

РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНОГО ІМПЕДАНСУ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО ДИСКУ В ОБЛАСТІ ВИСОКИХ ЧАСТОТ

К. В. Базіло

Черкаський державний технологічний університет

бул. Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006, Україна. E-mail: b_constantine@ukr.net

Актуальність застосування різних функціональних елементів п'єзоелектроніки в силових і інформаційних системах пояснюється, перш за все, їх високою надійністю. В результаті дослідження математичної моделі реального пристрою можна визначити той набір геометричних, фізико-механічних та електричних параметрів реального об'єкта, який забезпечує реалізацію технічних показників функціонального елемента п'єзоелектроніки обумовлених в технічному завданні. Це істотно скорочує час і вартість розробки нових функціональних елементів п'єзоелектроніки. У статті за допомогою методу усереднення вирішена система диференціальних рівнянь в часткових похідних і на цій основі побудована математична модель електричного імпедансу п'єзокерамічного диску в області високих частот, де вектор зміщення матеріальних частинок визначається радіальним і осевим компонентами.

Ключові слова: тонкий диск, п'єзокераміка, електричний імпеданс, вектор зміщення матеріальних частинок.

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИМПЕДАНСА ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ДИСКА В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ЧАСТОТ

К. В. Базіло

Черкасский государственный технологический университет

бул. Шевченко, 460, г. Черкассы, 18006, Украина. E-mail: b_constantine@ukr.net

Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью. В результате исследования математической модели реального устройства можно определить тот набор геометрических, физико-механических и электрических параметров реального объекта, который обеспечивает реализацию технических показателей функционального элемента пьезоэлектроники оговоренных в техническом задании. Это существенно сокращает время и стоимость разработки новых функциональных элементов пьезоэлектроники. В статье с помощью метода усреднения решена система дифференциальных уравнений в частных производных и на этой основе построена математическая модель электрического импеданса пьезокерамического диска в области высоких частот, где вектор смещения материальных частиц определяется радиальным и осевым компонентами.

Ключевые слова: тонкий диск, пьезокерамика, электрический импеданс, вектор смещения материальных частиц.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Актуальність застосування різних функціональних елементів п'єзоелектроніки в силових і інформаційних системах пояснюється, перш за все, їх високою надійністю. Одним із основних елементів таких систем є п'єзокерамічний трансформатор [1], який є альтернативою електромагнітним трансформаторам в тих сферах їх застосування, де необхідна висока надійність, стабільність, автономність, максимальна тривалість безвідмовної роботи [2].

П'єзоелектричний трансформатор має ряд переваг в порівнянні з електромагнітним, а саме [3, 4]: високу питому потужність; відсутність електромагнітних завад; високу ефективність; можливість мініатюризації; широкий частотний діапазон; вогнестійкість; проста технологія виготовлення. Надзвичайно широкі можливості п'єзотрансформаторів дозволяють використовувати їх при створенні різноманітних аналогових і дискретних пристроїв перетворення сигналів, знаходити широке застосування в світлотехнічній апаратурі і приладах [5–7].

Використання п'єзотрансформаторів стримується складністю адекватного аналітичного опису їх моделей [8]. Кінцевою метою математичного моделювання фізичного стану коливальних п'єзокерамічних елементів є якісний і кількісний опис характеристик і параметрів існуючих в них електричних і пружних полів.

Відомо [9], що при описі різних форм коливальних одного і того ж об'єкта використовуються різні набори матеріальних констант. Так, при описі товщинних коливальних поляризованої по товщині п'єзокерамічної пластинки потрібно, як мінімум, знання модуля пружності c_{33}^E (модуль пружності, вимірюваний в режимі сталості (рівності нулю) напруженості електричного поля), п'єзомодуля e_{33} і діелектричної проникності χ_{33}^E (діелектрична проникність, яка вимірюється в режимі сталості (рівності нулю) деформації або, як іноді кажуть, але це правильно лише наполовину, проникність затиснутого п'єзоелектрика). При описі радіальних коливальних поляризованого по товщині п'єзокерамічного диску потрібне знання набагато більшого числа матеріальних констант, а саме c_{11}^E , c_{12}^E , c_{13}^E , c_{33}^E , e_{31} , e_{33} і χ_{33}^E . Зіставляючи між собою результати вимірювання модулів пружності c_{11}^E і c_{13}^E , нескладно помітити, що вони відрізняються один від одного на величину, яка рідко перевищує рівень 0,3-0,5% від номінального значення (див., наприклад, таблиці, наведені в монографіях [9, 10]). Насправді, пружні властивості поляризованої по товщині п'єзокерамічної пластинки в площині, яка перпендикулярна до кристалографічної осі Z, є трансверсально ізотропними. Цей

факт дає підстави для висновку, що оцінка числових значень модулів пружності $c_{\alpha\beta}^E$ може і повинна проводитися в припущенні, що $c_{12}^E = c_{13}^E$. Більш того, можна довести шляхом формальних міркувань, що напружено-деформований стан пластинки в режимі товщинних коливань описується за допомогою модуля пружності c_{33}^E тільки в тому випадку, коли виконується рівність $c_{12}^E = c_{13}^E$.

Для побудови несуперечливої методики експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки, яка доставляє достовірні значення мінімум трьох модулів пружності, двох елементів матриці п'єзомодулів і одного елемента матриці діелектричної проникності необхідно послідовно розглянути електричний імпеданс коливального п'єзокерамічного диску в області низьких, середніх і високих частот. Зокрема, в роботах [11, 12] розглядається електричний імпеданс коливального п'єзокерамічного диску в області низьких і середніх частот відповідно.

Метою даної роботи є розрахунок електричного імпедансу коливального диску в області високих частот.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. В області високих частот, коли довжина пружної хвилі стає сумірною з товщиною диска, вектор зміщення матеріальних частинок володіє і радіальним і осьовим компонентами. Електричний імпеданс коливального п'єзокерамічного диску визначений в роботі [11] формулою (29).

Усереднений по товщині диска радіальний компонент $u_{\rho}^{(z)}(\rho)$ вектора зміщення матеріальних частинок диска повинен задовольняти рівняння (18) [12]. Усереднений за площею електродованої поверхні аксіальний компонент $u_z^{(\rho)}(z)$ повинен задовольняти рівняння

$$\frac{\partial \sigma_{zz}^{(\rho)}(z)}{\partial z} + \rho_0 \omega^2 u_z^{(\rho)}(z) = 0, \quad (1)$$

яке виходить з рівняння усталених осьових коливань (див. вираз (6) в роботі [11]) після застосування до нього процедури усереднення (див. формулу (24) в роботі [11]). Символом $\sigma_{zz}^{(\rho)}(z)$ в співвідношенні (1) позначено нормальне напруження $\sigma_{zz}(\rho, z)$, усереднене по площі електродованої поверхні диска, тобто

$$\sigma_{zz}^{(\rho)}(z) = \frac{2}{R^2} \int_0^R \rho \sigma_{zz}(\rho, z) d\rho. \quad (2)$$

Нормальні напруження $\sigma_{\rho\rho}^{(z)}(\rho)$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(z)}(\rho)$ і $\sigma_{zz}^{(\rho)}(z)$ отримуються шляхом відповідного усереднення наступних виразів:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(\rho, z) = & c_{11}^E \frac{\partial u_{\rho}(\rho, z)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{u_{\rho}(\rho, z)}{\rho} + \\ & + c_{12}^E \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - e_{31} E_z(\rho, z), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, z) = & c_{12}^E \frac{\partial u_{\rho}(\rho, z)}{\partial \rho} + c_{11}^E \frac{u_{\rho}(\rho, z)}{\rho} + \\ & + c_{12}^E \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - e_{31} E_z(\rho, z), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(\rho, z) = & c_{12}^E \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_{\rho}(\rho, z)] + \\ & + c_{33}^E \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - e_{33} E_z(\rho, z). \end{aligned} \quad (5)$$

Аксіальний компонент $D_z(\rho)$ вектора електричної індукції записується в такий спосіб

$$\begin{aligned} D_z(\rho) = & e_{31} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_{\rho}(\rho, z)] + \\ & + e_{33} \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} + \chi_{33}^{\varepsilon} E_z(\rho, z). \end{aligned} \quad (6)$$

З умови $\partial D_z(\rho) / \partial z = 0$ випливає фізично еквівалентне виразу (6) представлення компонента $D_z(\rho)$

$$\begin{aligned} D_z(\rho) = & e_{31} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_{\rho}^{(z)}(\rho)] + \\ & + \frac{e_{33}}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] - \chi_{33}^{\varepsilon} \frac{U_0}{\alpha}. \end{aligned} \quad (7)$$

Віднімаючи з виразу (6) співвідношення (7), отримуємо наступний результат

$$\begin{aligned} & \frac{e_{31}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho [u_{\rho}(\rho, z) - u_{\rho}^{(z)}(\rho)] \right\} + \\ & + e_{33} \left\{ \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - \frac{1}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] \right\} + \\ & + \chi_{33}^{\varepsilon} \left[E_z(\rho, z) + \frac{U_0}{\alpha} \right] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Усереднюючи вираз (8) по товщині диска, отримуємо

$$E_z^{(z)}(\rho) = -U_0 / \alpha. \quad (9)$$

Підаючи вираз (8) процедурі усереднення (2), приходимо до висновку, що в разі тонкого диска, коли $u_{\rho}(R, z) - u_{\rho}^{(z)}(R) \cong 0$, усереднений по площі електродованої поверхні диска аксіальний компонент вектора напруженості електричного поля записується у вигляді

$$\begin{aligned} E_z^{(\rho)}(z) = & -\frac{U_0}{\alpha} - \\ & - \frac{e_{33}}{\chi_{33}^{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial u_z^{(\rho)}(z)}{\partial z} - \frac{1}{\alpha} [u_z^{(\rho)}(\alpha) - u_z^{(\rho)}(0)] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Усереднюючи вираз (3) і (4) по товщині диска, і беручи до уваги визначення (9), отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(z)}(\rho) = & c_{11}^E \frac{\partial u_{\rho}^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{u_{\rho}^{(z)}(\rho)}{\rho} + \\ & + \frac{c_{12}^E}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] + \frac{e_{31}}{\alpha} U_0. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(z)}(\rho) = c_{12}^E \frac{\partial u_{\rho}^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11}^E \frac{u_{\rho}^{(z)}(\rho)}{\rho} + \frac{c_{12}^E}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] + \frac{e_{31} U_0}{\alpha} \quad (12)$$

Для тонкого диска справедлива оцінка: $u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0) \cong u_z^{(\rho)}(\alpha) - u_z^{(\rho)}(0)$. З урахуванням цього факту підстановка співвідношень (11) і (12) в рівняння (18) [12] приводить до наступного результату:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_{\rho}^{(z)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_{\rho}^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + \left[(\lambda^E R)^2 - 1 \right] u_{\rho}^{(z)}(\rho) = 0 \quad (13)$$

де $\lambda^E = \omega / \sqrt{c_{11}^E / \rho_0}$ – хвильове число радіальних коливань п'єзокерамічного диска в області високих частот, коли $\sigma_{zz}(\rho, z) \neq 0$. Рішення рівняння (13) очевидне

$$u_{\rho}^{(z)}(\rho) = C J_1(\lambda^E \rho), \quad (14)$$

де C – частотно залежна константа, що підлягає визначенню.

Піддаючи операції усереднення (2) співвідношення (5), і вважаючи при цьому, що для тонкого диску справедлива оцінка $u_{\rho}(R, z) \cong u_{\rho}^{(z)}(R)$, отримуємо наступний результат

$$\sigma_{zz}^{(\rho)}(z) \cong \frac{2c_{12}^E}{R} u_{\rho}^{(z)}(R) + c_{33}^D \frac{\partial u_z^{(\rho)}(z)}{\partial z} - \frac{e_{33}^2}{\chi_{33}^E \alpha} [u_z^{(\rho)}(\alpha) - u_z^{(\rho)}(0)] + \frac{e_{33} U_0}{\alpha} \quad (15)$$

де $c_{33}^D = c_{33}^E (1 + K_{33}^2)$; $K_{33}^2 = e_{33}^2 / (\chi_{33}^E c_{33}^E)$ – квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку для режиму товщинних коливань поляризованої по товщині п'єзокерамічної пластинки.

Підставляючи вираз (15) в рівняння (1), приводимо його до наступного вигляду:

$$\frac{\partial^2 u_z^{(\rho)}(z)}{\partial z^2} + \gamma^2 u_z^{(\rho)}(z) = 0, \quad (16)$$

де $\gamma = \omega / \sqrt{c_{33}^D / \rho_0}$ – хвильове число аксіальних (товщинних) коливань п'єзокерамічного диску. Рішення рівняння (16) очевидне:

$$u_z^{(\rho)}(z) = A \cos \gamma z + B \sin \gamma z, \quad (17)$$

де A і B – частотно залежні константи, що підлягають визначенню.

Константи A , B і C визначаються з граничних умов

$$\sigma_{\rho\rho}^{(z)}(R) \cong \left[c_{11}^E \frac{\partial u_{\rho}^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{u_{\rho}^{(z)}(\rho)}{\rho} \right]_{\rho=R} +$$

$$+ \frac{c_{12}^E}{\alpha} [u_z^{(\rho)}(\alpha) - u_z^{(\rho)}(0)] + \frac{e_{31} U_0}{\alpha} = 0 \quad (18)$$

$$\sigma_{zz}^{(\rho)}(z) \Big|_{z=\alpha;0} = 0, \quad (19)$$

де нормальне напруження $\sigma_{zz}^{(\rho)}(z)$ визначено співвідношенням (15).

Підстановка рішень (14) і (17) в умови (18) і (19) приводить до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} Am_{11} + Bm_{12} + Cm_{13} &= -\frac{e_{31} U_0}{c_{12}^E} p_1, \\ Am_{21} + Bm_{22} + Cm_{23} &= -\frac{e_{31} U_0}{c_{12}^E} p_2, \\ Am_{31} + Bm_{32} + Cm_{33} &= -\frac{e_{31} U_0}{c_{12}^E} p_3, \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} m_{11} &= -\frac{1 - \cos \gamma \alpha}{\gamma \alpha}; \quad m_{12} = \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha}; \\ m_{13} &= \xi_1 \left[J_0(\xi_3 \gamma \alpha) - \frac{1 - k^E}{\xi_3 \gamma \alpha} J_1(\xi_3 \gamma \alpha) \right]; \\ \xi_1 &= \frac{\sqrt{c_{11}^E c_{33}^D}}{c_{12}^E}; \quad \xi_3 = \frac{R}{\alpha} \sqrt{\frac{c_{33}^D}{c_{11}^E}}; \quad p_1 = 1; \\ m_{21} &= \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha} - \sin \gamma \alpha; \\ m_{22} &= -\frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} + \cos \gamma \alpha; \\ m_{23} &= \frac{2c_{12}^E \alpha}{c_{33}^D R} \frac{J_1(\xi_3 \gamma \alpha)}{\gamma \alpha}; \quad p_2 = \frac{e_{33} c_{12}^E}{e_{31} c_{33}^D}; \\ m_{31} &= \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha}; \end{aligned}$$

$$m_{32} = -\frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} + 1; \quad m_{33} = m_{23}; \quad p_3 = p_2.$$

Рішення системи рівнянь (20) можна записати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{e_{31} U_0}{\gamma \alpha c_{12}^E} \frac{\Delta(A)}{\Delta_0}, \quad B = -\frac{e_{31} U_0}{\gamma \alpha c_{12}^E} \frac{\Delta(B)}{\Delta_0}, \\ C &= -\frac{e_{31} U_0}{\gamma \alpha c_{12}^E} \frac{\Delta(C)}{\Delta_0}, \end{aligned}$$

де $\Delta(A)$, $\Delta(B)$, $\Delta(C)$ і Δ_0 – визначники наступних матриць:

$$\Delta(A) = \det \begin{vmatrix} p_1 & m_{12} & m_{13} \\ p_2 & m_{22} & m_{23} \\ p_3 & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta(B) = \det \begin{vmatrix} m_{11} & p_1 & m_{13} \\ m_{21} & p_2 & m_{23} \\ m_{31} & p_3 & m_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta(C) = \det \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & p_1 \\ m_{21} & m_{22} & p_2 \\ m_{31} & m_{32} & p_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_0 = \det \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}.$$

Після визначення констант A , B і C можна записати в явному вигляді усереднені зміщення $u_\rho^{(z)}(R)$, $u_z^{(\rho)}(\alpha)$ і $u_z^{(\rho)}(0)$, і визначити вираз для функції $\Xi^\varepsilon(\omega)$ (див. співвідношення (28) в роботі [11]) в явному вигляді

$$\Xi^\varepsilon(\omega) = \frac{U_0}{\Delta_0} F^\varepsilon(\omega, \Pi),$$

де $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$ – функція, що залежить від частоти і набору геометричних і фізико-механічних параметрів (символ Π в списку аргументів функції) диску, числові значення якої задаються формулою

$$F^\varepsilon(\omega, \Pi) = \frac{2e_{31}^2 \alpha}{\chi_{33}^E c_{12}^E R} \Delta(C) \frac{J_1(\lambda^E R)}{\lambda \alpha} + \frac{e_{33} e_{31}}{\chi_{33}^E c_{12}^E} \left[-\Delta(A) \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha} + \Delta(B) \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} \right] + 1.$$

При цьому електричний імпеданс п'єзокерамічного диску в області високих частот задається наступним виразом

$$Z_{el}(\omega) = \frac{U_0}{-i\omega C_\delta^\varepsilon \Xi^\varepsilon(\omega)} = \frac{\Delta_0}{-i\omega C_\delta^\varepsilon F^\varepsilon(\omega, \Pi)}, \quad (21)$$

де $C_\delta^\varepsilon = \pi R^2 \chi_{33}^E / \alpha$ – динамічна електрична ємність п'єзокерамічного диску на високих частотах

На рис. 1 показані результати розрахунків модуля електричного імпедансу диска, які виконувалися за формулою (21) при наступному фіксованому наборі параметрів: $c_{11}^E = 110$ ГПа; $c_{12}^E = 60$ ГПа; $c_{33}^E = 100$ ГПа; $e_{33} = 18$ Кл/м²; $e_{31} = -8$ Кл/м² і $\chi_{33}^E = 1400 \chi_0$; $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – діелектрична постійна; механічна добротність п'єзокераміки $Q_M = 100$; густина п'єзокераміки $\rho_0 = 7400$ кг/м³. Товщина диску $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$ м. Варіюваним параметром сімейства кривих, показаних на рис. 1, є співвідношення R/α , яке задавалося рівним 100; 50; 25; 12,5 і 6,25. Числові значення співвідношення R/α проставлені в полі рисунка біля відповідних кривих. По вісі ординат на рис. 1 відкладаються нормовані на величину модуля $Z_{el}(\omega_a)$ на частоті ω_a товщин-

ного антирезонансу значення модуля електричного імпедансу $Z_{el}(\omega)$. По осі абсцис відраховується безрозмірне хвильове число $\gamma \alpha$. При обумовлених вище значеннях параметрів диска значенням $\gamma \alpha = 1$ відповідає циклічна частота $f = v^D / (2\pi \alpha) = 219,1$ кГц, де $v^D = \sqrt{c_{33}^D / \rho_0} = 4130$ м/с – швидкість поширення плоских хвиль стиснення-розтягування вздовж напрямку електричної поляризації диска.

З показаних на рис. 1 результатів випливає, що при значній зміні співвідношення R/α , значення безрозмірної частоти першого товщинного електромеханічного антирезонансу залишається практично незмінним. Сказане підтверджують побудови, наведені на рис. 2, де показані результати обчислення співвідношення $|Z_{el}(\omega)| / |Z_{el}(\omega_a)|$ в найближчій околиці частоти антирезонансу. По вісі абсцис відкладаються значення безрозмірної частоти $\gamma \alpha$ в одиницях числа π , тобто величини $\gamma \alpha / \pi$. Чітко видно, що максимально можлива зміна безрозмірної частоти електромеханічного антирезонансу не перевищує $0,02\pi$. Аналогічний висновок можна зробити про вплив параметра R/α на значення безрозмірної частоти першого товщинного електромеханічного резонансу (рис. 1), де модуль $Z_{el}(\omega)$ приймає мінімальне значення.

На підставі цього можна зробити висновок, що радіальні зміщення $u_\rho^{(z)}(R)$ матеріальних частинок диска практично не впливають на числові значення частот першого товщинного електромеханічного резонансу і антирезонансу. Говорячи іншими словами, числові значення частот електромеханічного резонансу і антирезонансу практично повністю визначаються аксіальними зсувами $u_z^{(\rho)}(z)$.

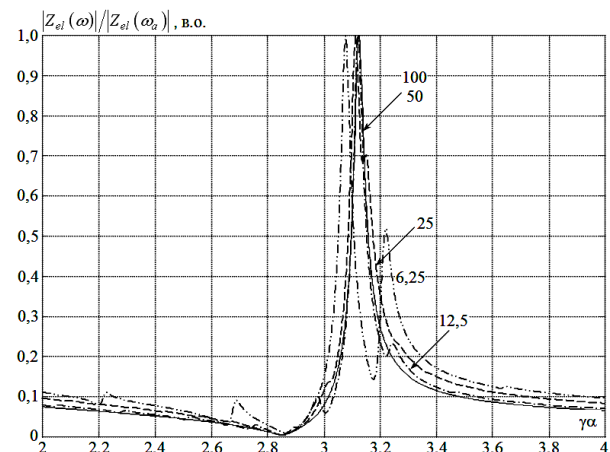


Рисунок 1 – Частотно залежна зміна модуля електричного імпедансу п'єзокерамічного диску в околиці частоти першого товщинного електромеханічного резонансу-антирезонансу

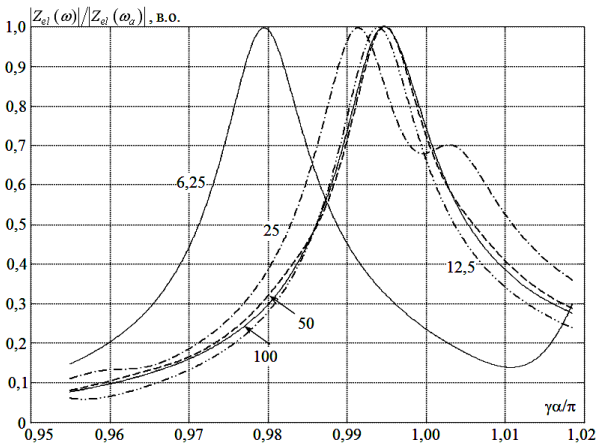


Рисунок 2 – Частотно залежна зміна модуля електричного імпедансу п'єзокерамічного диску в найближчій околиці частоти першого товщинного електромеханічного антирезонансу

Беручи до уваги цю обставину, можна стверджувати, що в області високих частот функція $\Xi^\varepsilon(\omega)$, яка визначає електричний імпеданс коливального диска в цьому частотному діапазоні, може бути записана в наступному вигляді

$$\Xi^\varepsilon(\omega) \cong \frac{e_{33}}{\chi_{33}^\varepsilon} [u_z^{(\rho)}(\alpha) - u_z^{(\rho)}(0)] - U_0. \quad (22)$$

При виконанні розрахунку електричного імпедансу по формулі (22), природно, будуть втрачені деякі деталі частотно залежної зміни функції $Z_{el}(\omega)$. Зате буде збережено головне – числові значення частот електромеханічного резонансу і антирезонансу.

Константи A і B , які входять в опис аксіальних зміщень $u_z^{(\rho)}(z)$ (див. вираз (17)), визначаються з граничних умов (19), де нормальне напруження $\sigma_{zz}^{(\rho)}(z)$ задається наступним виразом

$$\sigma_{zz}^{(\rho)}(z) = \gamma c_{33}^D \left\{ -A \left[\sin \gamma z + \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{(\cos \gamma \alpha - 1)}{\gamma \alpha} \right] + B \left[\cos \gamma z - \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} \right] + \frac{e_{33} U_0}{\gamma \alpha c_{33}^D} \right\}. \quad (23)$$

Підставляючи у вираз (23) значення $z = \alpha$ і $z = 0$, і порівнюючи отримані результати нулю, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з яких єдиним чином визначаються константи A і B :

$$A = \frac{e_{33} U_0}{c_{33}^D} \frac{\operatorname{tg}(\gamma \alpha / 2)}{\gamma \alpha F^\varepsilon(\omega, \Pi)}, \quad B = -A \operatorname{tg}(\gamma \alpha / 2), \quad (24)$$

де

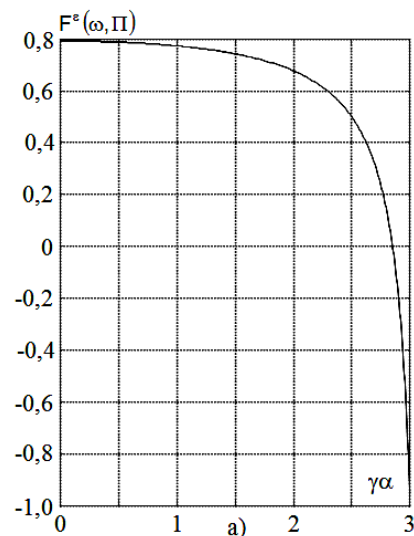
$$F^\varepsilon(\omega, \Pi) = 1 - \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\operatorname{tg}(\gamma \alpha / 2)}{(\gamma \alpha / 2)}. \quad (25)$$

Підстановка виразів (24) у визначення (17) аксіальних зміщень матеріальних частинок п'єзокерамічного диску, дозволяє визначити величини $u_z^{(\rho)}(\alpha)$ і $u_z^{(\rho)}(0)$, після чого визначається в явному вигляді функція $\Xi^\varepsilon(\omega)$, задана співвідношенням (22). Після цього вираз для розрахунку електричного імпедансу $Z_{el}(\omega)$ можна записати в наступному вигляді

$$Z_{el}(\omega) = \frac{1}{i \omega C_\delta^\varepsilon} F^\varepsilon(\omega, \Pi). \quad (26)$$

З виразу (26) випливає, що при наближенні $\gamma \alpha / 2$ зліва до значення $\pi / 2$, функція $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$ спочатку має позитивні значення, потім обертається в нуль, що відповідає електромеханічному резонансу, а потім спрямовується до мінус нескінченності. У разі відсутності втрат енергії на в'язке тертя в матеріалі п'єзокерамічного диску ($Q_M \rightarrow \infty$) при $\gamma \alpha = \pi$ електричний імпеданс $Z_{el}(\omega_\alpha) \rightarrow \infty$.

На рис. 3, а показана зміна функції $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$ для випадку $Q_M \rightarrow \infty$ і $K_{33}^2 = 0,262$, що відповідає набору фізико-механічних параметрів, які були використані при розрахунках кривих, які показані на рис. 1 і рис. 2. На рис. 3, б показаний нормований на своє максимальне значення модуль комплекснозначної функції $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$, коли механічна добротність матеріалу диска $Q_M = 100$ і безрозмірне хвильове число $\gamma \alpha$ стає комплексним числом $\gamma \alpha (1 - i / (2Q_M))$. Зіставляючи між собою криві, які показані на рис. 1 і рис. 3, б, можна зробити висновок, що деталізований розрахунок електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диску слід здійснювати за формулою (21), а оцінку числових значень частот резонансу і антирезонансу виконувати з використанням функції $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$, яка задана виразом (25).



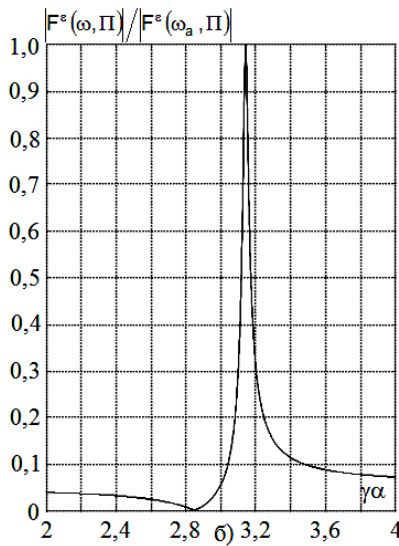


Рисунок 3 – Частотно залежна зміна функції $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$ при відсутності втрат енергії в матеріалі диска (а) і для матеріалу з механічною добротністю $Q_M = 100$ (б)

Завершуючи дослідження електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в області високих частот, розглянемо його значення на частоті першого електромеханічного резонансу.

У формулі (26) від значення механічної добротності Q_M залежать хвильове число γ і квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку K_{33}^2 . При цьому $\gamma = \omega/v^D \cong \gamma^0(1 - i/(2Q_M))$ і, $K_{33}^2 = e_{33}^2 / [\chi_{33}^\varepsilon c_{33}^E (1 + i/Q_M)]$, де γ^0 – хвильове число осьових коливань диска, визначене без урахування втрат енергії на в'язке тертя. Очевидно, що параметр $\varepsilon = 1/(2Q_M) \ll 1$. Розкладаючи вираз (26) на частоті першого електромеханічного резонансу в ряд за ступенями малого параметра ε , і обмежуючись при цьому нульовим і першим членами розкладання, отримуємо

$$Z_{el}(\omega_p) = \varepsilon \frac{K_{33}^2 \Psi(\omega_p)}{\omega_p C_\delta^\varepsilon (1 + K_{33}^2)}, \quad (27)$$

де $K_{33}^2 = e_{33}^2 / (\chi_{33}^\varepsilon c_{33}^E)$;

$$\Psi(\omega_p) = \frac{2tg(\gamma^0 \alpha/2)}{(1 + K_{33}^2) \gamma^0 \alpha/2} + \frac{1 + \sin(\gamma^0 \alpha)}{\cos^2(\gamma^0 \alpha/2)} \gamma^0 \alpha.$$

На рис. 8 наведені графіки модуля електричного імпедансу $Z_{el}(\omega)$, розраховані за формулою (21) в найближчій околиці частоти першого електромеханічного резонансу. По вісі ординат відкладаються значення модуля функції $Z_{el}(\omega)$ в Омах, по вісі абсцис – безрозмірна частота $\gamma\alpha = \omega\alpha/v^D$, де $v^D = \sqrt{c_{33}^D/\rho_0}$ – швидкість плоских хвиль стиснення-розтягування, при визначенні якої не враховуються втрати в п'єзоелектрику. Розрахунки виконувалися для диска зі співвідношенням $R/\alpha = 12,5$.

Інші параметри вказані в коментарях до рис. 1. Змінним параметром сімейства кривих на рис. 4 є механічна добротність Q_M , якій присвоювалися значення 60, 80, 100 і 120 одиниць. Значення добротності проставлені біля відповідних кривих. Чітко видно, що найбільшому значенню Q_M відповідає найменше значення електричного імпедансу $Z_{el}(\omega_p)$, який, як випливає з формули (27), має позитивні дійсні значення, тобто $|Z_{el}(\omega_p)| \equiv Z_{el}(\omega_p)$.

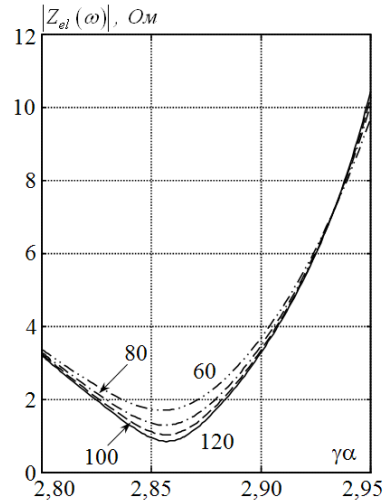


Рисунок 4 – Розрахунок за формулою (21) модуля електричного імпедансу диска в околиці частоти першого електромеханічного резонансу

Оскільки величина $Z_{el}(\omega_p)$ є вимірюваною в реальному експерименті, остільки з виразу (27) впливає оцінка механічної добротності Q_M на частоті першого товщинного електромеханічного резонансу

$$Q_M = \frac{K_{33}^2 \Psi(\omega_p)}{2Z_{el}(\omega_p) \omega_p C_\delta^\varepsilon (1 + K_{33}^2)}. \quad (28)$$

Необхідно особливо відмітити, що механічна добротність $Q_M^{(\rho)}$ і механічна добротність $Q_M^{(z)}$, визначена виразом (28), не рівні одна одній. Більш того, має виконуватися нерівність $Q_M^{(\rho)} > Q_M^{(z)}$. Причина такого стану речей в достатній мірі очевидна – втрати енергії на в'язке тертя зростають з ростом частоти.

ВИСНОВКИ. Основні результати цієї статті можна зафіксувати в такий спосіб: за допомогою методу усереднення вирішена система диференціальних рівнянь в часткових похідних і на цій основі побудована математична модель електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в області високих частот, де вектор зміщення матеріальних частинок визначається радіальним і осьовим компонентами.

ПОДЯКИ. Робота виконана в рамках науково-дослідної роботи Черкаського державного технологічного університету «Створення високоєфективного інтелектуального комплексу для розробки та дослідження п'єзоелектричних компонентів для приладобудування, медицини та робототехніки» (№ держ. реєстрації 0117U000936).

ЛІТЕРАТУРА

1. Богдан А. В., Петрищев О. Н., Якименко Ю. И., Яновская Ю. Ю. Исследование характеристик пьезоэлектрического трансформатора на основе радиальных колебаний в тонких пьезокерамических дисках. *Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии»*. 2009. Ч. 1. С. 269–274.
2. Богдан А. В., Петрищев О. Н., Якименко Ю. И., Яновская Ю. Ю. Математическое моделирование колебаний тонких пьезокерамических дисков для создания функциональных элементов пьезоэлектроники *Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии»*. 2009. Ч. 2. С. 35–42.
3. Hsu Y. H., Lee C. K., Hsiao W. H. Electrical and mechanical fully coupled theory and experimental verification of rosen-type piezoelectric transformers. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*. 2005. Vol. 52. No. 10. P. 1829–1839.
4. Flynn A. M., Sanders S. R. Fundamental limits on energy transfer and circuit considerations for piezoelectric transformers. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2002. Vol. 17. No. 1. P. 8–14.
5. Климашин В. М., Никифоров В. Г., Сафонов А. Я., Казаков В. К. Новые области применения пьезотрансформаторов. *Компоненты и технологии*. 2004. № 1. С. 56–60.
6. Day M., Lee B. S. Understanding piezoelectric transformers in CCFL backlight applications. *Analog Applications Journal*. 2002. 4Q. P. 18–24.
7. Wells E. Comparing magnetic and piezoelectric transformer approaches in CCFL applications. *Analog Applications Journal*. 2002. 1Q. P. 12–18.
8. Шкодзінський О., Белякова І., Пісцьо В., Медвідь В. Експериментальні частотні характеристики п'єзотрансформатора поперечно-поперечного типу для стабілізації струму люмінесцентної лампи. *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. 2011. Т. 16. № 3. С. 142–148.
9. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 280 с.
10. Партон В. З. Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Москва: Наука, 1988. 472 с.
11. Петрищев О. Н., Базило К. В. Определение электрического импеданса пьезокерамического диска и его расчет в области низких частот. *Вісник Черкаського державного технологічного університету*. Черкаси, 2016. № 3. С. 24–35.
12. Базило К. В. Принципи розрахунку електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диску в області середніх частот. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. Запоріжжя, 2017. № 4. С. 15–25.

CALCULATION OF ELECTRICAL IMPEDANCE OF OSCILLATING PIEZOCERAMIC DISK IN THE AREA OF HIGH FREQUENCIES

C. Bazilo

Cherkasy State Technological University

bul. Shevchenko, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine. E-mail: b_constantine@ukr.net

Purpose. The aim of this work is to calculate the electrical impedance of oscillating piezoelectric disk in the high-frequency range. **Methodology.** The final goal of mathematical modeling of the vibrating piezoelectric elements physical condition is a qualitative and quantitative description of characteristics and parameters of existing electrical and elastic fields. It is clear that to obtain meaningful and reliable quantitative estimates of the physical condition parameters of the piezoelectric (piezoceramic) element is not possible without reliable data on the values of the materials physical and mechanical constants. Thus, it is necessary to build noncontradictory method of material constants experimental determination of piezoelectric ceramics, which delivers reliable values of at least three modules of elasticity, two elements of the matrix of piezoelectric coefficients and one element of the matrix of dielectric constants. **Results.** At sufficiently general initial assumptions a mathematical description of the electrical impedance of the oscillating thin piezoceramic disk with end surfaces continuous covering by electrodes in vacuum is obtained. It is shown that electric impedance is determined by the averaged values of the components of piezoceramics material particles displacement vector. **Originality.** With the help of the averaging method a system of differential equations in partial derivatives is solved, and on this basis, a mathematical model of the electrical impedance of the piezoceramic disk at high frequencies is built, where the material particles displacement vector is determined by the radial and axial components. **Practical value.** As a result of research of real device's mathematical model a set of geometrical, physical and mechanical and electrical parameters of a real object can be determined which provides realization of technical parameters of piezoelectric functional element specified in technical specifications. This significantly reduces the time and cost of new functional elements of piezoelectronics development. References 12, figures 4.

Key words: thin disk, piezoelectric ceramics, electrical impedance, material particles displacement vector.

REFERENCES

1. Bogdan, A. V., Petrishhev, O. N., Yakimenko, Yu. I., Yanovskaya, Yu. Yu. (2009), "Issledovanie xarakteristik p'ezoelektricheskogo transformatora na osnove radial'nyx kolebanij v tonkix p'ezokeramicheskix diskax Investigation of the characteristics of the piezoelectric transformer on the basis of the radial oscillations in a thin piezoceramic disks" [Investigation of the characteristics of the piezoelectric transformer on the basis of the radial oscillations in a thin piezoceramic disks], *E'lektronika i svyaz', Tematicheskij vypusk «E'lektronika i nanotexnologii»*, Vol. 1, pp. 269–274.
2. Bogdan, A. V., Petrishhev, O. N., Yakimenko, Yu. I., Yanovskaya, Yu. Yu. (2009), "Matematicheskoe modelirovanie kolebanij tonkix p'ezokeramicheskix diskov dlya sozdaniya funkcional'nyx

e'lementov p'ezoe'lektroniki" [Mathematical modelling of vibrations of thin piezoceramic disks to create functional piezoelectronics elements], *E'lektronika i svyaz', Tematicheskij vypusk «E'lektronika i nanotexnologii»*, P. 2, pp. 35–42.

3. Yu-Hsiang, Hsu, Chih-Kung, Lee, Wen-Hsin, Hsiao (2005), "Electrical and Mechanical Fully Coupled Theory and Experimental Verification of Rosen-Type Piezoelectric Transformers", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 52, No. 10, pp. 1829–1839.

4. Flynn, Anita M., Sanders, Seth R. (2002), "Fundamental Limits on Energy Transfer and Circuit Considerations for Piezoelectric Transformers", *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 17, No. 1, pp. 8–14.

5. Klimashin, V. M., Nikiforov, V. G., Safonov, A. Ya., Kazakov, V. K. (2004), "Novye oblasti primeneniya p'ezotransformatorov" [New applications of piezoelectric transformers], *Komponenty i texnologii*, 2004, No. 1, pp. 56–60.

6. Day, Michael, Lee, Bang S. (2002), "Understanding piezoelectric transformers in CCFL backlight applications", *Analog Applications Journal*, 4Q, pp. 18–24.

7. Wells, Eddy (2002), "Comparing magnetic and piezoelectric transformer approaches in CCFL applications", *Analog Applications Journal*, 1Q, pp. 12–18.

8. Shkodzinskyi, O., Bieliakova, I., Pistsio, V., Medvid, V. (2011), "Eksperymentalni chastotni kharak-

terystyky piezotransformatora poperechno-poperechnoho typu dlia stabilizatsii strumu liuminiscentnoi lampy" [Experimental frequency characteristics of transverse-transverse type piezoelectric transformer for stabilizing fluorescent lamp current], *Visnyk TNTU*, Vol. 16, No. 3, pp. 142–148.

9. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F., Shulga, N. A. (1989), *Mexanika svyazannykh polej v e'lementax konstrukcij. T.5. E'lektrouprugost'* [Mechanics of related fields in structural elements. Vol. 5. Electroelasticity], Kiev, Naukova dumka, 280 p.

10. Parton, V. Z., Kudryavtsev, B. A. (1988), *E'lektromagnitoupugost' p'ezoe'lektricheskix i e'lektroprovodnykh tel* [Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electroconductive solids], Moskva, Nauka, 472 p.

11. Petrishchev, O. N., Bazilo, C. V. (2016), "Opredelenie elektricheskogo impedansa p'ezokeramicheskogo diska i ego raschet v oblasti nizkikh chastot" [Determination of electrical impedance of piezoceramic disk and its calculation in low-frequency region], *Visnyk Cherkas'kogo derzhavnogo tehnologichnogo universytetu*, No. 3, pp. 24–35.

12. Bazilo, C. V. (2017), "Pryncypy rozrahunku elektrychnogo impedansu kolyval'nogo p'ezokeramichnogo dysku v oblasti serednih chastot" [Principles of electrical impedance calculating of oscillating piezoceramic disk in the area of medium frequencies], *Radioelektronika, informatyka, upravlinnja, Zaporizhzhja*, No. 4, pp. 15–25.

Стаття надійшла 24.09.2018.