диференціальне рівняння з випадковим ядром

$$J(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \times \\ \times L_s(z') J(z', t') dz' dt', \quad (8)$$

де  $J_0(z, t)$  – розв'язок однорідної крайової задачі,  $G(z, z', t, t')$  – детермінована функція Гріна.

Відповідно до [12] розв'язок однорідної крайової задачі за нульової початкової концентрації має вигляд

$$J_0(z, t) = J_* \left( 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin(\xi_n z) \right). \quad (9)$$

Тут  $\xi_n = \pi(2n-1)/2z_0$ .

Зокрема, вираз для потоку маси через границю шару  $z = z_0$  має вигляд

$$J_0(z, t)|_{z=z_0} \equiv F(t) = J_* \left( 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n} (-1)^{n+1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \right).$$

Функція Гріна є розв'язком однорідної крайової задачі з точковим джерелом [14]

$$G(z, z', t, t') = \frac{\theta(t-t')}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D_0 y_k^2 (t-t')} \times \\ \times [\cos(y_k(z-z')) - \cos(y_k(z+z'))], \quad (10)$$

де  $y_k = k\pi/z_0$ ,  $\theta(t-t')$  – одинична сходинова функція Хевісайда.

Розв'язок рівняння (8) знайдемо методом послідовних наближень у вигляді абсолютно і рівномірно збіжного ряду Неймана [14, 16]. Надалі для проведення процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз обмежимося двома першими членами цього ряду

$$J(z, t) \approx J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J_0(z', t') dz' dt'.$$

Приймаємо, що включення мають характерну (середню) товщину  $h_1$ , а випадковою координатою, яка характеризує їх положення, є координата «верхньої» межі прошарку  $z_{i1}$  ( $i = \overline{1, n_1}$ ). Тоді знаходимо формулу для усередненого дифузійного потоку у

двофазній випадково неоднорідній шаруватій смузі з арксинус-розподілом включень

$$\langle J(z, t) \rangle = J_0(z, t) + \frac{(D_1 - D_0) B v_1}{h_1} \int_0^t \int_0^{h_1} z'^{\alpha} z_0^{\alpha} {}_2\bar{F}_1\left(\frac{z'}{z_0}\right) \times \\ \times G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' + \int_{h_1}^{z_0} z_0 h_1^{\alpha} (z_0 + h_1 - z')^{\alpha-1} \times \\ \times \bar{F}\left(\frac{h_1}{z_0 + (z' - h_1)}\right) G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' dt', \quad (11)$$

де  $B = \Gamma(2\alpha)/\alpha\Gamma^2(\alpha)$ ,  $\bar{F}(z) = {}_2F_1(\alpha, 1-\alpha; 1+\alpha, z)$ ,

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{z^m}{m!} - \text{гіпергеометрична}$$

функція,  $(a)_m = a(a+1)\dots(a+m-1)$ ,  $(a)_0 = 1$ .

Зауважимо, що у формулі (11) не враховано конкретний вигляд крайових умов, що дає можливість застосовувати її для різних типів початкових та граничних умов.

Підставивши у (11) вирази для функції Гріна (10) та потоку в однорідному тілі (9), одержимо

$$\frac{\langle J(z, t) \rangle}{J_*} = 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-D_0 \xi_n^2 t}}{\xi_n} \sin(\xi_n z) + \frac{2(D_1 - D_0) v_1 B}{D_0 z_0^{\alpha} h_1} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} \left( e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t} \right) \sin(y_k z) \left[ z_0^{\alpha-1} \times \right. \\ \times \left( f^+(0, x_{kn}^-) - f^+(0, x_{kn}^+) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(1-\alpha)\dots(m-\alpha)}{(m+\alpha)m! z_0^m} \times \right. \\ \times \left. \left[ f^+(m, x_{kn}^-) - f^+(m, x_{kn}^+) \right] \right) + h_1^{\alpha} \left( f^-(0, x_{kn}^-) - \right. \\ \left. - f^-(0, x_{kn}^+) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(1-\alpha)\dots(m-\alpha) h_1^m}{(m+\alpha)m!} \times \right. \\ \left. \times \left[ f^-(m, y_k - \xi_n) - f^-(m, y_k + \xi_n) \right] \right) \left. \right], \quad (12)$$

$$\text{де } f^+(a, p) = \int_0^{h_1} (z)^{\alpha+a} \cos(pz) dz,$$

$$f^-(a, p) = \int_{h_1}^{z_0} (z_0 + h_1 - z)^{\alpha-(a+1)} \cos(pz) dz.$$

Співвідношення (12) є розрахунковою формулою для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз дифузійного потоку домішкової речовини у двофазній смузі з арксинус-розподілом шаруватих включень за нульової початкової концентрації.

Проаналізуємо поведінку усереднених дифузійних потоків залежно від вхідних параметрів задачі на прикладі міграції водню у шаруватому композиті  $Cu-Fe$ , в якому мідь вважаємо базовою фазою (рис. 1а). Розрахунки проводимо у безрозмірних змінних  $\zeta = z/z_0$ ,  $\tau = D_0 t/z_0^2$ . Тоді формула (12) набуде вигляду

$$\frac{\langle J(\zeta, \tau) \rangle}{J_*} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\xi_n^2 \tau}}{\xi_n} \sin(\xi_n \zeta) + \frac{2(d-1) v_1 B}{h_1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} \left( e^{-\xi_n^2 \tau} - e^{-y_k^2 \tau} \right) \sin(y_k \zeta) \times \\ & \times \left[ \left( f^+(0, x_{kn}^-) - f^+(0, x_{kn}^+) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(1-\alpha) \dots (m-\alpha)}{(m+\alpha)m!} \times \right. \right. \\ & \times \left. \left[ f^+(m, x_{kn}^-) - f^+(m, x_{kn}^+) \right] \right) + h_1^\alpha \left( f^-(0, x_{kn}^-) - \right. \\ & \left. - f^-(0, x_{kn}^+) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(1-\alpha) \dots (m-\alpha) h_1^m}{(m+\alpha)m!} \times \right. \\ & \left. \left. \times \left[ f^-(m, y_k - \xi_n) - f^-(m, y_k + \xi_n) \right] \right] \right), \end{aligned}$$

де  $d = D_1/D_0$ ,

$$f^-(a, p) = \int_{h_1}^1 (1 + h_1 - z')^{\alpha - (a+1)} \cos(pz) dz.$$

Коефіцієнт дифузії водню у міді складає  $D_{Cu} = 4,34 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ , у залізі –  $D_{Fe} = 1,8 \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$ , тоді  $d = 0,0415$ . Також приймаємо, що характерна товщина прошарків заліза  $h_{Fe} = 0,01$ , а об'ємна частка заліза у міді становить  $v_{Fe} = 0,2$ , ступінь вільності арксинус-розподілу  $\alpha = 0,5$ .

На рис. 4 показано розподіли усереднених потоків водню  $\langle J_H(\zeta, \tau) \rangle / J_*$  в різні моменти безрозмірного часу  $\tau = 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 1$  (криві 1-5) за нульової початкової концентрації  $H$  у композиті  $Cu - Fe$ . Штриховою лінією позначено відповідні потоки в однорідному шарі міді. На рис. 5 проілюстровано розподіли потоків водню у смузі для різних значень товщини прошарків заліза  $h_{Fe} = 0,002; 0,005; 0,01; 0,1$  (криві 1-4) в момент часу  $\tau = 0,1$ . На рис. 6 наведено розподіли функції  $\langle J_H(\zeta, \tau) \rangle / J_*$  для різних значень об'ємної частки  $Fe$  у композиті:  $v_{Fe} = 0,05; 0,1; 0,2$  (криві 1-3). Рис. 7 ілюструє розподіли функції потоку залежно від ступеня вільності арксинус-розподілу  $\alpha = 0,3; 0,5; 0,7$  (криві 1-3). На рис. 6 та рис. 7 для криві а (суцільні лінії) побудовані для  $\tau = 0,3$ , а криві б (штрих-пунктирні лінії) – для  $\tau = 0,6$ .

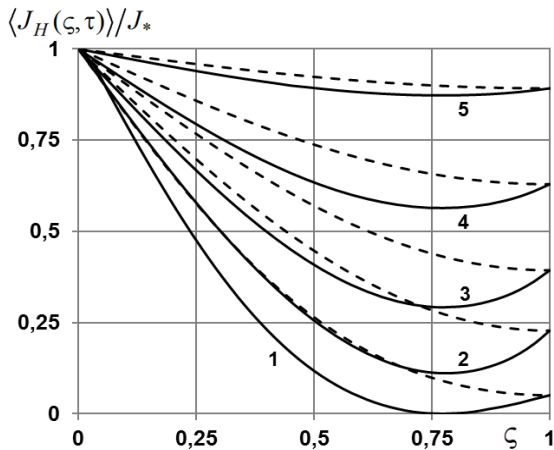


Рисунок 4 – Розподіли потоків водню в композиті  $Cu - Fe$  в різні моменти безрозмірного часу

Зі збільшенням часу протікання процесу дифузії усереднені потоки водню зростають як в однорідному шарі міді, так і в структурі з прошарками заліза (рис. 4). При цьому потоки  $H$  для тих самих часів у тілі без прошарків більші, ніж в однорідній смузі, проте з часом відмінність між потоками зменшується і вони виходять на усталений режим, який є однаковим для однорідного і неоднорідного тіл. Зазначимо, що для  $\tau < 1$  характерне утворення глобального мінімуму усередненого потоку на відріжку  $\zeta \in [0,6; 0,8]$  (криві 1-4, рис. 4).

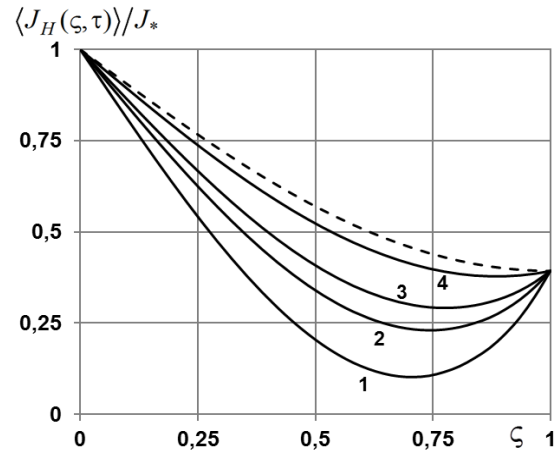


Рисунок 5 – Розподіли потоків водню в композиті  $Cu - Fe$  для різних значень характерної товщини залізних прошарків  $h_{Fe}$

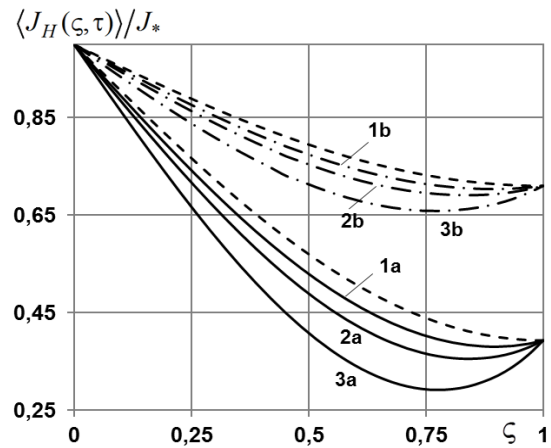


Рисунок 6 – Розподіли потоків водню в композиті  $Cu - Fe$  для різних значень об'ємної частки залізних включень  $v_{Fe}$

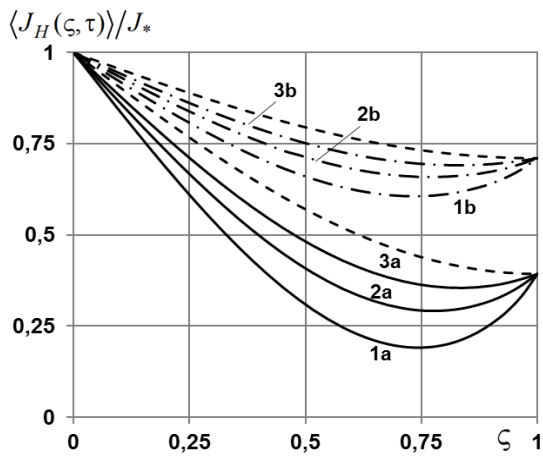


Рисунок 7 – Розподіли потоків водню в композиті *Cu – Fe* для різних значень ступеня вільності  $\alpha$

При збільшенні характерної товщини прошарків заліза усереднені потоки домішкової речовини в композиті збільшуються (рис. 5), тоді як зі зростанням об’ємної частки включень *Fe* за сталого

значення  $h_{Fe}$  потоки водню зменшуються (рис. 6). Зокрема, зростання вдвічі товщини залізних прошарків збільшує значення  $\langle J_H(\zeta, \tau) \rangle / J_*$  до 21% (криві 2 та 3, рис. 5), а збільшення вдвічі об’ємної частки заліза зменшує усереднений потік до 10% (криві 1 та 2, рис. 6). Зменшення ступеня вільності арксинус-розподілу  $\alpha$  (ущільнення прошарків до границь смуги), збільшує потоки водню по всій товщині композитного матеріалу *Cu – Fe* (рис. 7).

У таблиці 1 наведено розрахункові дані для потоку домішкових частинок у смузі без прошарків  $J_0(\zeta, \tau) / J_*$  та усередненого дифузійного потоку  $\langle J(\zeta, \tau) \rangle / J_*$  при різних значеннях приведенного коефіцієнта дифузії домішкової речовини  $d$ . Обчислення проведені для значень  $\tau = 0,5$ ,  $h_1 = 0,01$ ,  $v_1 = 0,2$ ,  $\alpha = 0,5$ . Сірим кольором виділено мінімальні значення потоків маси.

Таблиця 1 – Значення потоку в однорідному тілі та смузі з прошарками залежно для різних значень приведенного коефіцієнта дифузії

$\zeta$	$J_0(\zeta, \tau) / J_*$	$\langle J(\zeta, \tau) \rangle / J_*$					
		$d = 0,001$	$d = 0,01$	$d = 0,05$	$d = 2,0$	$d = 3,0$	$d = 5,0$
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,07	0,96124	0,94233	0,94250	0,94325	0,98017	0,99911	1,03698
0,13	0,92291	0,88556	0,88589	0,88739	0,96029	0,99768	1,07246
0,20	0,88542	0,83059	0,83109	0,83328	0,94029	0,99517	1,10492
0,27	0,84918	0,77835	0,77899	0,78183	0,92008	0,99099	1,13279
0,33	0,81460	0,72973	0,73049	0,73389	0,89956	0,98452	1,15444
0,40	0,78205	0,68559	0,68646	0,69032	0,87861	0,97518	1,16830
0,47	0,75189	0,64680	0,64775	0,65195	0,85709	0,96229	1,17269
0,53	0,72445	0,61419	0,61519	0,61960	0,83482	0,94518	1,16592
0,60	0,70003	0,58854	0,58954	0,59401	0,81163	0,92323	1,14643
0,67	0,67889	0,57065	0,57163	0,57596	0,78724	0,89558	1,11228
0,73	0,66127	0,56130	0,56220	0,56621	0,76134	0,86141	1,06155
0,80	0,64737	0,56115	0,56193	0,56538	0,73367	0,81997	0,99258
0,87	0,63732	0,57138	0,57197	0,57461	0,70334	0,76935	0,90137
0,93	0,63125	0,59271	0,59306	0,59460	0,66983	0,70841	0,78557
1,00	0,62922	0,62922	0,62922	0,62922	0,62922	0,62922	0,62922

Зазначимо, що потоки у смузі з включеннями є меншим, ніж в однорідному шарі для коефіцієнтів дифузії у матриці більших, ніж у включення, і більшим за  $J_0(\zeta, \tau)$  на всьому проміжку для  $d > 1$  (табл. 1). Зокрема, чим більше значення приведенного коефіцієнта дифузії при  $D_1 > D_0$ , тим більше потік у шаруватій смузі відрізняється від потоку у смузі без прошарків. Крім того, значення потоків в однорідній та неоднорідній смугах на границях тіла

співпадають. Також зауважимо, що при  $d > 1$  потік в однорідній смузі, як і функція  $\langle J(\zeta, \tau) \rangle / J_*$ , досягає мінімальних значень на нижній границі тіла (точка  $\zeta=1$ ), а при  $d < 1$  усереднений потік набуває мінімальних значень в околі точки  $\zeta=0,8$ .

**ВИСНОВКИ.** Таким чином, досліджено потоки домішкової речовини у двофазній випадково неоднорідній смузі з найімовірнішим розташуванням включень біля границь тіла. Крайову задачу масо-



перенесення сформульовано для функції дифузійного потоку. Побудовано інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне вихідній крайовій задачі. Його розв'язок знайдено у вигляді збіжного ряду Неймана та проведено процедуру усереднення за ансамблем конфігурацій фаз. Одержано розрахункову формулу для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз дифузійного потоку домішкових частинок у двофазній смузі з арксинус-розподілом шаруватих включень за нульової початкової концентрації домішки. На прикладі шаруватого композитного матеріалу мідь-залізо досліджено основні закономірності розподілів усередненого потоку домішкової речовини, що мігрує у двофазній смузі з областями найбільш ймовірного розташування включень біля границь тіла.

Отримана розрахункова формула дозволяє проводити комп'ютерне моделювання поширення частинок домішки у випадково неоднорідних структурах, які описуються арксинус-розподілом включень. Зокрема, при моделюванні дифузійних процесів у композитних матеріалах складної внутрішньої конфігурації з метою підбору оптимальних технологічних параметрів, прогнозування їх надійності, стійкості та інших властивостей.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Копань В. Композиційні матеріали. – Київ: Унів. в-во «Пульсари», 2004. – 200 с.
2. Balzannikov M., Mikhasek A. The Use of Modified Composite Materials in Building Hydraulic Engineering Structures // *Procedia Engineering*. – 2014. – V. 91. – P. 183–187.
3. Du J., Cheng H. The fabrication, properties and uses of graphene/polymer composites // *Macromolecular Chemistry and Physics*. – 2012. – V. 213 (10-11). – P. 1060–1077.
4. Castaneda P., Suquet P. Nonlinear composites // *Advances in applied mechanics*. – 1997. – V. 34. – P. 171–302.
5. Sauvage X., Wetscher F., Pareige P. Mechanical alloying of Cu and Fe induced by severe plastic deformation of a Cu–Fe composit // *Acta Materialia*. – 2005. – V. 53(7). – P. 2127–2135.
6. Лукієнко О.І. Структурна геологія. – Київ: Видавництво ТОВ «КНТ», 2008. – 291 с.
7. Кляцкин В. Статистика и реальность в стохастических динамических системах // *Нелинейные волны 2004*. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. – С. 256–286.
8. Чапля Є., Чернуха О. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – Київ: Наук. думка, 2009. – 302 с.
9. Chaplia Y., Chernukha O. Admixture diffusion in a two-phase random nonhomogeneous stratified layer // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. – 2001. – V. 39, № 4. – P. 929–946.
10. Chaplya Y., Chernukha O., Bilushchak Y. Contact initial boundary-value problem of the diffusion of admixture particles in a two-phase stochastically inhomogeneous stratified strip // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2012. – V. 183, No 1. – P. 83–99.
11. Білушак Ю.І. Моделювання других моментів випадкового поля концентрації в півпросторі з експоненціальним розподілом шаруватих включень // *Вісник Кременчуцького національного університету ім. М. Остроградського*. – 2014. – Вип. 6 (89) – С. 71–79.
12. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю., Давидок А.Є. Математичне моделювання дифузійних потоків у випадково неоднорідній шаруватій смузі // *Доповіді НАН України*. – 2012. – № 11. – С. 40–46.
13. Ивашев-Мусатов О. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ФИМА, 2003. – 224 с.
14. Чернуха О.Ю., Білушак Ю.І., Чучвара А.Є. Моделювання дифузійних процесів у стохастично неоднорідних шаруватих структурах. – Львів: Растр-7, 2016. – 262 с.
15. Якубов В. Статистическая радиофизика. – Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 2003. – 120 с.
16. Васильева А., Тихонов Н. Интегральные уравнения. – М.: Физматлит, 2004. – 159 с.

#### MODELING RANDOM MASS FLOWS IN A TWO-PHASE STRIP WITH THE ARCSINE DISTRIBUTION OF LAYERED INCLUSIONS AT ZERO INITIAL CONCENTRATION

**A. Chuchvara**

Centre of Mathematical Modelling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine  
vul. Dudayeva, 15, Lviv, 79005, Ukraine. E-mail: davydoka@gmail.com

**Purpose.** To investigate an admixture random diffusion flow in a two-phase multilayered strip with domains of the most probable disposition of inclusions, locating near the body boundaries. **Methodology.** The structure of layered material is modeled by the probable arcsine distribution. The initial-boundary value problem is formulated for the function of mass flow in the case of zero initial concentration of the migrating substance. The condition for the admixture flow on the lower body boundary is found. An equivalent integro-differential equation is constructed and its solution is found in terms of the Neumann series. Averaging procedure is carried out over the ensemble of phase configurations. **Results.** The formula for the diffusion mass flow averaged over the ensemble of phase configurations in the strip with the arcsine distribution of layered inclusions is obtained. As an example of copper-iron composite, the analysis of dependence of the averaged flow of hydrogen on structure parameters and medium characteristics is carried out. It is established that the increase of the volume fraction of iron in the composite decreases averaged flows of admixture particles in the body. **Originality.** For studying stochastic diffusion flows of admixture particles in the nonhomogeneous structure an original approach is proposed. According to this approach the diffusion equation for the flow of migrating particles is obtained on the basis of equation of mass balance, initial and boundary conditions are

argued. Initial-boundary value problems of diffusion is formulated directly for flow functions. **Practical value.** On the basis on the obtained calculation formula the software module is designed for computation of the averaged diffusion flows of admixture in the two-phase stratified strip with regions of the most probable dispositions of inclusions locating near the body boundaries. This software can be use for choosing optimal parameters in the production of composites, for the modeling of filters, the prediction of pollutants spread in the environment etc. References 16, table 1, figures 7.

**Key words:** diffusion, mass flow, randomly inhomogeneous stratified structure, arcsine distribution, averaging over the ensemble of phase configurations.

## REFERENCES

1. Kopan, V. (2004), *Kompozytsiini materialy* [Composite materials], Pulsary, Kyiv, Ukraine.
2. Balzannikov, M. and Mikhasek, A. (2014) "The Use of Modified Composite Materials in Building Hydraulic Engineering Structures", *Procedia Engineering*, vol. 91, pp. 183–187.
3. Du, J. and Cheng, H. (2012) "The fabrication, properties and uses of graphene/polymer composites", *Macromolecular Chemistry and Physics*, vol. 213 (10-11), pp. 1060–1077.
4. Castaneda, P. and Suquet, P. (1997) "Nonlinear composites", *Advances in applied mechanics*, vol 34, pp. 171–302.
5. Sauvage, X., Wetscher, F. and Pareige, P. (2005) "Mechanical alloying of Cu and Fe induced by severe plastic deformation of a Cu–Fe composit", *Acta Materialia*, vol. 53(7), pp. 2127–2135.
6. Lukiienko, O. I. (2008) *Strukturna heologiiia* [Structural geology], TOV «KNT», Kyiv, Ukraine.
7. Klyatskin, V. (2005) "Statistics and Reality in Stochastic Dynamical Systems", *Nonlinear Waves 2004*, Nizhni Novgorod: IPF. RAN, pp. 256–286.
8. Chaplya, Y. and Chernukha, O. (2009) *Matematychni modeliuvannia u vypadkovykh ta regularnykh strukturakh* [Mathematical modelling diffusive processes in random and regular structures], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
9. Chaplya, Y. and Chernukha, O. (2001) "Admixture diffusion in a two-phase random nonhomogeneous stratified layer", *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 39, no. 4, pp. 929–946.
10. Chaplya, Y., Chernukha, O. and Bilushchak, Y. (2012) "Contact initial boundary-value problem of the diffusion of admixture particles in a two-phase stochastically inhomogeneous stratified strip", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 183, no 1, pp. 83–99.
11. Bilushchak, Y. (2014) "Mathematical modeling second moments of random field of concentration in a semispace with exponential distribution of layed inclusions", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, vol. 6, no. 89, pp. 71–79.
12. Chaplya, Y. Y., Chernukha, O. Y. and Davydok, A.Y. (2012) "Mathematical modeling diffusion flows in a randomly nonhomogeneous stratified strip", *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, no. 11, pp. 40–46.
13. Ivashev-Musatov, O. (2003) *Teoria veroyatnosti i matematicheskaia statistika* [Probability theory and mathematical statistics], FIMA, Moscow, Russian.
14. Chernukha, O., Bilushchak, Y. and Chuchvara, A. (2016) *Modeliuvannia dyfuziinykh procesiv u stokhastychno neodnorodnykh strukturakh* [Modelling the diffusion processes in stochastically nonhomogeneous structures], Rastr-7, Lviv, Ukraine.
15. Jakubov, V. (2003) *Statisticheskaia radiofizika* [Statistical Radiophysics], Publishing House of Tomsk State University, Tomsk, Russia.
16. Vasileva, A. and Tikhonov, N. (2004) *Integralnyye uravneniya* [Integral equations], Fizmatlit, Moscow, Russia.

Стаття надійшла 05.11.2016