

УДК 517.9

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВИБУХУ В АНІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ МЕТОДАМИ КВАЗИКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

А. Я. Бомба, К. М. Малаш

Рівненський державний гуманітарний університет

вул. С. Бандери, 12, м. Рівне, 33000, Україна. E-mail: abomba@ukr.net, katemalash@gmail.com

Узагальнено математичну модель процесу вибуху, що враховує зворотній вплив характеристик процесу (градієнта квазіпотенціалу) на характеристики анізотропного середовища та числовий метод квазиконформних відображень і, зокрема, алгоритм розв'язування відповідних нелінійних крайових задач. При цьому використовуються спеціальні процедури обернення відображень та поетапної параметризації характеристик середовища і процесу (почергового «замороження» шуканих параметрів конформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області), ідеї методу блочної ітерації, що автоматично вирішує проблему побудови гідродинамічної сітки та поля швидкостей, а також дає змогу визначити положення ліній розділу вирви, мало впресованої та впресованої ділянок ґрунту, які утворюються у результаті вибуху. Проведені на основі розробленого алгоритму числові експерименти підтверджують вагомий вплив анізотропії середовища на процес вибуху та його наслідки.

Ключові слова: анізотропне середовище, вибухові процеси, гідродинамічна сітка, квазиконформне відображення, комплексний аналіз, математичне моделювання, числові методи.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЗРЫВА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ МЕТОДАМИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Я. Бомба, Е. Н. Малаш

Ровенский государственный гуманитарный университет

ул. С. Бандеры, 12, г. Ровно, 33000, Украина. E-mail: abomba@ukr.net, katemalash@gmail.com

Обобщается математическая модель процесса взрыва, которая учитывает обратное влияние характеристик процесса (градиента квазипотенциала) на характеристики анизотропной среды и численный метод квазиконформных отображений, в частности, алгоритм решения соответствующих нелинейных краевых задач. При этом используются специальные процедуры оборота отображений и поэтапной параметризации характеристик среды и процесса (поочередного «замораживания» искомым параметров конформности, внутренних и граничных узлов криволинейной области), идей метода блочной итерации, что автоматически решает проблему строения гидродинамической сетки и поля скоростей, а также дает возможность определить положение линий раздела воронки, мало впрессованной и прессованной зон ґрунта, образующихся в следствие взрыва. Проведенные на основании разработанного алгоритма численные эксперименты подтверждают веское влияние анизотропии среды на процесс взрыва и его последствия.

Ключевые слова: анизотропная среда, процессы взрыва, гидродинамическая сетка, квазиконформные отображения, комплексный анализ, математическое моделирование, численные методы.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. На сучасному етапі розвитку видобування корисних копалин, зокрема, нафти та природного газу, досить поширеною є практика використання вибухових речовин. Це зумовлено тим, що багато родовищ уже майже виснажені, і подальша їх експлуатація потребує застосування додаткових методів для видобутку копалин з важко досяжних родовищ. У низці робіт запропоновано методику використання двофазної фільтрації та нагнітальних свердловин для витіснення нафти та природного газу [1–2]. Також досить поширеною є практика подрібнення твердої породи, яка перешкоджає легкому доступу до потрібних копалин. Для досягнення цієї мети досить часто використовують вибухові процеси. При цьому дуже важливою є проблема правильного розрахунку технологічних параметрів використовуваної вибухової речовини, при яких буде максимально досягнуто потрібний ефект при мінімальних затратах. Адже, неправильні розрахунки можуть призвести до катастрофічних наслідків, особливо, коли неподалік знаходяться житлові споруди. Тому питання вибору моделі вибухового процесу є вкрай актуальним.

Одними з найпоширеніших моделей дії вибуху в середовищі є рідинна [3] та твердо-рідинна [4]. У

них пористе середовище моделюється як нестискуюча ідеальна рідина, а поле швидкостей, яке виникає у ньому в результаті вибуху, вважається потенціальним. Досліджуючи моделі такого типу, вихідну задачу можна звести до крайової задачі теорії аналітичних функцій, та розв'язувати її методами теорії функцій комплексної змінної [5–6]. Однак отримання аналітичних розв'язків можливе далеко не у всіх випадках, що зумовлено нелінійністю математичної моделі (через неоднорідність середовища (ґрунту) та складну геометрію досліджуваної області). Тому для отримання розв'язків використовують числові методи конформних [4] та квазиконформних [7] відображень. Поле, яке утворюється у результаті вибуху, далеке від ідеального, оскільки окремі ділянки є близькими до «порожнин» - вирви, мало впресовані та впресовані зони ґрунту. Отже, є необхідність врахування зворотного впливу характеристик процесу (градієнта квазіпотенціалу) на характеристики середовища (фіктивний коефіцієнт провідності, який характеризує здатність частинки «підніматися»), що зумовлює нелінійність задачі. У роботі [8] розв'язується такого типу крайова задача теорії вибуху для ізотропного середовища. До того ж, у ряді випадків перед застосуванням вибуху доцільно

створити так звану, «штучну», анізотропію середовища, скажімо, шляхом створення додаткових свердловин чи закачування певної речовини, зокрема, води. У такому разі можна застосовувати вибух меншої сили, або ж «розчистити» більшу територію.

У цій роботі узагальнено алгоритм розв'язування такого роду крайових задач теорії вибуху, що ґрунтується на використанні спеціальних процедур обертання квазіконформних відображень, поетапної параметризації характеристик середовища і процесу, ідеї методу блочної ітерації на випадок анізотропних середовищ [9–10].

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Нехай у деяку область G_z ($z = x + iy$) поміщено заряд заданої форми з постійним квазіпотенціалом на ньому. Процес руху частинок описується за допомогою рівняння руху $\vec{v} = k \text{grad} \varphi$ та рівняння нерозривності $\text{div} \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ – швидкість руху частинок, а $\varphi = \varphi(x, y) = -P / \rho$ – квазіпотенціал відповідного поля, ρ – густина середовища, $P = \int_0^{t_0} p dt$ – імпульс тиску [2], p – тиск,

що діє впродовж часу t_0 ,

$$k = \begin{pmatrix} k_{11}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) & k_{12}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \\ k_{21}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) & k_{22}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \end{pmatrix} - \text{коefficient}$$

провідності середовища (що характеризує здатність частинок підніматися). Вважатимемо, що область вибуху обмежена такими контурами (рис. 1): $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = x_*(t), y = y_*(t), \alpha_* < t < \beta_*\}$ – контур заряду, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = x^*(t), y = y^*(t), \alpha^* < t < \beta^*\}$, де $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$.

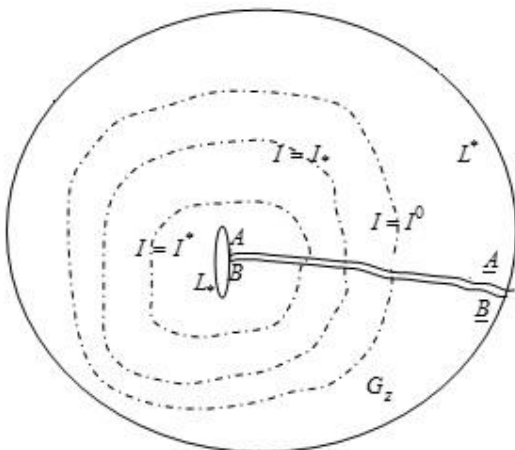


Рисунок 1 – Фізична область вибуху

Змодельємо процес вибуху аналогічно до [8] – враховуючи взаємовплив величини градієнта $I = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ квазіпотенціалу $\varphi = \varphi(x, y)$ та тензора

провідності $k = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$ і формування ділянок (Рисунок 1), у яких проводиться корекція останнього в залежності від значень I за наступною формулою:

$$k_{rs} = k_{0rs} + \frac{1}{2} \beta_{rs} (I - I^*) \left((I - I^0) + |I - I^0| \right), \quad (1)$$

($r, s = 1, 2$),

де I^0, I^* – критичні значення градієнта, які характеризують затримку та відрив частинок (положення лінії розділу), тензор параметрів $\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$, який характеризує зміну анізотропії середовища, підбирається виходячи з фізичного експерименту [11]. Залежності елементів тензора провідності від величини градієнта вздовж однієї з ліній течії схематично зображено на рис. 2, де I_* – критичне значення градієнта, що відповідає значенню елемента тензора провідності $k_{rs*} = k_{0rs} + \beta_{rs} (I_* - I^*) (I_* - I^0)$.

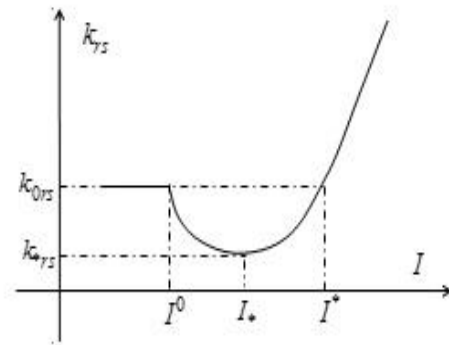


Рисунок 2 – Схематичний розподіл елементів тензора провідності, в залежності від значень потенціалу

Ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ (як описано у [7]), зафіксувавши на внутрішньому контурі області деяку точку $A = B \in L_*$ та здійснивши умовний розріз досліджуваної області вибуху вздовж однієї (поки що – невідомої; вона уточнюватиметься в процесі розв'язування задачі) з ліній течії (через AA' та BB' на Рисунку 1 позначено, відповідно, верхній та нижній береги розрізу), отримаємо (при фіксованому k) задачу на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [7] утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z / AA'$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром Q :

$$\begin{aligned} \kappa_{11}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{12}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \kappa_{21}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{22}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ (x, y) \in G_z^0. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AA} = 0,$$

$$\psi|_{BB} = Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy.$$

Відповідна обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин (виконання яких вимагатимемо і на розрізі для врахування їх «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω) характеристичної функції течії при невідомому положенні розрізу та значенні Q одержимо у вигляді:

$$\begin{aligned} \kappa_{11} \left(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12} \left(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa_{21} \left(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22} \left(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \\ (\varphi, \psi) \in G, \quad J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varphi^* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \\ \varphi^* < \varphi < \varphi^*. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{21} \kappa_{12}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\kappa_{12}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa_{21}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{21} \kappa_{12}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\kappa_{21}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa_{12}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Алгоритм числового розв'язування поставленої задачі побудуємо аналогічно до [10] та [8]. А саме: різницеві аналоги рівнянь (6), крайових умов (4), а також додаткові умови для граничних та приграничних вузлів у відповідній рівномірній сітковій області $G'_\omega = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi^* + i \cdot \Delta\varphi, i = \overline{0, n}; \psi_j = j \cdot \Delta\psi, j = \overline{0, m}; \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi^*}{n},$

$$\Delta\psi = \frac{Q}{m}, \quad \gamma = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi} \left. \vphantom{\Delta\psi} \right\} \text{запишемо, відповідно, у вигляді:}$$

$$\left. \begin{aligned} &\sigma \left(\widehat{a}_{i+1, j+1} x_{i+1, j+1} - (\widehat{a}_{i+1, j+1} + \widehat{a}_{i, j+1}) x_{i, j+1} + \right. \\ &+ \widehat{a}_{i, j+1} x_{i-1, j+1} \left. \right) + (1 - 2\sigma) \left(\widehat{a}_{i+1, j} x_{i+1, j} - \right. \\ &- (\widehat{a}_{i+1, j} + \widehat{a}_{i, j}) x_{i, j} + \widehat{a}_{i, j} x_{i-1, j} \left. \right) + \\ &+ \sigma \left(\widehat{a}_{i+1, j-1} x_{i+1, j-1} - (\widehat{a}_{i+1, j-1} + \widehat{a}_{i, j-1}) x_{i, j-1} + \right. \\ &+ \widehat{a}_{i, j-1} x_{i-1, j-1} \left. \right) + \gamma^2 \left(\sigma \left(\widehat{b}_{i+1, j+1} x_{i+1, j+1} - \right. \right. \\ &+ (\widehat{b}_{i+1, j+1} + \widehat{b}_{i+1, j}) x_{i+1, j} + \widehat{b}_{i+1, j} x_{i, j+1} \left. \right) + \\ &+ (1 - 2\sigma) \left(\widehat{b}_{i, j+1} x_{i, j+1} - (\widehat{b}_{i, j+1} + \widehat{b}_{i, j}) x_{i, j} + \right. \\ &+ \widehat{b}_{i, j} x_{i, j-1} \left. \right) + \sigma \left(\widehat{b}_{i-1, j+1} x_{i-1, j+1} - (\widehat{b}_{i-1, j+1} + \right. \\ &+ \widehat{b}_{i-1, j}) x_{i-1, j} + \widehat{b}_{i-1, j} x_{i-1, j-1} \left. \right) \left. \right) + \\ &+ \gamma \left(\widehat{c}_{i+1, j} (x_{i+1, j+1} - x_{i+1, j-1}) - \widehat{c}_{i-1, j} (x_{i-1, j+1} - \right. \\ &- x_{i-1, j-1}) - \widehat{d}_{i, j+1} (x_{i+1, j+1} - x_{i-1, j+1}) \left. \right) + \\ &+ \widehat{d}_{i, j-1} (x_{i+1, j-1} - x_{i-1, j-1}) / 4 = 0, \\ &\sigma \left(\widetilde{a}_{i+1, j+1} y_{i+1, j+1} - (\widetilde{a}_{i+1, j+1} + \widetilde{a}_{i, j+1}) y_{i, j+1} + \right. \\ &+ \widetilde{a}_{i, j+1} y_{i-1, j+1} \left. \right) + (1 - 2\sigma) \left(\widetilde{a}_{i+1, j} y_{i+1, j} - \right. \\ &+ (\widetilde{a}_{i+1, j} + \widetilde{a}_{i, j}) y_{i, j} + \widetilde{a}_{i, j} y_{i-1, j} \left. \right) + \\ &+ \sigma \left(\widetilde{a}_{i+1, j-1} y_{i+1, j-1} - (\widetilde{a}_{i+1, j-1} + \widetilde{a}_{i, j-1}) y_{i, j-1} + \right. \\ &+ \widetilde{a}_{i, j-1} y_{i-1, j-1} \left. \right) + \gamma^2 \left(\sigma \left(\widetilde{b}_{i+1, j+1} y_{i+1, j+1} - \right. \right. \\ &- (\widetilde{b}_{i+1, j+1} + \widetilde{b}_{i+1, j}) y_{i+1, j} + \widetilde{b}_{i+1, j} y_{i+1, j-1} \left. \right) + \\ &+ (1 - 2\sigma) \left(\widetilde{b}_{i, j+1} y_{i, j+1} - (\widetilde{b}_{i, j+1} + \widetilde{b}_{i, j}) y_{i, j} + \right. \\ &+ \widetilde{b}_{i, j} y_{i, j-1} \left. \right) + \sigma \left(\widetilde{b}_{i-1, j+1} y_{i-1, j+1} - \right. \\ &- (\widetilde{b}_{i-1, j+1} + \widetilde{b}_{i-1, j}) y_{i-1, j} + \widetilde{b}_{i-1, j} y_{i-1, j-1} \left. \right) \left. \right) + \\ &+ \gamma \left(-\widetilde{c}_{i+1, j} (y_{i+1, j+1} - y_{i+1, j-1}) + \widetilde{c}_{i-1, j} (y_{i-1, j+1} - \right. \\ &- y_{i-1, j-1}) + \widetilde{d}_{i, j+1} (y_{i+1, j+1} - y_{i-1, j+1}) - \\ &- \widetilde{d}_{i, j-1} (y_{i+1, j-1} - y_{i-1, j-1}) \left. \right) / 4 = 0, \\ & \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{i, j} &= ac \left(\frac{1}{\kappa_{i, j}^{11}} \right), \quad \widehat{b}_{i, j} = bd \left(\frac{\kappa_{i, j}^{11} \kappa_{i, j}^{22} - \kappa_{i, j}^{21} \kappa_{i, j}^{12}}{\kappa_{i, j}^{11}} \right), \\ \widehat{c}_{i, j} &= ac \left(\frac{\kappa_{i, j}^{12}}{\kappa_{i, j}^{11}} \right), \quad \widehat{d}_{i, j} = bd \left(\frac{\kappa_{i, j}^{21}}{\kappa_{i, j}^{11}} \right), \\ \widetilde{a}_{i, j} &= ac \left(\frac{1}{\kappa_{i, j}^{22}} \right), \quad \widetilde{b}_{i, j} = bd \left(\frac{\kappa_{i, j}^{11} \kappa_{i, j}^{22} - \kappa_{i, j}^{21} \kappa_{i, j}^{12}}{\kappa_{i, j}^{22}} \right), \end{aligned}$$

$$\check{c}_{i,j} = ac \left(\frac{\kappa_{i,j}^{21}}{\kappa_{i,j}^{22}} \right), \quad \check{d}_{i,j} = bd \left(\frac{\kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{22}} \right);$$

$$ac(k_{i,j}) = \frac{k_{i,j} + k_{i-1,j}}{2}, \quad bd(k_{i,j}) = \frac{k_{i,j} + k_{i,j-1}}{2}.$$

$$\kappa_{i,j}^{rs} = \kappa_{rs} \left(\frac{2\Delta\phi(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{J_{i,j}}, \frac{2\Delta\phi(x_{i,j-1} - x_{i,j+1})}{J_{i,j}} \right).$$

$$J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}),$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -f'_{*x}(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) + f'_{*y}(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = \sqrt{f'^2_{*x}(x_{0,j}, y_{0,j}) + f'^2_{*y}(x_{0,j}, y_{0,j})} \times \\ & \times \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{*0,j}}, \\ & f'^{*x}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f'^{*y}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = \\ & = \sqrt{f'^2_{*x}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) + f'^2_{*y}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})} \times \\ & \times \sqrt{(x_{i,n} - x_{i,n+1})^2 + (y_{i,n} - y_{i,n+1})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta^*_{i,n+1}}, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

де

$$\cos \Theta = \left(\kappa_{11} f_x'^2 + (\kappa_{12} + \kappa_{21}) f_x' f_y' + \kappa_{22} f_y'^2 \right) / \left(f_x'^2 + f_y'^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\kappa_{11} f_x' + \kappa_{12} f_y' \right)^2 + \left(\kappa_{21} f_x' + \kappa_{22} f_y' \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Формулу для наближення величини γ одержимо на підставі умови «квазіконформної подібності» елементарних чотирикутників [6] двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{a_{i,j} + a_{i+1,j}}, \quad (9)$$

$$\text{де } \alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$a_{i,j} = \left(\left(\kappa_{11} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{12} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) \right)^2 + \left(\kappa_{21} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{22} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Числову реалізацію алгоритму здійснюємо наступним чином. Спочатку задаємо параметри розбиття області G_ω : n та m , критичні значення потенціалу I^* , I^0 , параметри ε_1 , ε_2 , ε_3 , що характеризують точність розв'язання різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$ (при цьому слідкуємо за виконанням умов (4)) та внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ (наприклад, рівномірно поділивши

відрізки із кінцями в точках $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$.

Тоді за формулою (9) знаходимо початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ квазіконформного інваріанту γ . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(\alpha)}, y_{i,j}^{(\alpha)})$ із заданою точністю ε_1 (α – номер загальної ітерації) з допомогою ітераційних схем типу «хрест», отриманих шляхом розв'язання (7) стосовно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. При цьому необхідні значення градієнту напору та тензора проникності k у вузлах сітки G_ω' обчислюються через значення $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ з попереднього кроку ітерації. Підправляємо граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (8), наприклад, методом Ньютона. Якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену α -ту загальну ітерацію

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\alpha)} - x_{i,j}^{(\alpha-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\alpha)} - y_{i,j}^{(\alpha-1)})^2} \quad ((i,j) - \text{індекси координат граничних вузлів})$$

більша за ε_2 , то повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів. У протилежному випадку знаходимо нові наближення $Q^{(L)}$ та $\gamma^{(L)}$ величин Q та γ за формулою (9) та умовою зв'язку між ними: $Q = m\Delta\phi \cdot \gamma$. Якщо

$$|Q^{(L)} - Q^{(L-1)}| > \varepsilon_3, \quad \text{то знову повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів, інакше – обчислюємо нев'язку «квазіконформності» отриманої сітки}$$

$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1 , δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (3):

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_1 &= \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - k_{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, \\ \delta_2 &= \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + k_{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|. \end{aligned} \right.$$

Відповідний алгоритм числового розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT.

Числові розрахунки проведено для області, обмеженої контурами $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = 40 + 30\cos(t), y = 5 + 20\sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ – контур заряду,

$$L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = 150\cos(t), y = 100\sin(t), 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$\text{при } \varphi_* = 0, \quad \varphi^* = 1, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 \\ 0,15 & 0,06 \end{pmatrix},$$

$$n \times m = 18 \times 30, \quad I^* = 6, \quad I^0 = 0.6.$$

Порівняємо результати числових експериментів при різних значеннях тензора провідності у початковий момент часу (тут, як і в [9], ітераційні наближення відповідного процесу взаємовпливу можемо пов'язувати з часом). «Відштовхуємося» від значень тензора проникності для ізотропного середовища, а саме: k_0 задамо наступним чином

$k_0 = k_{0rs(2x2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Відповідний ситуаційний

стан (зокрема, гідродинамічну сітку поля), що виникає у результаті вибуху в такому середовищі, зображено на рис. 3 а). При цьому повна витрата $Q = 0,688$.

У випадку, коли анізотропія має чітко виражений характер, а саме: коли $k_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix}$, зображено на рис. 3 б). У цьому випадку $Q = 0,755$.

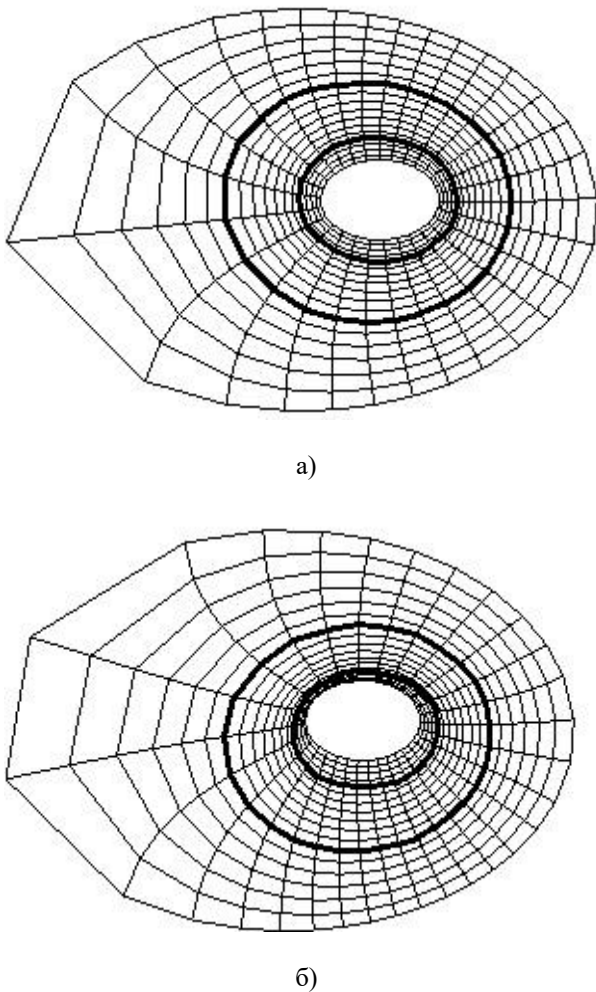


Рисунок 3 – Гідродинамічна сітка для випадку:
а) ізотропного; б) анізотропного середовища

ВИСНОВКИ. Узагальнено математичну модель процесу вибуху, що враховує зворотній вплив характеристик процесу (градієнта квазіпотенціалу) на характеристики анізотропного середовища, та числовий метод квазіконформних відображень і, зокрема, алгоритм розв'язування відповідних нелінійних крайових задач. При цьому використовуються спеціальні процедури обернення відображень та поетапної параметризації характеристик середовища і процесу (почергового «замороження» шуканих параметрів конформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області), ідеї методу блочної ітерації, що автоматично вирішує проблему побудови гідродинамічної сітки та поля швидкостей, а також дає змогу визначити положення ліній розділу

вирви, мало впресованої та впресованої ділянок ґрунту, які утворюються у результаті вибуху.

Результати числових експериментів, проведених як для випадку ізотропного середовища, так і для середовища з чітко вираженою анізотропією, показали, що остання має суттєвий вплив на повну витрату та розмір вирви. Тому, при застосуванні вибухів для подрібнення твердої породи та її «розчистки» буває доцільно спочатку штучно посилити анізотропію середовища. Особливо це доречно у випадках, коли потрібен цілеспрямований вибух (з посиленою дією у певному напрямку).

У перспективі є ідентифікація параметрів процесу вибуху, зокрема, знаходження місця розміщення заряду, а також розв'язання відповідних просторових задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення в просторово викривлених нафтогазових пластах / А.Я. Бомба, А.В. Теревус, С.В. Ярошак // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук. – 2011. Вип. 5 (70). – С. 23–27.
2. Ярошак С.В. Математичне моделювання двофазної фільтрації в просторово викривлених нафтогазових пластах // Волинський математичний вісник. Серія «Прикладна математика». – Вип. 8(17). – 2011. – С. 3–9.
3. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопечкий. – Київ: Наукова думка, 2007. – 308 с.
4. Булавацький В.М., Лучко І.А. Некоторые обратные задачи импульсно-гидродинамической теории взрыва на выброс // Исследования по крайевым задачам гидродинамики и теплофизики. – Киев, 1979. – С. 53–64.
5. Blair David E. Inversion theory and conformal mapping. – American Mathematical Society, 2000. – 152 p.
6. Nearling James. Mathematical tools for physics. – Miami, 2008. – 594 p.
7. Методи комплексного аналізу: монографія / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
8. Бомба А.Я., Сінчук А.М. Застосування квазіконформних відображень до математичного моделювання процесів вибуху // Волинський математичний вісник. – Серія «Прикладна математика». – Вип. 8. – С.32–41.
9. Пригорницький Д.О. Модифікація алгоритму чисельного розв'язування одного класу нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення в двозв'язних деформованих середовищах // Волинський математичний вісник. Серія «Прикладна математика». – Вип. 9. – 2002. – С. 60–66.
10. Бомба А.Я., Каштан С.С. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2001.- Вип. 4. – С. 160–174.
11. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення в

умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища / А.Я. Бомба, В.В. Скопец-кий, Д.О. Пригорницький // Вісник Київського уні-

верситету. Серія: Фізико-математичні науки.- 2003.- Вип. 1. – С. 126-135.

MODELING OF THE EXPLOSION PROCESS IN AN ANISOTROPIC MEDIUM WITH QUASICONFORMAL MAPPING METHODS

A. Bomba, K. Malash

Rivne State University of Humanities

vul. Stepan Bandera's, 12, Rivne, 33000, Ukraine. E-mail: abomba@ukr.net, katemalash@gmail.com

Purpose. At the present stage of development of mining of minerals, in particular, oil and natural gas, the practice of using explosives is quite common. It's very important to develop and create the new mathematical models of the explosion processes. The article deals with a mathematical model of the explosion process. **Methodology.** This model based on the using of the quasiconformal mapping method and takes into account the influence of the quasi-potential gradient and permeability of the medium. **Originality.** A mathematical model and algorithm for solving such kind of nonlinear boundary value problems for isotropic porous media were modified for the case of anisotropic ones. Using the method of quasiconformal mappings based on solving the inverse problem instead of the direct one by gradually parametrizing the characteristics of the environment and process. This method automatically solves the problem of constructing a hydrodynamic mesh and speed field, and also allows to determine the position of the lines of the section of the hole, the slightly pressed and pressed soil areas that are formed as a result of the explosion. **Practical value.** The results of investigation can be used for the mining of minerals, specially nature gas and oil. **Conclusion.** A number of numerical experiments were conducted based on the developed algorithm. The obtained results are compared with the results for the case of an isotropic medium. The influence of the anisotropy of the porous medium on the explosion process and its consequences is analyzed. Their results showed that with a clearly pronounced anisotropy of the medium, the total flow rate is smaller and the vortex is slightly larger, moreover, it is slightly offset relative to the charge loop. In the long run - simulation of explosive processes, in which the shape of the hole is predetermined, and it is necessary to find the power, shape and location of the "tabs" of the projectile, as well as the nature and degree of anisotropy of the medium. It is also promising to transfer the developed methodology to a three-dimensional case.

Key words: anisotropic medium, explosion processes, hydrodynamic mesh, quasiconformal mapping, complex analysis, mathematical modelling, numerical methods.

REFERENCES

1. Bomba, A. Ya., Terebus, A. V., Yaroshchack, S. V. (2011), "Mathematical modeling of nonlinear displacement processes in spatially distorted oil and gas layers", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, vol. 5, no. 70, pp. 23-27.
2. Yaroshchack, S. V. (2011), "Mathematical modeling of two-pipe filtration in spatially distorted oil and gas layers", *Volynskiy matematychniy visnyk*, vol. 8, no. 17, pp. 3 – 9.
3. Bomba, A. Ya., Bulavatskiy, V. M., Skopetskiy, V. V. (2007), *Neliniyni matematichni modeli protsesiv geohidrodinamiki* [Nonlinear mathematical models of processes of geohydrodynamics], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
4. Bulavatskiy, V. M., Lucheko, I. A. (1979), "Some inverse problems of the pulsed-hydrodynamic theory of explosion on the discharge", *Issledovaniya po krayeivym zadacham hidrodinamyky i teplofizyky*, Kyiv, pp. 53-64.
5. Blair, D. E. (2000), "Inversion theory and conformal mapping", American Mathematical Society, USA.
6. Nearling J. (2008), "Mathematical tools for physics", Miami, USA.
7. Bomba, A. Ya., Kashtan, S. S., Prigornitskiy, D. O., Yaroshchack, S. V. (2013), *Metody kompleksnogo analizu* [Complex analysis methods], NUVMNU, Rivne, Ukraine.
8. Bomba, A. Ya., Snchuck, A. M. (2011), "Using of quasiconformal mappings to mathematical modeling of explosion processes", *Volynskiy matematychniy visnyk*, vol. 8, no. 17, pp. 32-41.
9. Prigornitskiy, D. O. (2002), "Modification of the algorithm for numerical solving a class of nonlinear modeling boundary value problems on quasi-conformal mappings in two-coupling deformable media" *Volynskiy matematychniy visnyk*, vol. 9, no. 18, pp. 60 – 66.
10. Bomba, A. Ya., Kashyan, S. S. (2001) "Nonlinear inverse boundary value problems on quasi-conformal mappings in anisotropic media", *Visnyk Kiivskogo univrsytetu*. vol. 4, pp. 160-174.
11. Bomba, A. Ya., Skopetskiy, V. V. and Prigornitskiy, D. O. (2003), "Numerical solution of nonlinear modeling boundary value problems on quasi-conformal mapping", *Visnyk Kiivskogo univrsytetu*, vol. 1, pp. 126-135.

Стаття надійшла 08.06.2017.