

УДК 666.97.033.16

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПЛИТЫ С ЦЕМЕНТОБЕТОННОЙ СМЕСЬЮ

**А. Г. Маслов, Ю. С. Саленко**

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского  
ул. Первомайская, 20, 39600, м. Кременчуг, Украина. E-mail: maslov@kdu.edu.ua

**Н. А. Маслова**

ЗАО «КБ Ситибанк» корпорации Citigroup  
ул. Гашека, 8-10, 125047, Москва, Россия. E-mail: natalya.maslova@citi.com

Исследовано взаимодействие виброплиты с бетонной смесью, определены инерционные, упругие и неупругие силы сопротивления. Получены выражения, позволяющие определить закон движения виброплиты, работающей в виброимпульсном режиме.

**Ключевые слова:** вибрационная плита, бетонная смесь, уплотнение.

## STUDY OF INTERACTION OF VIBRATING PLATE WITH CONCRETE MIXTURE

**A. G. Maslov, J. S. Salenko**

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyyi National University  
vul. Pervomaiskaya, 20, 39600, Kremenchug, Ukraine. E-mail: maslov@kdu.edu.ua

**N. A. Maslova**

Joint-Stock Company «KB Citybank» corporations Citigroup  
vul. Gashek's, 8-10, 125047, Moscow, Russia. E-mail: natalya.maslova@citi.com

The interaction between the vibration plate with concrete mix, defined inertial, elastic and inelastic resistance forces. to obtain expressions for determining the law of motion vibrating plate that works in a vibration pulse mode.

**Key words:** vibration plate, concrete mix, compaction.

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОДІЇ ВІБРУЮЧОЇ ПЛИТИ З ЦЕМЕНТОБЕТОННОЮ СУМІШШЮ

**О. Г. Маслов, Ю. С. Саленко**

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського  
вул. Першотравнева, 20, 39600, м. Кременчук, Україна. E-mail: maslov@kdu.edu.ua

**Н. А. Маслова**

ЗАТ «КБ Сітібанк» корпорації Citigroup  
вул. Гашека, 8-10, 125047, Москва, Росія. E-mail: natalya.maslova@citi.com

Досліджено взаємодію виброплити з бетонною сумішшю, визначено інерційні, пружні і непружні сили опору. Отримано вирази, що дозволяють визначити закон руху виброплити, яка працює у віброімпульсному режимі.

**Ключові слова:** вібраційна плита, бетонна суміш, ущільнення.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** На характер колебаний и эффективность виброимпульсного воздействия вибрационного рабочего органа большое влияние оказывают инерционные, упругие и неупругие силы сопротивления, возникающие в результате взаимодействия виброплиты с обрабатываемой цементобетонной средой. При этом величина возникающих инерционных, упругих и неупругих сил сопротивления существенно зависит от физико-механических характеристик смеси, толщины слоя цементобетонной смеси, режима вибрационного воздействия, частоты и амплитуды колебаний, опорной площади виброплиты.

В работе [1] приведено исследование взаимодействия виброударного вибрационного рабочего органа с уплотняемой средой при средних показателях динамического модуля упругой деформации и коэффициента динамической вязкости цементобетонной смеси. В работе [2] показано изменение этих физико-механических характеристик в зависимости от плотности смеси, возрастающей в процессе уплотнения при безотрывном режиме работы виброплиты от уплотняемой среды. Для эффективной и надежной работы вибрационных машин, работаю-

щих в виброимпульсном режиме, необходимо точно выбрать их параметры и установить режимы вибрационного воздействия в зависимости от инерционных, упругих и неупругих сил сопротивления, которые изменяются в процессе уплотнения смеси.

Целью работы является исследование взаимодействия виброимпульсного рабочего органа с цементобетонной средой в процессе рабочего режима уплотнения или перемешивания, позволяющее определить инерционные, упругие и неупругие силы сопротивления, влияющие на выбор рациональных параметров вибрационной машины.

**МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.** Для определения сил взаимодействия вибрационного рабочего органа с цементобетонной средой исследуем динамическую систему "виброплита – уплотняемая среда", в которой последняя представлена в виде системы с распределенными параметрами (рис. 1). На виброплиту действует возмущение в виде гармонической силы  $Q \sin \omega t$ . Рассмотрим случай, когда виброплита под действием возмущающей силы оказывает виброимпульсное воздействие на бетонную смесь, т.е. периодически деформирует поверхность слоя цементобетонной

смеси. При этом движение виброплиты можно разделить на два этапа, сопровождающимися переходными процессами:

- 1) удар и движение виброплиты в контакте с уплотняемой средой;
- 2) отрыв виброплиты от уплотняемой среды и движение ее в воздухе до следующего удара.

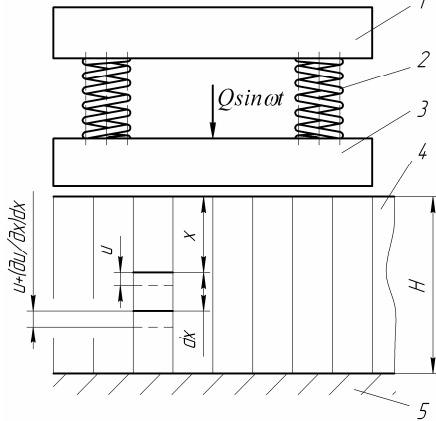


Рисунок 1 – Расчетная схема:

- 1 – опорная рама; 2 – упругие амортизаторы;
- 3 – виброплита; 4 – цементобетонная смесь;
- 5 – основание

Рассмотрим I этап движения.

Для описания зависимости между напряжением и деформацией в цементобетонной смеси используем известное уравнение:

$$\sigma(x,t) = E \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad (1)$$

где  $u$  и  $x$  – эйлерова и лагранжева координаты;  $E$  и  $\eta$  – динамический модуль упругой деформации и коэффициент динамической вязкости цементобетонной смеси;  $t$  – время.

При виброударном воздействии на поверхность цементобетонной смеси ее частицы, из-за инерционности, с некоторым запаздыванием приобретают скорость, равную скорости виброплиты. При этом зависимость между напряжением и деформацией цементобетонной среды может быть описана следующим уравнением [1]:

$$\sigma(x,t) = E \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \left( 1 - e^{-\frac{\pi a t}{H}} \right) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}, \quad (2)$$

где  $a$  – фазовая скорость распространения деформации в слое смеси;  $H$  – толщина слоя смеси.

Вследствие того, что при каждом виброударном воздействии происходит пластическое деформирование поверхности слоя цементобетонной смеси, изменяются его физико-механические характеристики, т.е. изменяются плотность  $\rho$ , динамический модуль упругой деформации  $E$ , коэффициент динамической вязкости цементобетонной смеси  $\eta$  и скорость распространения деформации в слое смеси [2]. В этом случае зависимость (2) преобразуется к следующему виду:

$$\sigma(x,t) = E(\tau) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \eta(\tau) \left( 1 - e^{-\frac{\pi a t}{H}} \right) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}, \quad (3)$$

где  $\tau$  – медленно меняющийся параметр.

Движение рассматриваемой динамической системы на первом этапе может быть описано следующей системой уравнений:

$$E(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta(\tau) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \rho(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (4)$$

$$-m \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} - b_3 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - c_3 u(0,t) + E(\tau) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \eta(\tau) F \left( 1 - e^{-\frac{\pi a t}{H}} \right) \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x \partial t} = -Q \sin(\alpha t + \psi); \quad (5)$$

$$u(H,t) = 0; \quad (6)$$

$$u(x,0) = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = V_0. \quad (8)$$

Здесь  $m$  – масса виброплиты;  $b_3$  и  $c_3$  – коэффициенты сопротивления и жесткости упругой подвески виброплиты;  $Q$  – амплитуда возмущающей силы;  $\omega$  – угловая частота вынужденных колебаний;  $\psi$  – угол сдвига фаз между перемещением виброплиты и возмущающей силой в момент удара об уплотняемую среду;  $F$  – площадь опорной поверхности виброплиты;  $V_0$  – скорость виброплиты в момент удара, подлежащая в дальнейшем определению.

Решение волнового уравнения колебаний (4) будем производить по методу Фурье. Для этого искомого решения представим в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = V(x,t) + W(x,t), \quad (9)$$

каждая из которых является частным решением уравнения колебаний, причем функция  $V(x,t)$  должна описывать только вынужденные колебания динамической системы под действием возмущающей силы  $Q \sin \alpha t$ , а функция  $W(x,t)$  описывать собственные колебания системы.

При этом одновременно функция  $V(x,t)$  должна удовлетворять крайевым условиям (5) и (6), а функция  $W(x,t)$  – начальным условиям (7) и (8).

В свою очередь, функцию  $V(x,t)$  представим в виде суммы двух функций, т.е.

$$V(x,t) = V_1(x,t) + V_2(x,t). \quad (10)$$

Представляя функцию  $V_1(x,t)$  в виде показательной функции,

$$V_1(x,t) = V_1(x) e^{-\frac{\pi a t}{H}}, \quad (11)$$

а функцию  $V_2(x,t)$  в виде мнимой части комплексной функции

$$V_2(x,t) = V_2(x) e^{i(\alpha t + \psi)}, \quad (12)$$

получим

$$V(x,t) = V_1(x)e^{-\frac{\pi at}{H}} + V_2(x)e^{i(\alpha x + \psi)} \quad (13)$$

Здесь  $V_1(x)$ ,  $V_2(x)$  – комплексные амплитуды.

Подставляя выражение (13) в волновое уравнение колебаний (4), получим уравнения для определения функций  $V_1(x)$  и  $V_2(x)$ :

$$\left[ E(\tau) - \eta(\tau) \frac{\pi a}{H} \right] \frac{\partial^2 V_1(x)}{\partial x^2} - \rho \left( \frac{\pi a}{H} \right)^2 V_1(x) = 0 \quad ; (14)$$

$$\left[ E(\tau) + i\eta(\tau)\omega \right] \frac{\partial^2 V_2(x)}{\partial x^2} + \rho \omega^2 V_2(x) = 0 \quad (15)$$

Решение уравнения (14) может быть представлено в виде:

$$V_1(x) = B_1 e^{-\delta_2 x} + B_2 e^{\delta_2 x} \quad (16)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  – постоянные интегрирования, определяемые краевыми условиями (5) и (6);

$$\delta_2 = \frac{\pi a}{H} \sqrt{\frac{\rho}{E(\tau) - \eta(\tau) \frac{\pi a}{H}}} = v \sqrt{\frac{\rho}{E(\tau) - v\eta(\tau)}} \quad ; (17)$$

$$v = \frac{\pi a}{H} \quad (18)$$

Используя выражения (11), (16) и (18), найдем

$$V_1(x,t) = (B_1 e^{-\delta_2 x} + B_2 e^{\delta_2 x}) e^{-v t} \quad (19)$$

Подставим выражение (19) в краевые условия (5) и (6) и, определяя постоянные интегрирования  $B_1$  и  $B_2$ , найдем значение функции  $V_1(x,t)$  в следующем виде:

$$V_1(x,t) = A_2 \operatorname{sh}[\delta_2(H-x)] e^{-v t} \quad (20)$$

где

$$A_2 = \eta(\tau) F V_0 / [ \operatorname{sh}(\delta_2 H)(m v^2 + c_3 - b_3 v) + ch(\delta_2 H)[E(\tau) - v\eta(\tau)] \delta_2 F ]$$

Перейдем к решению уравнения (15), для чего это уравнение преобразуем к виду

$$\frac{\partial^2 V_2(x)}{\partial x^2} + \frac{\rho \omega^2}{E(\tau) + i\eta(\tau)\omega} V_2(x) = 0 \quad (21)$$

Решение уравнения (21) будет иметь следующую форму

$$V_2(x) = D_1 e^{-i \tilde{k} x} + D_2 e^{i \tilde{k} x} \quad (22)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – постоянные интегрирования (комплексные амплитуды), определяемые из краевых

условий (5) и (6);  $\tilde{k}$  – волновое число,

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E(\tau) + i\omega\eta(\tau)}} \quad (23)$$

Из выражения (23) следует, что волновое число  $\tilde{k}$  – комплексная величина, и тогда его можно

представить в виде [1, 3]:

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{a} - i\alpha \quad (24)$$

где  $\alpha$  – коэффициент поглощения – характеризует уменьшение амплитуды при удалении от источника вибрации.

На основании выражений (12), (22) и (24) функция  $V_2(x,t)$  примет следующий вид:

$$V_2(x,t) = [D_1 e^{(\alpha + ik)x} + D_2 e^{-(\alpha + ik)x}] e^{i(\alpha x + \psi)} \quad (25)$$

$$\text{где } k = \frac{\omega}{a}$$

Для вычисления фазовой скорости  $a$  и коэффициент поглощения  $\alpha$  а приравняем правые части выражений (23) и (24), возведем обе части в квадрат и, выделяя отдельно – вещественную и мнимую части, получим систему уравнений, из которой найдем

$$a = \sqrt{\frac{2[E^2(\tau) + \eta^2(\tau)\omega^2]}{\rho \left[ (\tau) + \sqrt{E^2(\tau) + \eta^2(\tau)\omega^2} \right]}} \quad ; (26)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho \omega^2 \left[ -E(\tau) + \sqrt{E^2(\tau) + \eta^2(\tau)\omega^2} \right]}{2[E^2(\tau) + \eta^2(\tau)\omega^2]}} \quad (27)$$

Подставляя выражение (25) последовательно в краевые условия (6) и (5), определим постоянные интегрирования  $D_1$  и  $D_2$  и, выделяя из полученного выражения мнимую часть, найдем функцию  $V_2(x,t)$  в следующем виде:

$$V_2(x,t) = A_1 \frac{\operatorname{sh}[(\alpha + ik)(H-x)]}{\operatorname{sh}[(\alpha + ik)H]} \sin(\alpha x + \psi - \varphi) \quad (28)$$

где

$$A_1 = \frac{Q}{\sqrt{[c_1 + c_3 - (m + m_6)\omega^2]^2 + (b_1 + b_3)^2 \omega^2}} \quad ; (29)$$

$$c_1 = F \{ \alpha E(\tau) \operatorname{sh}(2\alpha H) + [kE(\tau) + \alpha \omega \eta(\tau)] \times \times \sin(2kH) \} / [ch(2\alpha H) - \cos(2kH)] \quad ; (30)$$

$$b_1 = F \{ [kE(\tau) + \alpha \omega \eta(\tau)] \operatorname{sh} 2\alpha H - [\alpha E(\tau) - k\omega \eta(\tau)] \times \times \sin 2kH / \{ \omega \cdot [ch(2\alpha H) - \cos(2kH)] \} \quad ; (31)$$

$$m_6 = F \frac{k\eta(\tau) \cdot \operatorname{sh}(2\alpha H)}{\omega \cdot [ch(2\alpha H) - \cos(2kH)]} \quad ; (32)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(b_1 + b_3)\omega}{c_1 + c_3 - (m + m_6)\omega^2} \quad (33)$$

$b_1$  и  $c_1$  – приведенные коэффициенты сопротивления и жесткости цементобетонной смеси;  $m_6$  – приведенная масса цементобетонной смеси.

Окончательное решение уравнения (4), удовлетворяющего краевым условиям, будет иметь следующий вид:

$$V(x,t) = A_2 sh[\delta_2(H-x)]e^{-\nu t} + A_1 \frac{sh[(\alpha + ik)(H-x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \sin(\alpha x + \psi - \varphi) \quad (34)$$

Из анализа полученных зависимостей (29) – (32) видно, что выражения

$$c_1 = \{\alpha E(\tau) sh(2\alpha H) + [kE(\tau) + \alpha \omega \eta(\tau)] \times \sin(2kH)\} / [ch(2\alpha H) - \cos(2kH)]; \quad (35)$$

$$b_1 = \{[kE(\tau) + \alpha \omega \eta(\tau)] sh 2\alpha H - [\alpha E(\tau) - k\omega \eta(\tau)] \times \sin 2kH / \{\omega \cdot [ch(2\alpha H) - \cos(2kH)]\}; \quad (36)$$

$$m_{\delta y} = \frac{k\eta(\tau) \cdot sh(2\alpha H)}{\omega \cdot [ch(2\alpha H) - \cos(2kH)]} \quad (37)$$

представляют собой соответственно удельные приведенные коэффициенты сопротивления и жесткости, удельную массу цементобетонной смеси.

Частота собственных колебаний динамической системы  $P_0$  может быть определена из следующего выражения

$$P_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_3}{m + m_{\delta}}} \quad (38)$$

Приступим к отысканию функции  $W(x,t)$ . Она также удовлетворяет волновому уравнению колебаний (4), но уже с однородными (нулевыми) краевыми условиями

$$-m \frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial t^2} - b_3 \frac{\partial W(0,t)}{\partial t} - c_3 W(0,t) + E(\tau) F \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} + \eta(\tau) F \left( 1 - e^{-\frac{\pi i t}{H}} \right) \frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x \partial t} = 0; \quad (39)$$

$$w(H,t) = 0 \quad (40)$$

Начальные условия для функции  $W(x,t)$  могут быть определены из следующих выражений:

$$V(x,0) + W(x,0) = 0, \quad \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} + \frac{\partial W(x,0)}{\partial t} = V_{01}(x). \quad (41)$$

Определяя  $V(x,0)$  и  $\frac{\partial V(x,0)}{\partial t}$  из выражения (34) для функции  $V(x,t)$  получим

$$W(x,0) = -A_2 sh[\delta_2(H-x)] - A_1 \frac{sh[(\alpha + ik)(H-x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \sin(\psi - \varphi); \quad (42)$$

$$\frac{\partial W(x,0)}{\partial t} = V_{01}(x) + A_2 \nu \cdot sh[\delta_2(H-x)] - A_1 \omega \frac{sh[(\alpha + ik)(H-x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \cos(\psi - \varphi) \quad (43)$$

Используя метод Фурье [3], будем отыскивать частные решения уравнения, удовлетворяющие

краевым условиям (39) и (40). Для этого функцию  $W(x,t)$  представим в виде

$$W(x,t) = W(x)T(t) \quad (44)$$

Каждое из искомого частных решений, таким образом, представляется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от  $x$ , а другая – только от  $t$ .

Подставим выражение (44) в уравнение (4) и, используя метод разделения переменных, получим

$$a_0 \frac{W''(x)}{W(x)} = \frac{T''(t)}{T(t) + \frac{\eta(\tau)}{E(\tau)} T'(t)} \quad (45)$$

где

$$a_0 = \sqrt{\frac{E(\tau)}{\rho}}$$

Для того, чтобы функция  $W(x,t) = W(x)T(t)$  была решением уравнения (4), необходимо соблюдение равенства (45) при всех значениях  $x$  и  $t$ . Это требование будет справедливым только в том случае, когда обе части равенства (44) не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ , т.е. когда оба отношения  $a_0^2 \frac{W''(x)}{W(x)}$  и

$$\frac{T''(t)}{T(t) + \frac{\eta(\tau)}{E(\tau)} T'(t)}$$

являются величинами постоянными и равны  $-P_0^2$ :

$$a_0^2 \frac{W''(x)}{W(x)} = \frac{T''(t)}{T(t) + \frac{\eta(\tau)}{E(\tau)} T'(t)} = -P_0^2 \quad (46)$$

В этом случае функции  $W(x)$  и  $T(t)$  определяются из уравнений

$$W''(x) + \frac{P_0^2}{a_0^2} W(x) = 0 \quad (47)$$

$$T''(t) + \frac{P_0^2 \eta(\tau)}{E(\tau)} T'(t) + P_0^2 T(t) = 0 \quad (48)$$

Решение уравнений (47) и (48) представим в следующем виде:

$$W(x) = B \cos k_0 x + D \sin k_0 x; \quad (49)$$

$$T(t) = e^{-\alpha_2 t} (M \cos pt + N \sin pt), \quad (50)$$

где  $B, D, M, N$  – постоянные интегрирования;

$$k_0 = \frac{P_0}{a_0}; \quad p = \sqrt{P_0^2 - \alpha_2^2}; \quad \alpha_2 = \frac{\eta(\tau) P_0^2}{2E(\tau)} \quad (51)$$

Тогда функция  $W(x,t)$  будет иметь следующий вид:

$$W(x,t) = e^{-\alpha_2 t} (B \cos k_0 x + D \sin k_0 x) \times (M \cos pt + N \sin pt) \quad (52)$$

Используя краевые (39), (40) и начальные (42), (43) условия и, представляя функцию  $V_{01}(x)$  в виде

$$V_{01}(x) = V_0 \frac{\sin[k_0(H-x)]}{\sin(k_0H)}, \quad (53)$$

найдем функцию

$$W(x,t) = e^{-\alpha_2 t} \left\{ \left[ -A \frac{sh[\delta_2(H-x)]}{2} - A_1 \frac{sh[(\alpha+ik)(H-x)]}{sh[(\alpha+ik)H]} \sin(\psi-\varphi) \right] \cos pt + \left[ \frac{V_0 \sin[k_0(H-x)]}{p \sin(k_0H)} + \frac{A_2(v-\alpha_2)}{p} \right] \times sh[\delta_2(H-x)] - \frac{A_1[\omega \cos(\psi-\varphi) + \alpha_2 \sin(\psi-\varphi)]}{p} \times \frac{sh[(\alpha+ik)(H-x)]}{sh[(\alpha+ik)H]} \right\} \sin pt \quad (54)$$

Используя выражения (9), (34) и (54), найдем окончательное решение системы уравнений (4) – (8):

$$u(x,t) = e^{-\alpha_2 t} \left\{ \left[ -A \frac{sh[\delta_2(H-x)]}{2} - A_1 \frac{sh[(\alpha+ik)(H-x)]}{sh[(\alpha+ik)H]} \sin(\psi-\varphi) \right] \cos pt + \left[ \frac{V_0 \sin[k_0(H-x)]}{p \sin(k_0H)} + \frac{A_2(v-\alpha_2)}{p} \right] \times sh[\delta_2(H-x)] - \frac{A_1[\omega \cos(\psi-\varphi) + \alpha_2 \sin(\psi-\varphi)]}{p} \times \frac{sh[(\alpha+ik)(H-x)]}{sh[(\alpha+ik)H]} \right\} \sin pt + A_2 sh[\delta_2(H-x)] e^{-\nu t} + A_1 \frac{sh[(\alpha+ik)(H-x)]}{sh[(\alpha+ik)H]} \sin(\omega t + \psi - \varphi) \quad (55)$$

Выражение (55) при значении  $x \geq 0$  описывает движение уплотняемой среды, а при  $x = 0$  движение виброплиты при её взаимодействии с уплотняемой средой:

$$u(0,t) = e^{-\alpha_2 t} \left\{ -[A_2 sh(\delta_2 H) + A_1 \sin(\psi-\varphi)] \cos pt + \frac{1}{p} \{V_0 + A_2(v-\alpha_2) sh(\delta_2 H) - A_1[\omega \cos(\psi-\varphi) + \alpha_2 \sin(\psi-\varphi)]\} \sin pt + A_2 e^{-\nu t} sh(\delta_2 H) + A_1 \sin(\omega t + \psi - \varphi) \right\} \quad (56)$$

Анализ выражения (56) показывает, что через определенное время  $t$  с начала движения от положения равновесия виброплита переместится на величину  $A$  и ее скорость станет равной нулю:

$$u(0,t_{11}) = A; \quad \frac{\partial u(0,t_{11})}{\partial t} = 0, \quad (57)$$

т.е. произойдет максимальное деформирование поверхности цементобетонной среды. Затем вибро-

плита начинает двигаться в обратном направлении (происходит разгрузка цементобетонной среды) и при подходе к положению равновесия отрывается от уплотняемой среды в момент  $t_1$ , при этом

$$u(0,t_1) = 0; \quad \frac{\partial u(0,t_1)}{\partial t} = V_{01} \quad (58)$$

Движение виброплиты в отрыве от уплотняемой среды может быть описано следующим дифференциальным уравнением

$$m \frac{d^2 u_3}{dt^2} + b_3 \frac{du_3}{dt} + c_3 u_3 = Q \sin[\omega(t+t_1) + \psi] \quad (59)$$

решение которого представим в следующем виде:

$$u_3(t) = e^{-\delta_3 t} (B_3 \cos qt + D_3 \sin qt) + A_3 \sin[\omega(t+t_1) + \psi - \varphi_1] \quad (60)$$

где  $A_3$  – амплитуда вынужденных колебаний виброплиты при ее движении в отрыве от уплотняемой среды;  $q$  – частота собственных колебаний виброплиты при ее движении в отрыве от уплотняемой среды;  $B_3, D_3$  – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями, т.е.

при  $t = 0$

$$u_3(0) = u(0,t_1) = 0; \quad \frac{du_3(0)}{dt} = \frac{\partial u(0,t_1)}{\partial t} = V_{01}; \quad (61)$$

$$A_3 = \frac{Q}{m \sqrt{(q_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_3^2 \omega^2}}; \quad q = \sqrt{q_0^2 - \delta_3^2};$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{c_3}{m}}; \quad \delta_3 = \frac{b_3}{2m}; \quad \varphi_1 = \arctg \frac{2\delta_3 \omega}{q_0^2 - \omega^2}$$

Используя выражения (60) и (57), найдем решение уравнения (59):

$$u_3(t) = e^{-\delta_3 t} \left\{ -A_3 \cos qt \cdot \sin(\omega t_1 + \psi - \varphi_1) + \left[ \frac{V_{01}}{q} - \frac{A_3}{q} [(\delta_3 \sin(\omega t_1 + \psi - \varphi_1) + \omega \cos(\omega t_1 + \psi - \varphi_1)] \sin qt \right] \right\} + A_3 \sin[\omega(t+t_1) + \psi - \varphi_1] \quad (62)$$

Движение виброплиты в отрыве от уплотняемой среды будет происходить до следующего удара, который произойдет при подходе виброплиты к положению равновесия в момент

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega} - t_1 \quad (63)$$

Следовательно,

$$t = t_2; \quad u_3(t_2) = 0; \quad \frac{du_3(t_2)}{dt} = V_0 \quad (64)$$

Анализ зависимости (62) показывает, что слабое в фигурных скобках, стоящее под знаком экспоненты, представляет собой малую величину и

быстро затухает: при  $t = t_2$  принимает значение близкое к нулю. А это значит, что к моменту удара свободные колебания практически затухнут и виброплита будет совершать только вынужденные колебания. Из этого следует, что

$$\psi \approx \varphi_1; \quad V_0 = A_3 \omega, \quad (65)$$

для более точного определения значений  $\psi$  и  $V_0 = A_3 \omega$  может быть применен метод последовательных приближений, основанный на использовании ЭВМ. Вначале положим, что  $\psi = \varphi_1, V_0 = A_3 \omega$  и определим закон виброударного движения динамической системы при этих значениях, одновременно уточняя  $\psi$  и  $V_0$ , при которых виброплита совершит следующий удар. Трех приближений достаточно для получения точного значения  $\psi$  и  $V_0$ , а следовательно и более точного определения закона движения виброплиты и уплотняемой среды.

Таким образом, получены выражения, позволяющие описать процесс взаимодействия поверхностного вибровозбудителя с уплотняемой средой, определить закон движения виброплиты в контакте и в отрыве от уплотняемой среды, физико-механические характеристики и напряженно-деформированное состояние уплотняемой цементобетонной среды.

В результате проведенных исследований получены выражения (35), (36) для определения физико-механических характеристик уплотняемой среды, позволяющие значительно упростить расчетную схему динамической системы "виброплита – уплотняемая среда". В этом случае движение виброплиты при ее взаимодействии с уплотняемой средой может быть описано следующим уравнением

$$(m + m_0) \frac{d^2 u_1}{dt^2} + (b_1 + b_3) \frac{du_1}{dt} + (c_1 + c_3) u_1 = b_1 V_0 e^{-\nu t} + Q \sin(\omega t + \psi), \quad (66)$$

полное решение которого, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\text{при } t = 0 \quad u_1(0) = 0; \quad \frac{du_1(0)}{dt} = V_0 \quad (67)$$

будет иметь следующий вид

$$u_1(t) = e^{-\delta_1 t} \{ -[A_{21} + A_1 \sin(\psi - \varphi)] \cos pt + \frac{1}{p} \{ V_0 - A_{21}(\nu - \delta_1) - A_1 [(\delta_1 \sin(\psi - \varphi) + \omega \cos(\psi - \varphi))] \} \sin pt \} + A_{21} e^{-\nu t} + A_1 \sin(\omega t + \psi - \varphi). \quad (68)$$

где  $P$  – частота собственных колебаний виброплиты;

$$p = \sqrt{p_0^2 - \delta_1^2}; \quad \delta_1 = \frac{b_1 + b_3}{2(m + m_0)}; \quad (69)$$

$$A_{21} = \frac{b_1 V_0}{\nu^2 (m + m_0) + c_1 + c_3 - (b_1 + b_3) \nu}; \quad (70)$$

значения  $A_1, P_0$  определяется зависимостями (29) и (38).

Движение виброплиты в отрыве от уплотняемой среды описывается зависимостью (62).

Сравнение результатов расчетов траектории движения виброплиты, произведенных по формулам (56) и (68) показывает, что максимальное расхождение данных составляет 2–4%. Это свидетельствует о приемлемости метода, позволяющем производить исследование колебаний виброплиты и определять с достаточной для инженерных расчетов точностью основные параметры вибрационного рабочего органа при представлении уплотняемой среды в виде дискретной модели. Такой подход позволяет значительно упростить расчетную схему "виброплита – цементобетонная среда", сделать возможным проведение теоретических исследований колебаний виброплиты со сложной траекторией движения, такой как у супергармонического вибрационного рабочего органа, виброимпульсного уплотняющего или перемешивающего рабочего органа и получить при этом результаты, имеющие достаточно высокую точность.

**ВЫВОДЫ.** Полученные зависимости позволяют определить инерционные, упругие и неупругие силы сопротивления, возникающие в результате виброимпульсного воздействия виброплиты на обрабатываемую цементобетонную среду с переменными характеристиками. Это позволяет выявить новые эффекты и определить рациональные параметры вибрационной машины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Маслова Н.А. Исследование взаимодействия вибрационного рабочего органа с уплотняемой средой // Проблемы создания новых машин и технологий/ Научн. труды Кременчугского гос. политехн. инстит. – Кременчуг, 1997. – Вып. 2, ч. 3. – С. 32–44.
2. Маслов А.Г., Иткин А.Ф. Теоретические основы вибрационного уплотнения цементобетонных смесей // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Кременчук, 2004. Вип. 5/2004 (28). – С. 45–49.
3. Маслов А.Г., Пономарь В.М. Вибрационные машины и процессы в дорожном строительстве. – К.: Будівельник, 1985. – 128 с.

#### REFERENCE

1. Maslova N.A. Investigation of the interaction of vibration of the working body with the sealing sredoy. Problemy creation of new machinery and technology, issue 2, part 3 // Nauchn. Works Kremenchug State Polytechnic. Inst. – Kremenchug, 1997. – P. 32–44 [in Russian].
2. Maslov A.G., Itkin A.F. Theoretical Foundations of vibratory compaction cement smesey // Vesnik Kremenchug State Polytechnical University, Vol. 5/2004(28). – Kremenchug, 2004. – P. 45–49 [in Russian].
3. Maslov A.G., Ponomarev V.M. Vibrating machines and processes in road construction. – K.: Budivelnik, 1985. – 128 p. [in Russian].

Стаття надійшла 20.10.10  
Рекомендована до друку  
д.т.н., проф. Солтусом А.П.