

## УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЛОВОГО МЕТОДУ КВАЗИКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЗА ДАНИМИ ТОМОГРАФІЇ ПРИКЛАДЕНИХ КВАЗИПОТЕНЦІАЛІВ

**М. В. Бойчура**

Рівненський державний гуманітарний університет

вул. Ст. Бандери, 12, м. Рівне, 33028, Україна. E-mail: mboichura@gmail.com

Розглянуто задачу ідентифікації параметрів коефіцієнта провідності неоднорідного середовища за даними томографії прикладених квазіпотенціалів. Пропонується варіант узагальнення методу реконструкції зображення, суть якого полягає у почерговому розв'язуванні задач аналізу (на основі числових методів квазіконформних відображень) і задач синтезу (параметричної ідентифікації) шляхом збільшення кількості ділянок прикладання квазіпотенціалів. На основі проведених числових розрахунків побудовано реконструйоване зображення розподілу провідності у внутрішності досліджуваного об'єкта при серії інжекцій для областей з двома та трьома ділянками прикладання квазіпотенціалів. Запропонований підхід суттєво підвищує точність розв'язку, хоч у низці випадків дещо збільшує час виконання програми.

**Ключові слова:** томографія прикладених квазіпотенціалів, квазіконформні відображення, ідентифікація, нелінійні задачі, числові методи.

## ОБОБЩЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПО ДАННЫМ ТОМОГРАФИИ ПРИЛОЖЕННЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

**М. В. Бойчура**

Ровенский государственный гуманитарный университет

ул. Ст. Бандеры, 12, г. Ровно, 33028, Украина. E-mail: mboichura@gmail.com

Рассматривается задача идентификации параметров коэффициента проводимости неоднородной среды по данным томографии приложенных квазіпотенциалов. Предлагается вариант обобщения метода реконструкции изображения, суть которого заключается в поочередном решении задач анализа (на основе численных методов квазіконформных отображений) и задач синтеза (параметрической идентификации) путем увеличения количества участков приложения квазіпотенциалов. На основе проведенных численных расчетов построено реконструированное изображение распределения проводимости во внутренности исследуемого объекта при серии инъекций для областей с двумя и тремя участками приложения квазіпотенциалов. Предложенный подход существенно повышает точность решения, хотя в ряде случаев несколько увеличивает время выполнения программы.

**Ключевые слова:** томография приложенных квазіпотенциалов, квазіконформные отображения, идентификация, нелинейные задачи, численные методы.

**АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ.** На сьогоднішній день існує велика кількість методів реконструкції зображень, які застосовуються для багатьох типів об'єктів дослідження (у промисловості, геофізиці, медицині тощо) та для отримання різного роду інформації про них. До основних критеріїв, які характеризують ці підходи, належать: складність, шкідливість, роздільна здатність та ціна. Одним із досить простих, безпечних, дешевих та гнучких методів візуалізації є електроімпедансна томографія (ЕІТ). Її ідея полягає у визначенні розподілу внутрішньої провідності досліджуваного об'єкта за даними замірами на межі [1–12]. Це, зокрема, дає можливість проводити неінвазивні дослідження об'єкта.

Відновлення провідності за допомогою ЕІТ є нелінійною і некоректною оберненою коефіцієнтною задачею, розв'язанню якої присвячено значну кількість робіт як закордонних, так і вітчизняних вчених [1–12]. Зокрема, у ряді робіт [5, 8] розвинено метод прикладених квазіпотенціалів реконструкції зображень, згідно з яким, розв'язання послідовності так званих задач аналізу та синтезу зводиться до почергового застосування числових методів квазіконформних відображень та розв'язування задач параметричної ідентифікації. На цій основі розроблено методологію послідовної ідентифікації параметрів коефіцієнта провідності (КП) із використанням,

зокрема, спеціально розробленої процедури розв'язування відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь [8]. З іншого боку, в [13] запропоновано метод побудови квазіконформного відображення за умови наявності кількох додаткових джерел збурення вихідної течії (рис. 1).

Метою роботи є розвинення методу прикладених квазіпотенціалів реконструкції зображення. При цьому, для простоти викладу, задаються всього три еквіпотенціальні ділянки на межі області (рис. 2).

**МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ.** Розглянемо квазіідеальні процеси руху частинок (зокрема, електричних зарядів) в однозв'язній криволінійній області (пластинці, томографічному перерізі тощо)  $G_z$  (рис. 2,а), обмеженій гладкою замкненою кривою  $\partial G_z = \{(x, y) : x = \tilde{x}(\tau), y = \tilde{y}(\tau), 0 \leq \tau \leq 2\pi, \tilde{x}(0) = \tilde{x}(2\pi) = \tilde{x}_0, \tilde{y}(0) = \tilde{y}(2\pi) = \tilde{y}_0, \text{ де } \tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau) \text{ – визначені неперервно диференційовані функції, } O(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \text{ – задана початкова точка відліку}\}$ , при умовах:

$$\begin{aligned} \varphi|_{A_p B_p} &= \varphi_*^{(p)}, & \varphi|_{M_p N_p} &= \varphi^{\circ(p)}, & \varphi|_{C_p D_p} &= \varphi^{*(p)} \\ (\varphi^{*(p)} - \varphi_*^{(p)}) &> 0, & \varphi_*^{(p)} &< \varphi^{\circ(p)} < \varphi^{*(p)}, & \varphi_*^{(p)}, \varphi^{\circ(p)}, \end{aligned}$$

$\varphi^{*(p)}$  – прикладені квазіпотенціали,  
 $\left. \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} \right|_{B_p M_p} = \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} \right|_{N_p C_p} = \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} \right|_{A_p D_p} = 0$  (непрони-  
 кності) та додаткових умовах:  
 $\varphi^{(p)}(\tilde{M})|_{B_p M_p} = \bar{\varphi}^{(p)}(\tilde{M}), \quad \varphi^{(p)}(\tilde{M})|_{N_p C_p} =$   
 $= \varphi'^{(p)}(\tilde{M}), \quad \varphi^{(p)}(\tilde{M})|_{A_p D_p} = \underline{\varphi}^{(p)}(\tilde{M}),$   
 $\sigma \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}(\tilde{M})}{\partial n} \right|_{A_p B_p} = \psi_*^{(p)}(\tilde{M}), \quad \sigma \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}(\tilde{M})}{\partial n} \right|_{M_p N_p} =$   
 $= \psi^{\circ(p)}(\tilde{M}), \quad \sigma \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}(\tilde{M})}{\partial n} \right|_{C_p D_p} = \psi^{*(p)}(\tilde{M})$  [2, 5, 8,  
 9], де  $\tilde{M}$  – біжуча точка відповідної кривої;  
 $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$  – квазіпотенціал поля такий, що  
 $A_p B_p, M_p N_p$  та  $C_p D_p$  – еквіпотенціальні лінії;  
 $B_p M_p, N_p C_p$  та  $A_p D_p$  – непроникині граничні лінії  
 течій;  $A_p, B_p, M_p, N_p, C_p, D_p$  – відмічені точки на  
 $\partial G_z$ ;  $p=1, 2, \dots$  – номер інжекції [5, 8];  $\bar{n}$  – одини-  
 чний вектор зовнішньої нормалі [13];  $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x, y)$  – функції течії. Функції  
 $\bar{\varphi}^{(p)}(\tilde{M}) = \bar{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$  ( $\tau_M^{(p)} \leq \tau \leq \tau_B^{(p)}$ ),  $\varphi'^{(p)}(\tilde{M}) =$   
 $= \varphi'^{(p)}(\tau, \dots)$  ( $\tau_C^{(p)} \leq \tau \leq \tau_N^{(p)}$ ),  $\underline{\varphi}^{(p)}(\tilde{M}) = \underline{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$   
 ( $\tau_A^{(p)} \leq \tau \leq \tau_D^{(p)}$ ),  $\psi_*^{(p)}(\tilde{M}) = \psi_*^{(p)}(\tau, \dots)$

$(\tau_B^{(p)} \leq \tau \leq \tau_A^{(p)})$ ,  $\psi^{\circ(p)}(\tilde{M}) = \psi^{\circ(p)}(\tau, \dots)$   
 $(\tau_N^{(p)} \leq \tau \leq \tau_M^{(p)})$ ,  $\psi^{*(p)}(\tilde{M}) = \psi^{*(p)}(\tau, \dots)$   
 $(\tau_D^{(p)} \leq \tau \leq \tau_C^{(p)})$ , як і в [8], можуть бути побудовані  
 шляхом інтерполювання експериментально отрима-  
 них їх значень  $\bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \varphi'_{i'^{(p)}}^{(p)}, \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, \psi_{j^{\circ(p)}}^{\circ(p)}$ ,  
 $\psi_{j^{*(p)}}^{*(p)}$  при деяких  $\tau = \bar{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \tau = \tau'_{i'^{(p)}}^{(p)}, \tau = \underline{\tau}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)},$   
 $\tau = \tau_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, \tau = \tau_{j^{\circ(p)}}^{\circ(p)}, \tau = \tau_{j^{*(p)}}^{*(p)}$  на ділянках  $B_p M_p,$   
 $N_p C_p, A_p D_p, A_p B_p, M_p N_p, C_p D_p$ , відповідно  
 $(\varphi_*^{(p)} \leq \bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi^{\circ(p)}, \quad \bar{\varphi}^{(p)} \leq \varphi'_{i'^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi^{*(p)},$   
 $\varphi_*^{(p)} \leq \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi^{*(p)}, \quad \psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)} > 0, \quad \psi_{j^{\circ(p)}}^{\circ(p)} > 0,$   
 $\psi_{j^{*(p)}}^{*(p)} > 0, \quad 0 \leq \bar{i}^{(p)} \leq \bar{m}^{(p)}, \quad 0 \leq i'^{(p)} \leq m'^{(p)},$   
 $0 \leq \underline{i}^{(p)} \leq \underline{m}^{(p)}, \quad 0 \leq j_*^{(p)} \leq n_*^{(p)}, \quad 0 \leq j^{\circ(p)} \leq n^{\circ(p)},$   
 $0 \leq j^{*(p)} \leq n^{*(p)})$ . КП шукаємо у вигляді [8]:

$$\sigma(x, y, a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{s,0}, a_{s-1,1}, \dots, a_{0,s}) =$$

$$= \sum_{k=0}^s \sum_{r=0}^k a_{k-r,r} x^{k-r} y^r, \quad (1)$$

де  $a_{k-r,r}$  ( $k=0, \dots, s, r=0, \dots, k$ ) – параметри, що  
 визначаються в процесі розв'язання задачі.

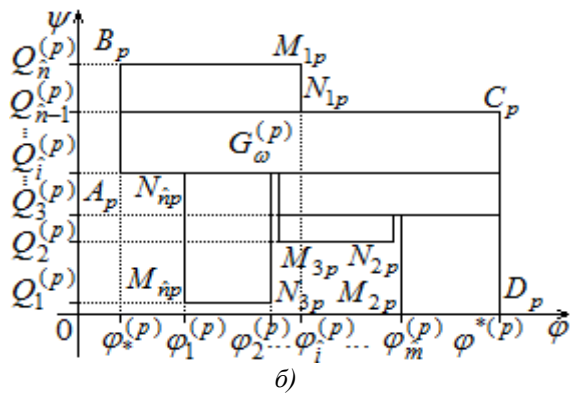
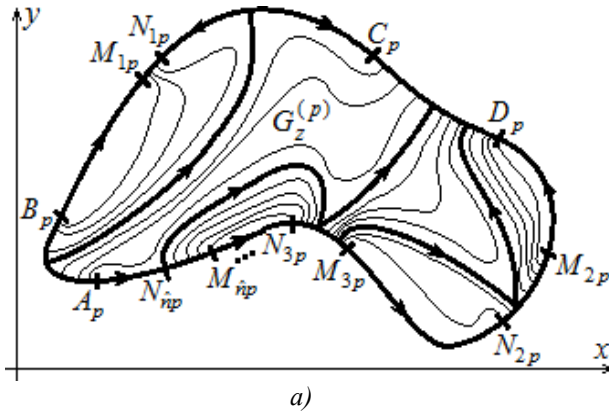


Рисунок 1 – Типові фізична область (а) та область комплексного квазіпотенціалу (б)

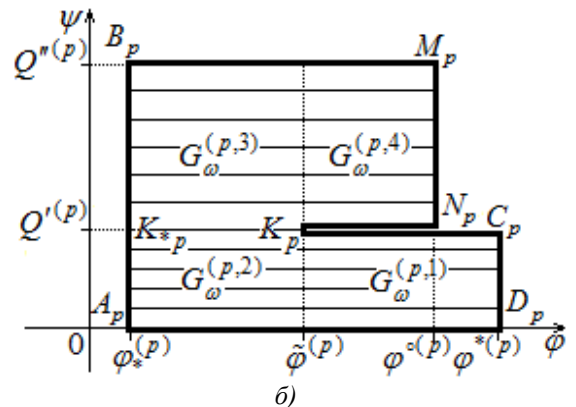
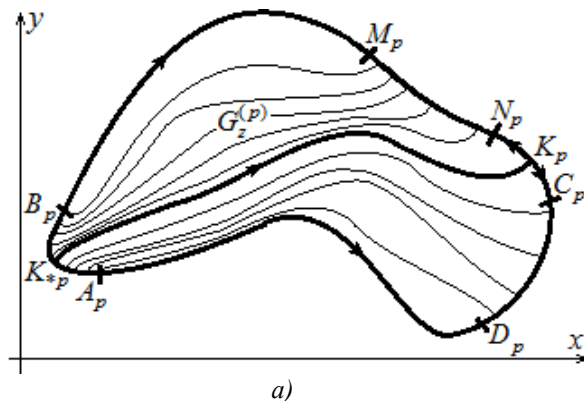


Рисунок 2 – Фізична область (а) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (б)

Інжекції струму через томографічний переріз, аналогічно до [5, 8], моделюватимемо наборами значень  $\{\tau_A^{(p)}, \tau_B^{(p)}, \tau_M^{(p)}, \tau_N^{(p)}, \tau_C^{(p)}, \tau_D^{(p)}\}$ , згідно з якими,  $A_p = (\tilde{x}(\tau_A^{(p)}), \tilde{y}(\tau_A^{(p)}))$ ,  $B_p = (\tilde{x}(\tau_B^{(p)}), \tilde{y}(\tau_B^{(p)}))$ ,  $M_p = (\tilde{x}(\tau_M^{(p)}), \tilde{y}(\tau_M^{(p)}))$ ,  $N_p = (\tilde{x}(\tau_N^{(p)}), \tilde{y}(\tau_N^{(p)}))$ ,  $C_p = (\tilde{x}(\tau_C^{(p)}), \tilde{y}(\tau_C^{(p)}))$ ,  $D_p = (\tilde{x}(\tau_D^{(p)}), \tilde{y}(\tau_D^{(p)}))$ . Відповідну границю області  $G_z$  із даними чотирма відміченими точками позначимо через  $\partial G_z^{(p)} (z^{(p)} = x^{(p)} + iy^{(p)})$ .

Задача полягає у реконструкції зображення КП. При цьому, супутніми є розрахунок відповідних динамічних сіток та полів швидкостей.

Шляхом введення гармонічних функцій  $\psi^{(p)} = \Psi^{(p)}(x, y)$  (функцій течії), комплексно спряжених до  $\varphi^{(p)} = \Phi^{(p)}(x, y)$ , і заміною умов

$$\left. \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} \right|_{B_p M_p} = \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} \right|_{N_p C_p} = \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} \right|_{A_p D_p} = 0,$$

$$\sigma \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}(\tilde{M})}{\partial n} \right|_{A_p B_p} = \Psi_*^{(p)}(\tilde{M}), \quad \sigma \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}(\tilde{M})}{\partial n} \right|_{M_p N_p} = \Psi^{\circ(p)}(\tilde{M}), \quad \sigma \left. \frac{\partial \varphi^{(p)}(\tilde{M})}{\partial n} \right|_{C_p D_p} = \Psi^{*(p)}(\tilde{M})$$
 на умо-

ви  $\psi|_{B_p M_p} = Q^{n(p)}$ ,  $\psi|_{N_p C_p} = Q^{r(p)}$ ,  $\psi|_{D_p A_p} = 0$ ,

$$\psi^{(p)}(\tilde{M})|_{A_p B_p} = \Psi_*^{(p)}(\tilde{M}), \quad \psi^{(p)}(\tilde{M})|_{M_p N_p} = \Psi^{\circ(p)}(\tilde{M}), \quad \psi^{(p)}(\tilde{M})|_{C_p D_p} = \Psi^{*(p)}(\tilde{M}),$$
 де  $Q^{n(p)}$  – сумарний потік, що входить в область  $G_z^{(p)}$  через ділянку  $A_p B_p$ ,  $Q^{r(p)}$  – потік, що виходять із неї через ділянку  $C_p D_p$ ,  $\Psi_*^{(p)}(\tilde{M}) = \int_{A_p \tilde{M}} \psi_*^{(p)}(\tilde{M}) dl$ ,  $\Psi^{\circ(p)}(\tilde{M}) = Q^{r(p)} + \int_{N_p \tilde{M}} \psi^{\circ(p)}(\tilde{M}) dl$ ,  $\Psi^{*(p)}(\tilde{M}) =$

$$= \int_{D_p \tilde{M}} \psi^{*(p)}(\tilde{M}) dl \quad \left( \int_{A_p B_p} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}(\tilde{M})}{\partial n} dl = Q^{n(p)}, \right.$$

$$\int_{D_p C_p} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}(\tilde{M})}{\partial n} dl = Q^{r(p)}, \quad \int_{N_p M_p} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}(\tilde{M})}{\partial n} dl = Q^{n(p)} - Q^{r(p)},$$
  $dl$  – елемент дуги відповідної кривої, розглядувані задачі замінимо серією більш загальних задач на відображення  $\omega^{(p)}(z) = \varphi^{(p)}(x, y) + i\psi^{(p)}(x, y)$  областей  $G_z^{(p)}$  на області комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega^{(p)}$ , які в залежності від  $G_z^{(p)}$  та значень квазіпотенціалів можуть набувати різних форм [13].

Розглянемо випадок, коли межові точки  $K_p$  та  $K_{*p}$  лінії розділу течій  $K_{*p} K_p$  належать до ділянок  $A_p B_p$  та  $N_p C_p$ , відповідно. Тоді області комплексного квазіпотенціалу мають вигляд  $G_\omega^{(p)} = \{\omega^{(p)}: \varphi_*^{(p)} < \varphi^{(p)} < \varphi^{*(p)}, 0 < \psi^{(p)} < Q^{r(p)}\} \cup \{\omega^{(p)}: \varphi_*^{(p)} < \varphi^{(p)} < \tilde{\varphi}^{(p)}, \psi^{(p)} = Q^{r(p)}\} \cup \{\omega^{(p)}: \varphi_*^{(p)} < \varphi^{(p)} < \varphi^{\circ(p)}, Q^{r(p)} < \psi^{(p)} < Q^{n(p)}\}$ , де  $\tilde{\varphi}^{(p)} = \varphi|_{K_p}$  (рис. 2,б). Обернені крайові задачі на квазіконформні відображення  $z^{(p)}(\omega) = x^{(p)}(\varphi, \psi) + iy^{(p)}(\varphi, \psi)$  областей  $G_\omega^{(p)}$  на області  $G_z^{(p)}$  при невідомому  $\sigma(x, y)$ , що мають вигляд [5, 8, 14]:

$$\frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi} = \sigma \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi} = -\sigma \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi}; \quad (2)$$

$$x^{(p)}(\varphi, Q^{r(p)} - 0) = x^{(p)}(\varphi, Q^{r(p)} + 0),$$

$$y^{(p)}(\varphi, Q^{r(p)} - 0) = y^{(p)}(\varphi, Q^{r(p)} + 0)$$

$$(\varphi_*^{(p)} \leq \varphi \leq \tilde{\varphi}^{(p)}),$$

$$x^{(p)}(\tilde{\varphi}^{(p)} - 0, \psi) = x^{(p)}(\tilde{\varphi}^{(p)} + 0, \psi),$$

$$y^{(p)}(\tilde{\varphi}^{(p)} - 0, \psi) = y^{(p)}(\tilde{\varphi}^{(p)} + 0, \psi)$$

$$(0 \leq \psi < Q^{r(p)} \cup Q^{r(p)} < \psi \leq Q^{n(p)}); \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{x}'(\tau) \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi}(\bar{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots), Q^{n(p)}) - \tilde{y}'(\tau) \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi}(\bar{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots), Q^{n(p)}) &= 0, \tau \in [\tau_M^{(p)}; \tau_B^{(p)}], \\ \tilde{x}'(\tau) \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi}(\varphi'^{(p)}(\tau, \dots), Q'^{(p)}) - \tilde{y}'(\tau) \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi}(\varphi'^{(p)}(\tau, \dots), Q'^{(p)}) &= 0, \tau \in [\tau_C^{(p)}; \tau_N^{(p)}], \\ \tilde{x}'(\tau) \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi}(\underline{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots), 0) - \tilde{y}'(\tau) \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi}(\underline{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots), 0) &= 0, \tau \in [\tau_A^{(p)}; \tau_D^{(p)}], \\ \tilde{x}'(\tau) \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi}(\varphi_*^{(p)}, \psi_*^{(p)}(\tau, \dots)) - \tilde{y}'(\tau) \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi}(\varphi_*^{(p)}, \psi_*^{(p)}(\tau, \dots)) &= 0, \tau \in [\tau_B^{(p)}; \tau_A^{(p)}], \\ \tilde{x}'(\tau) \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi}(\varphi^{\circ(p)}, \psi^{\circ(p)}(\tau, \dots)) - \tilde{y}'(\tau) \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi}(\varphi^{\circ(p)}, \psi^{\circ(p)}(\tau, \dots)) &= 0, \tau \in [\tau_N^{(p)}; \tau_M^{(p)}], \\ \tilde{x}'(\tau) \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi}(\varphi^{*(p)}, \psi^{*(p)}(\tau, \dots)) - \tilde{y}'(\tau) \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi}(\varphi^{*(p)}, \psi^{*(p)}(\tau, \dots)) &= 0, \tau \in [\tau_D^{(p)}; \tau_C^{(p)}]; \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x^{(p)}(\varphi, Q^{n(p)}) &= \tilde{x}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi)), & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sigma \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sigma \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi} \right) &= 0 \end{aligned} \right. & (6) \\ y^{(p)}(\varphi, Q^{n(p)}) &= \tilde{y}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi)) \quad (\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^{\circ(p)}), \\ x^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{x}(\tau'^{(p)}(\varphi)), \\ y^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{y}(\tau'^{(p)}(\varphi)) \quad (\tilde{\varphi}^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(p)}), \\ x^{(p)}(\varphi, 0) &= \tilde{x}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)), \quad y^{(p)}(\varphi, 0) = \tilde{y}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)) \\ (\varphi_*^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(p)}), \quad x^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= \tilde{x}(\tau_*^{(p)}(\psi)), \\ y^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= \tilde{y}(\tau_*^{(p)}(\psi)) \quad (0 \leq \psi \leq Q^{n(p)}), \\ x^{(p)}(\varphi^{\circ(p)}, \psi) &= \tilde{x}(\tau^{\circ(p)}(\psi)), \\ y^{(p)}(\varphi^{\circ(p)}, \psi) &= \tilde{y}(\tau^{\circ(p)}(\psi)) \quad (Q'^{(p)} \leq \psi \leq Q^{n(p)}), \\ x^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{x}(\tau^{*(p)}(\psi)), \\ y^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{y}(\tau^{*(p)}(\psi)) \quad (0 \leq \psi \leq Q^{(p)}) \end{aligned} \quad (5)$$

зводяться до розв'язування в  $G_\omega^{(p)}$  еліптичних рівнянь

$$\Phi(x^{(1)}, \dots, x^{(\bar{p})}, y^{(1)}, \dots, y^{(\bar{p})}, a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{s,0}, a_{s-1,1}, \dots, a_{0,s}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{\bar{p}} \left( \sigma(x^{(p)}, y^{(p)}, a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{s,0}, a_{s-1,1}, \dots, a_{0,s}) - f(x^{(p)}, y^{(p)}) \right)^2 \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$\text{де } f(x^{(p)}, y^{(p)}) = \frac{\sqrt{\left(x_\varphi'^{(p)}\right)^2 + \left(y_\varphi'^{(p)}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_\psi'^{(p)}\right)^2 + \left(y_\psi'^{(p)}\right)^2}}.$$

Виходячи з необхідної умови існування екстремуму функції багатьох змінних маємо наступні співвідношення для формування відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) [8]:

$$\sum_{p=1}^{\bar{p}} \left( \sum_{k=0}^s \sum_{r=0}^k a_{k-r,r} x^{(p)k-r+k_2-r_2} y^{(p)r+r_2} - f(x^{(p)}, y^{(p)}) x^{(p)k_2-r_2} y^{(p)r_2} \right) = 0 \quad (8)$$

стосовно змінних  $a_{k_2-r_2, r_2}$  ( $k_2 = \overline{0, s}, r_2 = \overline{0, k_2}$ ).

при заданих умовах склеювання (3), умовах ортогональності (4) та крайових умовах (5) на границях  $\partial G_\omega^{(p)}$  областей  $G_\omega^{(p)}$  і невідомому КП (1), де  $\tau = \bar{\tau}^{(p)}(\varphi)$ ,  $\tau = \tau'^{(p)}(\varphi)$ ,  $\tau = \underline{\tau}^{(p)}(\varphi)$ ,  $\tau = \tau_*^{(p)}(\psi)$ ,  $\tau = \tau^{\circ(p)}(\psi)$ ,  $\tau = \tau^{*(p)}(\psi)$  – функції, побудовані шляхом інтерполювання експериментально отриманих їх значень  $\bar{\tau}_i^{(p)}$ ,  $\tau_i'^{(p)}$ ,  $\underline{\tau}_i^{(p)}$ ,  $\tau_{*j}^{(p)}$ ,  $\tau_j^{\circ(p)}$ ,  $\tau_j^{*(p)}$  при деяких аргументах  $\bar{\varphi}_i^{(p)}$ ,  $\varphi_i'^{(p)}$ ,  $\varphi_i^{(p)}$ ,  $\Psi_{*j}^{(p)}$ ,  $\Psi_j^{\circ(p)}$ ,  $\Psi_j^{*(p)}$  на ділянках  $B_p M_p$ ,  $N_p C_p$ ,  $A_p D_p$ ,  $A_p B_p$ ,  $M_p N_p$  та  $C_p D_p$ , відповідно.

Реконструйовуватимемо КП, аналогічно до [8], за умови мінімізації функціоналу

Різницевий аналог цієї крайової задачі у сітковій області  $G_\omega^{\gamma(p)} = G_\omega^{\gamma(p,1)} \cup G_\omega^{\gamma(p,2)} \cup G_\omega^{\gamma(p,3)} \cup G_\omega^{\gamma(p,4)}$ , де  $G_\omega^{\gamma(p,l)} = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Phi_p + \Delta\varphi(i - a_1), i = \overline{a_1, a_2};$

$$\psi_j = \Psi_p + \Delta\psi(j - b_1), j = \overline{b_1, b_2}; \quad \Delta\varphi = \frac{\Phi_k - \Phi_p}{a_2 - a_1},$$

$$\Delta\psi = \frac{\Psi_k - \Psi_p}{b_2 - b_1}, \quad \gamma^{(p,l)} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi} \}, \text{ а параметри } \Phi_p,$$

$\Phi_k$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\Psi_p$ ,  $\Psi_k$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  в залежності від значення  $l$  визначаються згідно таблиці 1 запишемо у вигляді [5, 8, 13]:

$$\left\{ \begin{aligned} x_{i,j}^{(p,l)} &= \left( x_{i+1,j}^{(p,l_R)} + x_{i-1,j}^{(p,l_L)} + \gamma^{(p,l)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)2} \left( x_{i,j-1}^{(p,l_B)} + x_{i,j+1}^{(p,l_T)} \right) + \frac{\gamma^{(p,l)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)} \left( \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)}}{\partial x} \left( x_{i,j+1}^{(p,l_T)} - \right. \right. \right. \\ &x_{i,j-1}^{(p,l_B)} \left. \left. \left. + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)}}{\partial y} \left( y_{i,j+1}^{(p,l_T)} - y_{i,j-1}^{(p,l_B)} \right) \right) \left( x_{i,j+1}^{(p,l_T)} - x_{i,j-1}^{(p,l_B)} \right) - \frac{1}{4 \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)}} \left( \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)}}{\partial x} \left( x_{i+1,j}^{(p,l_R)} - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - x_{i-1,j}^{(p,l_L)} \right) + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)}}{\partial y} \left( y_{i+1,j}^{(p,l_R)} - y_{i-1,j}^{(p,l_L)} \right) \right) \left( x_{i+1,j}^{(p,l_R)} - x_{i-1,j}^{(p,l_L)} \right) \right) / \left( 2 \left( 1 + \gamma^{(p,l)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)2} \right) \right), \\ y_{i,j}^{(p,l)} &= \left( y_{i+1,j}^{(p,l_R)} + y_{i-1,j}^{(p,l_L)} + \gamma^{(p,l)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)2} \left( y_{i,j-1}^{(p,l_B)} + y_{i,j+1}^{(p,l_T)} \right) + \frac{\gamma^{(p,l)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)} \left( \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)}}{\partial x} \left( x_{i,j+1}^{(p,l_T)} - \right. \right. \right. \\ &x_{i,j-1}^{(p,l_B)} \left. \left. \left. + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)}}{\partial y} \left( y_{i,j+1}^{(p,l_T)} - y_{i,j-1}^{(p,l_B)} \right) \right) \left( y_{i,j+1}^{(p,l_T)} - y_{i,j-1}^{(p,l_B)} \right) - \frac{1}{4 \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)}} \left( \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)}}{\partial x} \left( x_{i+1,j}^{(p,l_R)} - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - x_{i-1,j}^{(p,l_L)} \right) + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)}}{\partial y} \left( y_{i+1,j}^{(p,l_R)} - y_{i-1,j}^{(p,l_L)} \right) \right) \left( y_{i+1,j}^{(p,l_R)} - y_{i-1,j}^{(p,l_L)} \right) \right) / \left( 2 \left( 1 + \gamma^{(p,l)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,l)2} \right) \right); \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(\tau) \left( y_{i,n^{(p)}}^{(p,l)} - y_{i,n^{(p)+1}^{(p,l)}} \right) - \tilde{y}'(\tau) \left( x_{i,n^{(p)}}^{(p,l)} - x_{i,n^{(p)+1}^{(p,l)}} \right) &= 0, i = \overline{1, m_1^{(p)} - 1}, l = 3, 4, \\ \tilde{x}'(\tau) \left( y_{i,n_0^{(p)+1}^{(p,l)}} - y_{i,n_0^{(p)}}^{(p,l)} \right) - \tilde{y}'(\tau) \left( x_{i,n_0^{(p)+1}^{(p,l)}} - x_{i,n_0^{(p)}}^{(p,l)} \right) &= 0, i = \overline{m_0^{(p)} + 1, m_1^{(p)} - 1}, l = 4, \\ \tilde{x}'(\tau) \left( y_{i,n_0^{(p)-1}^{(p,l)}} - y_{i,n_0^{(p)}}^{(p,l)} \right) - \tilde{y}'(\tau) \left( x_{i,n_0^{(p)-1}^{(p,l)}} - x_{i,n_0^{(p)}}^{(p,l)} \right) &= 0, i = \overline{m_0^{(p)} + 1, m^{(p)}}, l = 1, \\ \tilde{x}'(\tau) \left( y_{i,1}^{(p,l)} - y_{i,0}^{(p,l)} \right) - \tilde{y}'(\tau) \left( x_{i,1}^{(p,l)} - x_{i,0}^{(p,l)} \right) &= 0, i = \overline{1, m^{(p)}}, l = 1, 2, \\ \tilde{x}'(\tau) \left( y_{1,j}^{(p,l)} - y_{0,j}^{(p,l)} \right) - \tilde{y}'(\tau) \left( x_{1,j}^{(p,l)} - x_{0,j}^{(p,l)} \right) &= 0, j = \overline{1, n^{(p)}}, l = 2, 3, \\ \tilde{x}'(\tau) \left( y_{m_0^{(p)-1,j}^{(p,l)}} - y_{m_0^{(p),j}^{(p,l)}} \right) - \tilde{y}'(\tau) \left( x_{m_0^{(p)-1,j}^{(p,l)}} - x_{m_0^{(p),j}^{(p,l)}} \right) &= 0, j = \overline{n_0^{(p)} + 1, n^{(p)}}, l = 4, \\ \tilde{x}'(\tau) \left( y_{m^{(p),j}^{(p,l)}} - y_{m^{(p)+1,j}^{(p,l)}} \right) - \tilde{y}'(\tau) \left( x_{m^{(p),j}^{(p,l)}} - x_{m^{(p)+1,j}^{(p,l)}} \right) &= 0, j = \overline{1, n_0^{(p)} - 1}, l = 1; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x_{0,j}^{(p,2)} &= \tilde{x}(\tau_*^{(p)}(\psi_j^{(p,2)})), \quad y_{0,j}^{(p,2)} = \tilde{y}(\tau_*^{(p)}(\psi_j^{(p,2)})) \quad (0 \leq j \leq n_0^{(p)}), \quad x_{0,j}^{(p,3)} = \tilde{x}(\tau_*^{(p)}(\psi_j^{(p,3)})), \quad y_{0,j}^{(p,3)} = \tilde{y}(\tau_*^{(p)}(\psi_j^{(p,3)})) \\ &(n_0^{(p)} \leq j \leq n^{(p)} + 1), \quad x_{i,n^{(p)+1}^{(p,3)}} = \tilde{x}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi_i^{(p,3)})), \quad y_{i,n^{(p)+1}^{(p,3)}} = \tilde{y}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi_i^{(p,3)})) \quad (0 \leq i \leq m_0^{(p)}), \\ x_{i,n^{(p)+1}^{(p,4)}} &= \tilde{x}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi_i^{(p,4)})), \quad y_{i,n^{(p)+1}^{(p,4)}} = \tilde{y}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi_i^{(p,4)})) \quad (m_0^{(p)} \leq i \leq m_1^{(p)}), \\ x_{m^{(p)+1,j}^{(p,1)}} &= \tilde{x}(\tau^{*(p)}(\psi_j^{(p,1)})), \quad y_{m^{(p)+1,j}^{(p,1)}} = \tilde{y}(\tau^{*(p)}(\psi_j^{(p,1)})) \quad (0 \leq j \leq n_0^{(p)}), \quad x_{m_0^{(p),j}^{(p,1)}} = \tilde{x}(\tau^{0(p)}(\psi_j^{(p,4)})), \\ y_{m_0^{(p),j}^{(p,1)}} &= \tilde{y}(\tau^{0(p)}(\psi_j^{(p,4)})) \quad (n_0^{(p)} \leq j \leq n^{(p)} + 1), \quad x_{i,0}^{(p,1)} = \tilde{x}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi_i^{(p,1)})), \\ y_{i,0}^{(p,1)} &= \tilde{y}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi_i^{(p,1)})) \quad (0 \leq i \leq m_0^{(p)}), \quad x_{i,0}^{(p,2)} = \tilde{x}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi_i^{(p,2)})), \quad y_{i,0}^{(p,2)} = \tilde{y}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi_i^{(p,2)})) \\ &(m_0^{(p)} \leq i \leq m^{(p)} + 1), \quad x_{i,n_0^{(p)}}^{(p,1)} = \tilde{x}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi_{m^{(p)}+m_0^{(p)}-i+1}^{(p,1)})), \quad y_{i,n_0^{(p)}}^{(p,1)} = \tilde{y}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi_{m^{(p)}+m_0^{(p)}-i+1}^{(p,1)})) \\ &(m_0^{(p)} \leq i \leq m^{(p)} + 1), \quad x_{i,n_0^{(p)}}^{(p,4)} = \tilde{x}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi_i^{(p,4)})), \quad y_{i,n_0^{(p)}}^{(p,4)} = \tilde{y}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi_i^{(p,4)})) \quad (m_0^{(p)} \leq i \leq m_1^{(p)}); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &\Phi \left( x^{(1)}, \dots, x^{(\bar{p})}, y^{(1)}, \dots, y^{(\bar{p})}, a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{s,0}, a_{s-1,1}, \dots, a_{0,s} \right) = \\ &= \sum_{l,p=1}^{4,\bar{p}} \sum_{i,j} \left( \sigma \left( x_{i,j}^{(p,l)}, y_{i,j}^{(p,l)}, a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{s,0}, a_{s-1,1}, \dots, a_{0,s} \right) - f^\gamma \left( x_{i-1,j}^{(p,l)}, y_{i,j-1}^{(p,l)}, x_{i+1,j}^{(p,l)}, y_{i,j+1}^{(p,l)} \right) \right)^2 \rightarrow \min; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sum_{l,p=1}^{4,\bar{p}} \sum_{i,j} \sum_{k=0}^s \sum_{r=0}^k a_{k-r,r} x_{i,j}^{(p,l)k-r+k_2-r_2} y_{i,j}^{(p,l)r+r_2} = \sum_{l,p=1}^{4,\bar{p}} \sum_{i,j} f^\gamma \left( x_{i-1,j}^{(p,l)}, y_{i,j-1}^{(p,l)}, x_{i+1,j}^{(p,l)}, y_{i,j+1}^{(p,l)} \right) x_{i,j}^{(p,l)k_2-r_2} y_{i,j}^{(p,l)r_2}, \quad (13)$$

де індекси формул (9), (12), (13) визначаються так:  
 а)  $a_1 + 1 \leq i \leq a_2 - 1$ ,  $b_1 + 1 \leq j \leq b_2 - 1$ ,  $1 \leq l = l_L = l_R = l_T = l_B \leq 4$ , б)  $a_1 + 1 \leq i \leq a_2 - 1$ ,  $j = b_2$ ,  $l = l_L = l_R = l_B = 2$ ,  $l_T = 3$ , в)  $i = a_2$ ,  $b_1 + 1 \leq j \leq b_2 - 1$ ,  $l = l_L = l_T = l_B = 2$ ,  $l_R = 1$ , г)  $i = a_2$ ,  $b_1 + 1 \leq j \leq b_2 - 1$ ,  $l = l_L = l_T = l_B = 3$ ,  $l_R = 4$ ;  $\gamma^{(p,l)}$  – квазіконформні інваріанти [13] для областей  $G_\omega^{\gamma^{(p,l)}}$ ;  $x_{i,j}^{(p,l)} = x^{(p,l)}(\varphi_i^{(p,l)}, \psi_j^{(p,l)})$ ,  $y_{i,j}^{(p,l)} = y^{(p,l)}(\varphi_i^{(p,l)}, \psi_j^{(p,l)})$ ,  
 $\sigma_{i,j \pm 1/2}^{\gamma^{(p,l)}} = \sigma\left(\left(x_{i,j \pm 1}^{(p,l)} + x_{i,j}^{(p,l)}\right) / 2, \left(y_{i,j \pm 1}^{(p,l)} + y_{i,j}^{(p,l)}\right) / 2\right)$ ,  
 $\sigma_{i \pm 1/2, j}^{\gamma^{(p,l)}} = \sigma\left(\left(x_{i \pm 1, j}^{(p,l)} + x_{i, j}^{(p,l)}\right) / 2, \left(y_{i \pm 1, j}^{(p,l)} + y_{i, j}^{(p,l)}\right) / 2\right)$ ,  
 $(x_{i,j}^{(p,l)}, y_{i,j}^{(p,l)}) \in G_z^{(p,l)}$ ;  $f^\gamma(x_{i-1,j}^{(p,l)}, y_{i,j-1}^{(p,l)}, x_{i+1,j}^{(p,l)}, y_{i,j+1}^{(p,l)}) =$   
 $= \left( \left( \left( x_{i+1,j-1}^{(p,l)} - x_{i-1,j-1}^{(p,l)} \right)^2 + \left( y_{i+1,j-1}^{(p,l)} - y_{i-1,j-1}^{(p,l)} \right)^2 \right)^{0,5} + \right.$   
 $\left. + \left( \left( x_{i+1,j+1}^{(p,l)} - x_{i-1,j+1}^{(p,l)} \right)^2 + \left( y_{i+1,j+1}^{(p,l)} - y_{i-1,j+1}^{(p,l)} \right)^2 \right)^{0,5} \right) /$   
 $/ \left( \left( \left( x_{i-1,j+1}^{(p,l)} - x_{i-1,j-1}^{(p,l)} \right)^2 + \left( y_{i-1,j+1}^{(p,l)} - y_{i-1,j-1}^{(p,l)} \right)^2 \right)^{0,5} + \right.$   
 $\left. + \left( \left( x_{i+1,j+1}^{(p,l)} - x_{i+1,j-1}^{(p,l)} \right)^2 + \left( y_{i+1,j+1}^{(p,l)} - y_{i+1,j-1}^{(p,l)} \right)^2 \right)^{0,5} \right) \frac{1}{\gamma^{(p,l)}}$ ;  
 $p = \overline{1, \tilde{p}}$ ;  $l = \overline{1, 4}$ ;  $k_2 = \overline{0, s}$ ,  $r_2 = \overline{0, k_2}$ .

Таблиця 1 – Залежність параметра  $l$  від параметрів  $\Phi_p, \Phi_k, a_1, a_2, \Psi_p, \Psi_k, b_1, b_2$

$l$	$\Phi_p$	$\Phi_k$	$a_1$	$a_2$	$\Psi_p$	$\Psi_k$	$b_1$	$b_2$
1	$\tilde{\varphi}^{(p)}$	$\varphi^{*(p)}$	$m_0^{(p)}$	$m^{(p)} + 1$	0	$Q^{(p)}$	0	$n_0^{(p)}$
2	$\varphi_*^{(p)}$	$\tilde{\varphi}^{(p)}$	0	$m_0^{(p)}$	0	$Q^{(p)}$	0	$n_0^{(p)}$
3	$\varphi_*^{(p)}$	$\tilde{\varphi}^{(p)}$	0	$m_0^{(p)}$	$Q^{(p)}$	$Q^{*(p)}$	$n_0^{(p)}$	$n^{(p)} + 1$
4	$\tilde{\varphi}^{(p)}$	$\varphi^{*(p)}$	$m_0^{(p)}$	$m_1^{(p)}$	$Q^{(p)}$	$Q^{*(p)}$	$n_0^{(p)}$	$n^{(p)} + 1$

При цьому зауважимо, що формування та розв'язання СЛАР (13) при  $s > 4$ , аналогічно до [8], потребує використання механізмів довільної точності (наприклад, типу [15]).

Алгоритм розв'язання вихідної задачі полягає у почерговій параметризації внутрішніх вузлів сіткових областей  $G_z^{\gamma^{(p)}}$ , множини КП та використанні ідей методу блочної ітерації [5, 8, 13, 14, 16]. А саме: задаємо кількість інжекцій  $\tilde{p}$ , границю областей  $G_z^{(p)}$  (функціями  $x = \tilde{x}(\tau)$ ,  $y = \tilde{y}(\tau)$ ), параметри  $\tau_A^{(p)}$ ,  $\tau_B^{(p)}$ ,  $\tau_M^{(p)}$ ,  $\tau_N^{(p)}$ ,  $\tau_C^{(p)}$ ,  $\tau_D^{(p)}$ , квазіпотенціали  $\varphi_*^{(p)}$ ,  $\tilde{\varphi}^{(p)}$ ,  $\varphi^{*(p)}$ ,  $\varphi^{(p)}$  та витрати  $Q^{(p)}$ ,  $Q^{*(p)}$ , параметри  $m_0^{(p)}$ ,  $m_1^{(p)}$ ,  $m^{(p)}$ ,  $n_0^{(p)}$ ,  $n^{(p)}$  розбиття областей  $G_\omega^{\gamma^{(p)}}$  (бажано так, щоб  $Q^{(p)}(m^{(p)} - m_0^{(p)} + 1) \approx n_0^{(p)}(\varphi^{*(p)} - \tilde{\varphi}^{(p)})$ ,  $Q^{*(p)}m_0^{(p)} \approx (\tilde{\varphi}^{(p)} - \varphi_*^{(p)})n_0^{(p)}$ ,  $(Q^{*(p)} - Q^{(p)})m_0^{(p)} \approx (\tilde{\varphi}^{(p)} -$

$-\varphi_*^{(p)})(n^{(p)} - n_0^{(p)} + 1)$ ,  $(Q^{*(p)} - Q^{(p)})(m_1^{(p)} - m_0^{(p)}) \approx (\varphi^{*(p)} - \tilde{\varphi}^{(p)})(n^{(p)} - n_0^{(p)} + 1)$ ). При цьому обчислюємо координати кутових точок  $A_p = (\tilde{x}(\tau_A^{(p)}), \tilde{y}(\tau_A^{(p)}))$ ,  $B_p = (\tilde{x}(\tau_B^{(p)}), \tilde{y}(\tau_B^{(p)}))$ ,  $C_p = (\tilde{x}(\tau_C^{(p)}), \tilde{y}(\tau_C^{(p)}))$ ,  $D_p = (\tilde{x}(\tau_D^{(p)}), \tilde{y}(\tau_D^{(p)}))$  на  $\partial G_z^{(p)}$ ,  $\Delta\varphi^{(p,1)} = \frac{\varphi^{*(p)} - \tilde{\varphi}^{(p)}}{m^{(p)} - m_0^{(p)} + 1}$ ,  $\Delta\psi^{(p,1)} = \frac{Q^{(p)}}{n_0^{(p)}}$ ,  $\Delta\varphi^{(p,2)} = \frac{\tilde{\varphi}^{(p)} - \varphi_*^{(p)}}{m_0^{(p)}}$ ,  $\Delta\psi^{(p,2)} = \frac{Q^{(p)}}{n_0^{(p)}}$ ,  $\Delta\varphi^{(p,3)} = \frac{\tilde{\varphi}^{(p)} - \varphi_*^{(p)}}{m_0^{(p)}}$ ,  $\Delta\psi^{(p,3)} = \frac{Q^{*(p)} - Q^{(p)}}{n^{(p)} - n_0^{(p)} + 1}$ ,  $\Delta\varphi^{(p,4)} = \frac{\varphi^{*(p)} - \tilde{\varphi}^{(p)}}{m_1^{(p)} - m_0^{(p)}}$ ,  $\Delta\psi^{(p,4)} = \frac{Q^{*(p)} - Q^{(p)}}{n^{(p)} - n_0^{(p)} + 1}$  та значення квазіконформних інваріантів  $\gamma^{(p,l)} = \frac{\Delta\varphi^{(p,l)}}{\Delta\psi^{(p,l)}}$ .

Задавши значення потенціалів  $\tilde{\varphi}_i^{(p)}$ ,  $\varphi_i^{(p)}$ ,  $\varphi_i^{*(p)}$  та функцій течії  $\psi_{*j}^{(p)}$ ,  $\psi_j^{(p)}$ ,  $\psi_j^{*(p)}$  при деяких аргументах  $\tilde{\tau}_i^{(p)}$ ,  $\tau_i^{(p)}$ ,  $\underline{\tau}_i^{(p)}$ ,  $\tau_{*j}^{(p)}$ ,  $\tau_j^{(p)}$ ,  $\tau_j^{*(p)}$  (результати фізичних замірів), відповідно, шляхом інтерполяції обчислюємо (11), після чого знаходимо координати  $x_{i,n^{(p)}+1}^{(p,l)}$ ,  $y_{i,n^{(p)}+1}^{(p,l)}$  ( $0 \leq i \leq m_1^{(p)}$ ,  $l = 3, 4$ ),  $x_{i,n_0^{(p)}}^{(p,4)}$ ,  $y_{i,n_0^{(p)}}^{(p,4)}$  ( $m_0^{(p)} \leq i \leq m_1^{(p)}$ ),  $x_{i,n_0^{(p)}}^{(p,3)}$ ,  $y_{i,n_0^{(p)}}^{(p,3)}$  ( $m_0^{(p)} \leq i \leq m^{(p)} + 1$ ),  $x_{i,0}^{(p,l)}$ ,  $y_{i,0}^{(p,l)}$  ( $0 \leq i \leq m^{(p)} + 1$ ,  $l = 1, 2$ ),  $x_{0,j}^{(p,l)}$ ,  $y_{0,j}^{(p,l)}$  ( $0 \leq j \leq n^{(p)} + 1$ ,  $l = 2, 3$ ),  $x_{m_1^{(p)},j}^{(p,4)}$ ,  $y_{m_1^{(p)},j}^{(p,4)}$  ( $n_0^{(p)} \leq j \leq n^{(p)} + 1$ ),  $x_{m^{(p)}+1,j}^{(p,1)}$ ,  $y_{m^{(p)}+1,j}^{(p,1)}$  ( $0 \leq j \leq n_0^{(p)}$ ) на  $\partial G_z^{(p)}$  ( $p = \overline{1, \tilde{p}}$ ).  $\forall_{i,j,l,p}$  формуємо початкові наближення вузлів  $x_{i,j}^{(p,l,0)}$ ,  $y_{i,j}^{(p,l,0)}$  та параметрів  $a_{k,r}^{(0)}$  ( $k = \overline{0, s}$ ,  $r = \overline{0, k}$ ), що визначають КП.

Ітераційний процес реконструкції складається з наступних етапів: задаємо номер інжекції  $p = 1$ ; застосовуємо формулу (9) для знаходження координат внутрішніх вузлів [8, 13, 14]; уточнюємо координати всіх приграничних вузлів на даній інжекції (використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана) шляхом розв'язання систем рівнянь

$$\begin{cases} x_{m^{(p)},j}^{(p,l,t+1)} = x_{m^{(p)}+1,j}^{(p,l)} - \frac{\gamma^{(p,l,t)}}{2} \sigma_{m^{(p)}+1,j}^{(l,t)} \left( y_{m^{(p)}+1,j+1}^{(p,l,t)} - \right. \\ \left. - y_{m^{(p)}+1,j-1}^{(p,l,t)} \right), y_{m^{(p)},j}^{(p,l,t+1)} = y_{m^{(p)}+1,j}^{(p,l)} + \\ \left. + \frac{\gamma^{(p,l,t)}}{2} \sigma_{m^{(p)}+1,j}^{(l,t)} \left( x_{m^{(p)}+1,j+1}^{(p,l,t)} - x_{m^{(p)}+1,j-1}^{(p,l,t)} \right), l = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i,n^{(p)}}^{(p,l,t+1)} = x_{i,n^{(p)+1}^{(p,l)}} + \frac{\gamma^{(p,l,t)}}{2} \sigma_{i,n^{(p)+1}^{(l,t)}} \left( y_{i+1,n^{(p)+1}^{(p,l,t)}} - \right. \\ \left. - y_{i-1,n^{(p)+1}^{(p,l,t)}} \right), y_{i,n^{(p)}}^{(p,l,t+1)} = y_{i,n^{(p)+1}^{(p,l,t)}} - \\ - \frac{\gamma^{(p,l,t)}}{2} \sigma_{i,n^{(p)+1}^{(l,t)}} \left( x_{i+1,n^{(p)+1}^{(p,l,t)}} - x_{i-1,n^{(p)+1}^{(p,l,t)}} \right), l = 3, 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{m_1^{(p)}-1,j}^{(p,l,t+1)} = x_{m_1^{(p)},j}^{(p,l,t)} - \frac{\gamma^{(p,l,t)}}{2} \sigma_{m_1^{(p)},j}^{(l,t)} \left( y_{m_1^{(p)},j+1}^{(p,l,t)} - \right. \\ \left. - y_{m_1^{(p)},j-1}^{(p,l,t)} \right), y_{m_1^{(p)}-1,j}^{(p,l,t+1)} = y_{m_1^{(p)},j}^{(p,l,t)} + \\ + \frac{\gamma^{(p,l,t)}}{2} \sigma_{m_1^{(p)},j}^{(l,t)} \left( x_{m_1^{(p)},j+1}^{(p,l,t)} - x_{m_1^{(p)},j-1}^{(p,l,t)} \right), l = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i,n_0^{(p)}+1}^{(p,l,t+1)} = x_{i,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} + \frac{\gamma^{(p,l,t)}}{2} \sigma_{i,n_0^{(p)}}^{(l,t)} \left( y_{i+1,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} - \right. \\ \left. - y_{i-1,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} \right), y_{i,n_0^{(p)}+1}^{(p,l,t+1)} = y_{i,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} - \\ - \frac{\gamma^{(p,l,t)}}{2} \sigma_{i,n_0^{(p)}}^{(l,t)} \left( x_{i+1,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} - x_{i-1,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} \right), l = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i,n_0^{(p)}-1}^{(p,l,t+1)} = x_{i,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} + \frac{\gamma^{(p,l,t)}}{2} \sigma_{i,n_0^{(p)}}^{(l,t)} \left( y_{i+1,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} - \right. \\ \left. - y_{i-1,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} \right), y_{i,n_0^{(p)}-1}^{(p,l,t+1)} = y_{i,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} - \\ - \frac{\gamma^{(p,l,t)}}{2} \sigma_{i,n_0^{(p)}}^{(l,t)} \left( x_{i+1,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} - x_{i-1,n_0^{(p)}}^{(p,l,t)} \right), l = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,j}^{(p,l,t+1)} = x_{0,j}^{(p,l,t)} + 0,5\gamma^{(p,l,t)}\sigma_{0,j}^{(l,t)} \left( y_{0,j+1}^{(p,l,t)} - y_{0,j-1}^{(p,l,t)} \right), \\ y_{1,j}^{(p,l,t+1)} = y_{0,j}^{(p,l,t)} - 0,5\gamma^{(p,l,t)}\sigma_{0,j}^{(l,t)} \left( x_{0,j+1}^{(p,l,t)} - x_{0,j-1}^{(p,l,t)} \right), \\ l = 2, 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i,1}^{(p,l,t+1)} = x_{i,0}^{(p,l,t)} - 0,5\gamma^{(p,l,t)}\sigma_{i,0}^{(l,t)} \left( y_{i+1,0}^{(p,l,t)} - y_{i-1,0}^{(p,l,t)} \right), \\ y_{i,1}^{(p,l,t+1)} = y_{i,0}^{(p,l,t)} + 0,5\gamma^{(p,l,t)}\sigma_{i,0}^{(l,t)} \left( x_{i+1,0}^{(p,l,t)} - x_{i-1,0}^{(p,l,t)} \right), \\ l = 1, 2 \end{cases}$$

відносно  $\left( x_{1,j}^{(p,l,t+1)}, y_{1,j}^{(p,l,t+1)} \right), \left( x_{m^{(p)},j}^{(p,l,t+1)}, y_{m^{(p)},j}^{(p,l,t+1)} \right),$   
 $\left( x_{i,1}^{(p,l,t+1)}, y_{i,1}^{(p,l,t+1)} \right), \left( x_{i,n^{(p)}}^{(p,l,t+1)}, y_{i,n^{(p)}}^{(p,l,t+1)} \right),$   
 $\left( x_{m_1^{(p)}-1,j}^{(p,l,t+1)}, y_{m_1^{(p)}-1,j}^{(p,l,t+1)} \right), \left( x_{i,n_0^{(p)}+1}^{(p,l,t+1)}, y_{i,n_0^{(p)}+1}^{(p,l,t+1)} \right),$   
 $\left( x_{i,n_0^{(p)}-1}^{(p,l,t+1)}, y_{i,n_0^{(p)}-1}^{(p,l,t+1)} \right),$  відповідно; якщо  $p < \tilde{p}$ , то змі-  
 нюємо номер інжекції  $p = p+1$  і повертаємося до

уточнення координат внутрішніх вузлів; інакше – розв’язуємо СЛАР (13) відносно  $a_{k,r}^{(t)}$  (тут  $t = 0, 1, \dots$  – номер кроку ітерації,  $k = 1, \dots, s$ ,  $r = 0, \dots, k$ ) і перевіряємо умови завершення ітераційного процесу, серед яких можуть бути [13, 14]: стабілізація приграничних вузлів, КП, параметра ступеня квазіконформності, величин витрат тощо. У випадку невиконання хоча б однієї із цих умов ітераційний процес починаємо спочатку, інакше – будуємо відповідне реконструйоване зображення та, при необхідності, електродинамічні сітки, області комплексного квазіпотенціалу чи розраховуємо поля густин струму за формулою  $\vec{j}^{(p)} = \sigma(x, y) \cdot \text{grad}\varphi^{(p)}$  тощо.

Слід відзначити, що тут, як і в [8] (на відміну від [5, 13, 14]), відпадає потреба у використанні формул для уточнення граничних вузлів (їх координати є апіорно відомими), що, безумовно, пришвидшує процес реконструкції зображення. З метою економії машинного часу також допускається застосування формул (12) та (13) лише для вибраних точок.

Також зазначимо, що замість процедури задання координат граничних вузлів за формулою (11) (шляхом інтерполяції результатів фізичних замірів) можна відразу вибирати їх так, щоб локальні різниці значень функції течії чи потенціалу між ними у відповідних сусідніх точках були сталими в межах інжекції.

Наведемо результати *числових розрахунків* при наступних даних:  $\tilde{x}(\tau) = 150(1 + \cos \tau)$ ,  $\tilde{y}(\tau) = 100(1 + \sin \tau)$ ,  $\tilde{p} = 40$ ,  $m^{(p)} = 100$ ,  $s = 4$ ,  $a_{0,0}^{(p)} = 1$ ,  $a_{k,r}^{(p)} = 0$  ( $k = \overline{1, s}$ ,  $r = \overline{0, k}$ ),  $\varphi_*^{(p)} = 0$ ,  $\varphi^{(p)} = 0, 7$ ,  $\varphi^{*(p)} = 1$ ,  $\tau_A^{(p)} = \pi(65+p)/60$ ,  $\tau_B^{(p)} = \tau_A^{(p)} - \pi/5$ ,  $\tau_M^{(p)} = \tau_A^{(p)} - 2\pi/3$ ,  $\tau_N^{(p)} = \tau_M^{(p)} - \pi/5$ ,  $\tau_C^{(p)} = \tau_M^{(p)} - 2\pi/3$ ,  $\tau_D^{(p)} = \tau_C^{(p)} - \pi/5$ ,  $Q^{(p)}$ ,  $Q^{n(p)}$ ,  $\bar{\varphi}_i^{(p)}$ ,  $\varphi_i^{(p)}$ ,  $\underline{\varphi}_i^{(p)}$ ,  $\psi_{*j}^{(p)}$ ,  $\psi_j^{(p)}$ ,  $\psi_j^{*(p)}$  ( $1 \leq p \leq \tilde{p}$ ). Отримано реконструйоване зображення розподілу КП  $\sigma = \sigma(x, y)$  (рис. 3, в), в порівнянні із заданим теоретично (рис. 3, а).

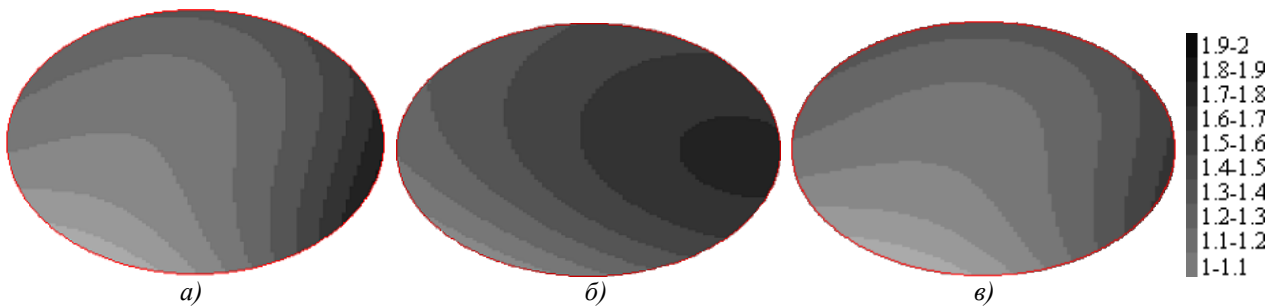


Рисунок 3 – Розподіл КП: точний розв’язок (при  $a_0 = 1.4589336614$ ,  $a_1 = -0.0024400653$ ,  $a_2 = -0.0063507608$ ,  $a_3 = 0.0000054861$ ,  $a_4 = 0.0000041829$ ,  $a_5 = 0.0000377299$ ,  $a_6 = 0.0000000225$ ,  $a_7 = -0.0000000064$ ,  $a_8 = 0.0000000936$ ,  $a_9 = -0.0000001641$ ) (а);  
наближений розв’язок за умови наявності двох (б) та трьох еквіпотенціалей (в) на границі

Зауважимо, що розроблений алгоритм є достатньо відкритим для різних доповнень, узагальнень тощо. Зокрема, збільшуючи кількість прикладених квазіпотенціалів певним чином можна наблизити

$$\begin{aligned} & \Phi(x^{(1)}, \dots, x^{(\tilde{p})}, y^{(1)}, \dots, y^{(\tilde{p})}, a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{s,0}, a_{s-1,1}, \dots, a_{0,s}) = \\ & = \sum_{p=1}^{\tilde{p}} \left( \sigma(x^{(p)}, y^{(p)}, a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{s,0}, a_{s-1,1}, \dots, a_{0,s}) - f(x^{(p)}, y^{(p)}) \right)^2 + \\ & + \eta \cdot \Omega[x^{(1)}, \dots, x^{(\tilde{p})}, y^{(1)}, \dots, y^{(\tilde{p})}, a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{s,0}, a_{s-1,1}, \dots, a_{0,s}] \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $\Omega$  – стабілізуючий функціонал;  $\eta$  – параметр регуляризації.

**ВИСНОВКИ.** У роботі розвинено метод прикладених квазіпотенціалів реконструкції зображення, згідно з яким в ітераційному процесі розв’язок задачі аналізу зводяться до застосування числових методів квазіконформних відображень, а задач синтезу – до розв’язання задач параметричної ідентифікації. При цьому по чергові будуються електродинамічні сітки для випадку областей з наявністю кількох еквіпотенціальних ділянок та застосовується методологія послідовної ідентифікації неоднорідного коефіцієнта провідності за умови мінімізації функціоналу нев’язки.

Порівняльний аналіз отриманих результатів підтверджує факт, що певне збільшення в сукупності кількості ділянок прикладання квазіпотенціалів суттєво покращує реконструкцію зображення (у порівнянні з результатами для двох ділянок), але введення надто великої їх кількості не має сенсу, адже при цьому різко збільшується кількість точок порушення ортогональності, що спричинятиме недопустимі значення похибки конформності. Для вирішення цієї проблеми передбачена можливість впровадження спеціально розробленої процедури «заміни» гладкості в кутових точках на ортогональність відповідних ліній течії та еквіпотенціальних ліній. Це дає змогу підвищити точність квазіконформних відображень (в першу чергу, в околах кутових граничних точок).

Суттєвою особливістю розробленого алгоритму є можливість порівняно легкого його розпаралелення та зупинки процедури обчислення за умови виконання лише деяких із умов закінчення процесу з

задачу Діріхле, а у випадку, якщо процес є нестійким, то є можливість, подібно до [5, 11], «вмонтувати» процедуру регуляризації типу Тихонова, коли функціонал (7) представляється у вигляді

автоматичним визначенням тих точок фізичної області, де мають місце великі похибки обчислень, що дає змогу економніше використовувати машинний час. Останнє є актуальним, зокрема, у випадку наявності так званих «застійних зон» та «зон великих градієнтів», що виникають поблизу особливих кутових точок гладких граничних ліній відповідних областей.

У перспективі – перенесення алгоритму на просторовий, конвективно-дифузійний та термодинамічний випадки, а також застосування методу для ідентифікації параметрів процесів, що мають місце у порошковій металургії [17].

#### ЛІТЕРАТУРА

- Holder D. Electrical Impedance Tomography. Methods, History and Applications. – London: Institute of Physics, 2005. – 456 p.
- Горб М.С., Гусева О.В. Вибір математичної моделі об’єкту дослідження в електроімпедансній томографії // Вісник НТУУ «КПІ». Серія – Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – Київ: НТУУ «КПІ», 2013. – Вип. 52. – С. 120–128.
- Яворський Б.І., Промович Ю.Б., Яворська Є.Б. Імітаційне моделювання прямої задачі електроімпедансної томографії // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла острогоградського. – Кременчук: КДПУ, 2011. – Вип. 3 (68), част. 1. – С. 49–53.
- Liu D., Kolehmainen V., Siltanen S. and other. Estimation of Conductivity Changes in a Region of Interest with Electrical Impedance Tomography // Inverse Problems and Imaging, 2014. – Vol. 9 (1). – P. 211–229.



5. Бомба А. Я., Крока Л. Л. Числовий метод квазіконформного відображення розв'язання задач ідентифікації коефіцієнта електричної провідності за даними томографії прикладених потенціалів // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Рівне: РДГУ, 2014. – Вип. 11 (20). – С. 24–33.

6. Гаврилов С. В. Итерационный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и нескольких измерений на границе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – Москва: НИВЦ МГУ, 2013. – Изд. 14 (1). – С. 26–30.

7. Сушко І. О., Рибін О. І. Візуалізація розподілу поверхневих провідностей методом зон провідності // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – Київ: НТУУ «КПІ», 2014. – Вип. 5 (95). – С. 7–17.

8. Бомба А. Я., Бойчура М. В. Метод прикладених квазіпотенціалів розв'язування коефіцієнтних задач ідентифікації параметрів // Вісник НУВГП. Технічні науки: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2017. – Вип. 4 (76). – С. 163–177.

9. Hauptmann A., Santacesaria M., Siltanen S. Direct inversion from partial-boundary data in electrical impedance tomography // *Inverse Problems*, 2017. – Vol. 33 (2). – P. 1–26.

10. Шерина Е. С., Старченко А. В. Разностные схемы на основе метода конечных объемов для задачи электроимпедансной томографии // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. – Томск: Томский государственный университет, 2014. – Изд. 3 (29). – С. 25–38.

11. Шерина Е. С., Старченко А. В. Численное моделирование задачи электроимпедансной томографии и исследование подхода на основе метода конечных объемов // Бюллетень сибирской медицины. – Томск: Сибирский государственный медицинский университет, 2014. – Изд. 13 (4). – С. 156–164.

12. Humplík P., Čermák P., Žid T. Electrical impedance tomography for decay diagnostics of Norway spruce (*Picea abies*): possibilities and opportunities // *Silva Fennica*, 2016. – Vol. 50 (1). – P. 1–13.

13. Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. Методи комплексного аналізу: монографія. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.

14. Bomba A. Y., Hladka O. M. Problems of Identification of the Parameters of Quasiideal Filtration Processes in Nonlinear Layered Porous Media // *Journal of Mathematical Sciences*, 2017. – Vol. 220 (2). – P. 213–225.

15. The GNU MPFR Library. GNU MPFR. The Multiple Precision Floating-Point Reliable Library: manual documents how to install and use the Multiple Precision Floating-Point Reliable. – 2017. – Edition 3.1.6. – Режим доступу: [www.mpfr.org/mpfr-current/mpfr.pdf](http://www.mpfr.org/mpfr-current/mpfr.pdf).

16. Bomba A. Y., Terebus A. V. A spatial generalization of the method of conformal mappings for the solution of model boundary-value filtration problems // *Journal of Mathematical Sciences*, 2012. – Vol. 187 (5). – P. 596–605.

17. Lyashenko V., Hryhorova T. Generalized Mathematical Model of Thermal Diffusion in Powder Metallurgy // AIP Conference Proceedings, 2014. – Sophia. – Vol. 1629 (1). – P. 85–93.

## GENERALIZATION OF THE NUMERICAL QUASICONFORMAL MAPPINGS METHOD FOR THE SOLUTION IDENTIFICATION PROBLEMS WITH USING APPLIED QUASIPOTENTIALS TOMOGRAPHY

M. Boichura

Rivne State Humanitarian University

vul. St. Bandera, 12, Rivne, 33028, Ukraine. E-mail: mboichura@gmail.com

**Purpose.** To research the transferring of the applied quasipotentials method of image reconstruction for solving problems of constructing a quasiconformal mapping when there are several additional sources of the basic flow perturbation. **Methodology.** The method of image reconstruction has been proposed, according to which the analysis problem in the iterative process is reduced to the application of numerical quasiconformal mappings methods, where a well-known approach to the construction a quasiconformal mapping for the case of domains with a large number of equipotential areas is used, and the synthesis problem is reduced to the parametric identification problem solution, in particular using the methodology of sequential identification of a heterogeneous conduction. **Results.** The reconstructed image of the conductivity distribution inside the investigated object in a series of injections for regions with two and three sections of quasipotentials application has been constructed on the basis of the numerical calculations. The proposed approach significantly improves the solution accuracy, although it increases the program execution time in some cases. **Originality.** For the first time, the applied quasipotentials method of reconstruction of images has been used for the solving problems of constructing a quasiconformal mapping, where the several additional sources of perturbation of the basic flow are present. **Practical value.** An algorithm of solving the problem of applied quasipotentials tomography has been presented, and the method's advantages in the case of presence a several areas of perturbation of the basic flow are shown.

**Key words:** applied quasipotentials tomography, quasiconformal mapping, identification, nonlinear problems, numerical methods.

### REFERENCES

1. Holder, D. (2005), *Electrical Impedance Tomography. Methods, History and Applications*, Institute of Physics, London, England.

2. Horb, M. S., Husieva, O. V. (2013), "Choice of

the study object for mathematical model in electrical impedance tomography", *Visnyk NTUU "KPI". Seriya – Radiotekhnika. Radioaparotobuduvannia*, vol. 52, pp. 120-128.

3. Yavorskyi, B. I., Promovych, Yu. B., Yavor-

ska, YE. B. (2011), "An imitation modeling for the direct problem of the electrical impedance tomography", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, vol. 3, no. 68, part 1, pp. 49-53.

4. Liu, D., Kolehmainen, V., Siltanen, S. and other (2015), "Estimation of Conductivity Changes in a Region of Interest with Electrical Impedance Tomography", *Inverse Problems and Imaging*, vol. 9, iss. 1, pp. 211-229.

5. Bomba, A. Ya., Kroka, L. L. (2014), "Numerical methods of quasiconformal mappings for solving problems of identifying of electrical conductivity coefficient in an applied potential tomography", *Volynskyi matematychnyi visnyk. Seriya prykladna matematyka*, vol. 11, no. 20, pp. 24-33.

6. Gavrilov, S. V. (2013), "An iterative method for solving a 3D electrical impedance tomography problem in the case of piecewise constant conductivity and several measurements on the boundary", *Vychislitelnye metody i programirovanie novye vychislitelnye tekhnologii*, vol. 14, no. 1, pp. 26-30.

7. Sushko, I. O. and Rybin, O. I. (2014), "Visualization of Surface Conductivity Distribution by Conductivity Zones Method", *Naukovi visti NTUU "KPI"*, vol. 5, iss. 97, pp. 7-17.

8. Bomba, A. Ya. and Boichura, M. V. (2017), "Applied quasipotential method for solving coefficient problems of parametric identification", *Visnyk NUVHP. Tekhnichni nauky: zb. nauk. prats*, vol. 4, no. 76, pp. 163-177.

9. Hauptmann, A., Santacesaria, M. and Siltanen, S. (2017), "Direct inversion from partial-boundary data in electrical impedance tomography", *Inverse Problems*, vol. 33, no. 2, pp. 1-26.

10. Sherina, E. S. and Starchenko, A. V. (2014), "Finite volume schemes for the electrical impedance

tomography problem", *Vestnik tomского gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika*, vol. 3 (29), pp. 25-38.

11. Sherina, E. S. and Starchenko, A. V. (2014), "Numerical simulation of electrical impedance tomography problem and study of approach based on finite volume method", *Bjulleten' sibirskoj medicyny*, vol. 13, no. 4, pp. 156-164.

12. Humplík, P., Čermák, P., Žid, T. (2016), "Electrical impedance tomography for decay diagnostics of Norway spruce (*Picea abies*): possibilities and opportunities", *Silva Fennica*, vol. 50, no. 1, pp. 1-13.

13. Bomba, A. Ya., Kashtan, S. S., Pryhornytskyi, D. O. and Yaroshchak, S. V. (2013), *Metody kompleksnoho analizu: monografiia* [Complex analysis methods: monograph], *NUVHP*, Rivne, Ukraine.

14. Bomba, A. Y. and Hladka, O. M. (2017), "Problems of Identification of the Parameters of Quasiideal Filtration Processes in Nonlinear Layered Porous Media", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 220, no. 2, pp. 213-225.

15. The *GNU MPFR Library* (2017), "GNU MPFR. The Multiple Precision Floating-Point Reliable Library", manual documents how to install and use the Multiple Precision Floating-Point Reliable, edition 3.1.6, available at: [www.mpfr.org/mpfr-current/mpfr.pdf](http://www.mpfr.org/mpfr-current/mpfr.pdf) (accessed October 07, 2017).

16. Bomba, A. Y. and Terebus, A. V. (2012), "A spatial generalization of the method of conformal mappings for the solution of model boundary-value filtration problems", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 187, no. 5, pp. 596-605.

17. Lyashenko, V. and Hryhorova, T. (2014), "Generalized Mathematical Model of Thermal Diffusion in Powder Metallurgy", *AIP Conference Proceedings*, vol. 1629, no. 1, pp. 85-93.

Стаття надійшла 15.11.2017.