УДК 681:336

МЕТОДОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК УСЛОВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Г. В. Лисяной
Одесский филиал Европейского университета
ул. В. Стуса, 2-д, г. Одесса, 65033, Украина, E-mail: foxgv@yandex.ru

При необходимости построения математических моделей сложных объектов управления предложена методология использования непараметрических оценок условного математического ожидания, обеспечивающих итерационные процедуры, с уточнением структуры математической модели. При этом, вместо заранее неизвестных функций плотности вероятности, используются их непараметрические оценки. Асимптотическая сходимость непараметрических оценок обусловливает асимптотическую сходимость непараметрической конструкции условного математического ожидания, которая использует эти оценки.

Ключевые слова: математическая модель, сложные объекты, условное математическое ожидание, непараметрические оценки.

МЕТОДОЛОГІЯ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СКЛАДНИХ ОБ’ЄКТІВ УПРАВЛІННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕПАРАМЕТРИЧНИХ ОЦІНОК УМОВНОГО МАТЕМАТИЧНОГО ОЧІКУВАННЯ

Г. В. Лісяной
Одеський філіал Європейського університету
вул. В. Стуса, 2-д, м. Одеса, 65033, Україна, E-mail: foxgv@yandex.ru

За необхідності побудови математичних моделей складних об’єктів управління запропонована методологія використання непараметричних оцінок умовного математичного очікування, що забезпечують ітераційні процедури, з уточненням структури математичної моделі. При цьому, замість раніше невідомих функцій густини ймовірності, використовуються їх непараметричні оцінки. Асимптотична збіжність непараметричних оцінок обумовлює асимптотичну збіжність непараметричної конструкції умовного математичного очікування, що використовує ці оцінки.

Ключеві слова: математична модель, складні об’єкти, умовне математичне очікування, непараметричні оцінки.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Одним из путей повышения эффективности систем управления и обработки информации является использование более точных и достоверных математических моделей объектов и процессов на основе применения современных методов идентификации и оптимизации, что становится возможным с применением автоматизированных систем управления (АСУ).

Цель работы – разработка методологи построения математических моделей сложных объектов управления.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Известные из литературных источников подходы к построению математических моделей основаны на использовании регрессионного анализа. При этом используется корреляционный, дисперсионный и факторный анализы, а также анализ показателей существенности переменных. Основная цель перечисленных методов заключается в выявлении и исключении из числа аргументов исследуемой модели факторов, незначительно влияющих на выходную переменную модели.

Помимо регрессионного анализа, одним из рекомендуемых методов построения математических моделей объектов является метод группового учета аргументов (МГУА) [1], обеспечивающий по сравнению с регрессионным анализом объективный характер моделирования и структурной идентификации объекта [2, 3]. Объективность достигается тем, что при построении моделей руководствуются не заранее заданным числовым значением отдельных ограничений (например, порогового коэффициента парной корреляции, критерия существенности Стьюдента), а критериями общего вида: критерия регулярности, минимума смещения и др.

В МГУА применяются две основные структуры генерации множества моделей, оцениваемых по критерию селекции:

1. Комбинаторные (не пороговые) алгоритмы МГУА.
2. Многорядные (пороговые) алгоритмы МГУА.

В первом случае требуется задание заведомо усложненной математической зависимости выходной величины от вектора входных переменных, например, в виде полинома высокой степени, из которой путем приравнивания нулю тех или иных коэффициентов получаются математические модели различной структуры. Лучшая структура определяется по тому или иному критерию селекции.

Во втором – первоначально в первом ряде селекции образуются математические зависимости (частные описания), каждая из которых связывает выходную величину с двумя переменными. Полученные частные описания сравниваются по критерию селекции, и из них выбирается F_1 лучших. Во втором ряду селекции образуются частные описания, каждое из которых связывает выходную величину с двумя переменными, в качестве которых выступают частные описания, полученные в предыдущем ряде селекции. Из новых частных описаний выбирается F_2 наилучших для использования в следующем, третьем ряде селекции.

Для каждого ряда находится наилучшая (по критерию селекции) модель. Ряды селекции наращиваются, пока оценка критерия уменьшается (правило останова).

Решаемая задача обусловлена необходимостью разработки более совершенного метода, для определения структуры математической модели или процесса.

Проведенным анализом литературных источников установлено, что использование перечисленных методов часто затруднительно или невозможно, из-за отсутствия априорной информации о характере зависимости между входящими в её состав переменными. Поэтому перед нами ставилась цель разработки методологии построения математических моделей сложных объектов, при использовании непараметрических оценок условного математического ожидания, для обеспечения итерационной процедуры, с уточнением структуры.

Предлагаемая нами методология основана на оценивании существующей в объекте зависимости управляющих воздействий $\overline{U^0}$ на интервале управления $[t]$ от $\overline{X^0}$, $\overline{Y^0_з}$, примененном на предыдущих интервалах, $[t-2]$, ... управления:

$$\overline{Y^0}[t]=f\left(\overline{X}^0,\overline{Y}^0_з,\overline{U}^0[t-1],\overline{U}^0[t-2],\ldots\right)=f\left(V^0\right), \quad (1)$$

где $\overline{V}^0$ – вектор состояния на $[t]$-м интервале управления. Индекс «0» соответствует выборке положительного опыта.

Об аналитическом виде функции $f\left(\overline{V}\right)$ известно только то, что она может быть сколь угодно сложной. Введем некоторую оценку функции (1)

$$\hat{U}^0[t]=\hat{f}\left(\overline{V}^0\right),$$

и будем оптимизировать значение параметров этой функции по минимуму среднеквадратичной ошибки, т.е. будем строить такую оценку, при которой критерий

$$I\left(\overline{U}^0[t],\hat{f}\left(\overline{V}^0\right)\right)=\frac{\left[\overline{U}_i[t]-\hat{f}\left(\overline{V}_i\right)\right]^2}{n}\to\min. \quad (2)$$

При построении модели, когда априорная информация о характере зависимости между входящими в ее состав переменными неизвестна, целесообразно применить подход, основанный на использовании непараметрических оценок условного математического ожидания $\dfrac{M\left(\overline{U}[t]\right)}{\overline{V}}$.

Использование условного математического ожидания в качестве оценки функции (1) обеспечивает минимум критерия (2), т.е.

$$I\left(\overline{U}[t],\hat{f}\left(\overline{V}\right)\right)=\min I\left(\overline{U}[t],f\left(\overline{V}\right)\right),$$

$$\text{при } \hat{U}[t]=\frac{M\left(\overline{U}[t]\right)}{\overline{V}},$$

или в интегральной форме

$$\overline{U}[t]=\int_0^t\left(\overline{U}[t]P\left(\frac{\overline{U}[t]}{\overline{V}}\right)\right)d\overline{U}[t].$$

После проведенного преобразования $\hat{U}[t]$ имеем

$$M\left(\frac{\overline{U}[t]}{\overline{V}}\right)=\int_0^t\frac{\overline{U}[t]P\left(\overline{V},\overline{U}[t]\right)d\overline{U}[t]}{P\left(\overline{V}\right)}. \quad (3)$$

Вместо априори неизвестных функций плотности вероятности $P\left(\overline{V}\right)$ и $P\left(\overline{V},\overline{U}[t]\right)$ используем их непараметрические оценки соответственно:

$$\hat{P}\left(\overline{V}\right)=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}P^*\left(\overline{V},\overline{V}_i\right)\right]}{n}, \quad (4)$$

и
$$P\left(\overline{V},\overline{U}[t]\right)=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}P^*\left\{\overline{V},\overline{U}[t],\overline{V}_i,\overline{U}_i[t]\right\}\right]}{n}. \quad (5)$$

Известно, что такие оценки асимптотически сходятся к $P\left(\overline{V}\right)$ и $P\left(\overline{V},\overline{U}[t]\right)$ при условии, что функции вкладов n $P^*\left(\overline{V},\overline{V}_i\right)$, $I = 1,2,\ldots,$ симметричны относительно соответствующих векторов $\overline{V}_i$ (каждый из них является математическим ожиданием соответствующей ему функции вкладов), неотрицательны, убывающие при $n\to\infty$. Кроме того, размах этой функции асимптотически уменьшается по мере увеличения n. Асимптотическая сходимость оценок (4) и (5) обуславливает асимптотическую сходимость использующих эти оценки непараметрическую зависимость условного математического ожидания в форме (3).

Введем функцию вкладов вида

$$P^*\left(\overline{V},\overline{V}_i\right)=\left[\frac{1}{s_i^m}(2p)^{\frac{m}{2}}\right]\exp\left[\frac{-d^2\left(\overline{V},\overline{V}_i\right)}{2s_i^2}\right], \quad (6)$$

$$i=1,2,\ldots,n$$

и

$$P^*\left\{\left(\overline{V},\overline{U}[t]\right),\left(\overline{V}_i,\overline{U}_i[t]\right)\right\}=\left[\frac{1}{s_i^{m+1}(2p)^{\frac{(m+1)}{2}}}\right]\times$$
$$\times\exp\left(-d^2\frac{\left\{\left(\overline{V},\overline{U}[t]\right),\left(\overline{V}_i,\overline{U}_i[t]\right)\right\}}{2s_i^2}\right).$$

Учитывая, что

$$d^2\left\{\overline{V},\overline{U}[t],\overline{V}_i,\overline{U}_i[t]\right\}=d^2\left(\overline{U}[t],\overline{U}_i[t]+d^2\left(\overline{V},\overline{V}_i\right)\right),$$
$$i=1,2,\ldots,n,$$

выразим

$$P^*\{(\overline{V},\overline{U}[t]),(\overline{V}_i,\overline{U}_i[t])\} = P^*(\overline{V},\overline{V}_i)P^*(\overline{U}[t],\overline{U}_i[t]).$$

Введем в формулу (3) вместо неизвестных функций $P(\overline{V})$ и $P(\overline{V},\overline{U}[t])$ их непараметрические оценки (4) и (5). Учитывая, что интегрирование ведется по переменной $\overline{U}[t]$, получаем

$$\overline{U}[t] = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} P^*(\overline{V},\overline{V}_i)\int_0^t \overline{U}[t]P^*(\overline{U}[t],\overline{U}_i[t])d\overline{U}[t]\right\}}{\Sigma P^*(\overline{V},\overline{V}_i)}. \quad (7)$$

В формуле (7) i-й интеграл представляет собой математическое ожидание переменной $\overline{U}[t]$, распределенной в соответствии с $P^*(\overline{U}[t],\overline{U}_i[t])$, для которой переменная $\overline{U}_i[t]$ является математическим ожиданием.

Следовательно,

$$\int_0^t \overline{U}[t]P^*(\overline{U}[t],\overline{U}_i[t])d\overline{U}[t] = \overline{U}_i[t],\ i = 1,2,\ldots,n, \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получаем следующее выражение для модели процесса управления на $[t]$-м интервале управления:

$$\overset{\smile}{U}{}^0[t] = \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i[t]P^*(\overline{V}^0,\overline{V}_i)}{\Sigma P^*(\overline{V}^0,\overline{V}_i)}, \quad (9)$$

где $\overline{U}_i(t)$ - значение управляющих воздействий, примененных при выполнении реализуемого процесса выборки положительного опыта на $[t]$-м интервале управления, а функция вклада $P(\overline{V}^0,V_i)$ определена формулой (6).

Если функцию вклада $P^*(\overline{V}^0,V_i)$, заданную в виде (6), аппроксимировать прямоугольной функцией

$$P(\overline{V}^0,\overline{V}_i) = \begin{cases} 1, \text{если} \quad d(\overline{V}^0,\overline{V}) = \min d(\overline{V}^0,\overline{V}_j),\ i \neq j \\ 0, \text{в противном} \quad \text{случае} \end{cases}$$

где $d(\overline{V}^0,\overline{V}_i)$ – мера близости между векторами $\overline{V}^0$ и $\overline{V}_i$, то формула (7) преобразуется к виду

$$\overline{U}[t] = U_i[t], \quad (10)$$

т.е. управление на $[t]$ интервале принимается равным управлению на этом же интервале времени ранее успешно завершенного цикла выборки положительного опыта, наиболее похожего на проводимый процесс (векторы $\overline{V}^0$ и $\overline{V}_i$ близки друг к другу).

ВЫВОДЫ. Несмотря на общую непараметрическую природу математических моделей $\overset{\smile}{U}{}^0[t]$ и $\overline{U}[t]$, алгоритмы, использующие их получаются различными:

– первая модель учитывает все управления, примененные на $[t]$-м интервале выборки положительного опыта с присущим каждому процессу выборки значением весового коэффициента;

– вторая модель сводится к поиску в выборке положительного опыта наиболее похожего к данному $[t]$-му моменту раннее проведенного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по типовым программам моделирования / А.Г. Ивахненко, Ю.В. Коппа, В.С. Степашко и др. – К.: Техніка, 1980. – 184 с.

2. Анохин В.В. Параметрическое моделирование дискретных стохастических процессов по известным входным и выходным сигналам // Математика в приложениях. – 2004. – № 3–4. – С. 142–145.

3. Имитационное управление неопределенными объектами. / В.И. Васильев, В.В. Коноваленко, Ю.И. Горелов. – К.: Наукова думка, 1989. – 215 с.

DESIGN METHODOLOGY FOR MATHEMATICAL MODELS OF COMPLEX CONTROL OBJECTS WITH USE OF NONPARAMETRIC ESTIMATORS OF A CONDITIONAL MATHEMATICAL EXPECTATION

G. Lisyanoy

The Odessa branch of the European University

vul. V. Stusa, 2-d, Odessa, 65033, Ukraine, E-mail: foxgv@yandex.ru

A new methodology using the nonparametric estimators of the conditional mathematical expectation providing iterative procedures, and with specification of a mathematical model structure, is offered for the designing of mathematical models of complex control objects. Thus instead of probability-density functions, which are unknown in advance, their nonparametric estimators are used. Asymptotic convergence of nonparametric estimators causes asymptotic convergence of a nonparametric design of a conditional mathematical expectation that uses these estimators.

Key words: mathematical model, complex objects, conditional mathematical expectation, nonparametric estimators.

REFERENCES

1. *Manual for standard modeling programs* / A.G. Ivahnenko, J.V. Koppa, V.S. Stepashko etc. – К.: Tehnika, 1980. – 184 p. [in Ukrainian]

2. Anokhin V.V. Parametrical modeling of discrete stochastic processes using input and output signals // *Mathematics in Applications*. – 2004. – № 3–4. – PP. 142–145. [in Ukrainian]

3. *Simulated control of fuzzy objects*. / V.I. Vasilyev, V.V. Konovalenko, J.I. Gorelov– К.: Naukova dumka, 1989. – 215 p. [in Ukrainian]

Стаття надійшла 22.03.2012.

Рекомендовано до друку

д.т.н., проф. Гученком М.І.