УДК 517.958

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ОТ ФУНКЦИИ, СОДЕРЖАЩЕЙ РАЗРЫВ ПЕРВОГО РОДА

В. Д. Душкин
Академия Внутренних Войск МВС Украины, г. Харьков
пл. Восстания, 3, г. Харьков, 61005, Украина. E–mail: Dushkin_V_and_V@mail.ru

Решение ряда задач рассеяния электромагнитных волн на импедансных структурах приводит к численному решению систем интегральных уравнений. Ядра этих интегральных уравнений содержат разрывные функции, в частности функции с разрывом первого рода. Для вычисления таких интегралов получена квадратурная формула. Данная формула точна для многочленов, степень которых не превышает количество точек интерполяции. Показана сходимость приближённых значений интегралов к точным при увеличении количества точек интерполяции и дана оценка скорости сходимости. Получены следствия данной формулы для функций, представляющих практический интерес.

Ключевые слова: квадратурные формулы, скорость сходимости процесса приближений.

КВАДРАТУРНА ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ВІД ФУНКЦІЇ, ЩО МІСТИТЬ РОЗРИВ ПЕРШОГО РОДУ

В. Д. Душкін
Академія Внутрішніх Військ МВС України, м. Харків
пл. Повстання, 3, м. Харків, 61005, Україна. E–mail: Dushkin_V_and_V@mail.ru

Рішення ряду задач розсіювання електромагнітних хвиль на імпедансних структурах призводить до чисельного рішення систем інтегральних рівнянь. Ядра цих інтегральних рівнянь містять розривні функції, зокрема функції з розривом першого роду. Для обчислення таких інтегралів отримана квадратурна формула. Дана формула точна для многочленів, ступінь яких не перевищує кількість точок інтерполяції. Показана збіжність наближених значень інтегралів до точних при збільшенні кількості точок інтерполяції і дана оцінка швидкості збіжності. Отримано наслідки даної формули для функцій, які представляють практичний інтерес.

Ключові слова: квадратурні формули, швидкість збіжності процесу наближень.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Построение математических моделей дифракции электромагнитных волн на импедансных структурах приводит к рассмотрениию краевых задач для уравнения Гельмгольца с краевыми условиями третьего рода [1, 2].

Один из эффективных подходов численного решения этих задач предложен Ю.В. Ганделем [3, 4], который основывается на применении метода параметрических представлений интегральных операторов. В результате применения этого метода исходные краевые задачи сводятся к системам интегральных уравнений первого и второго рода, ядро которых содержит особенность. Дальнейшее численное решение полученных систем уравнений осуществляется с помощью одной из модификаций метода дискретных особенностей [5].

Рассмотрение периодических моделей этих задач приводит к необходимости численного решения интегральных уравнений:

$$\frac{1}{p}\int_{-1}^{1}\ln|t-x|\frac{V(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{p}\int_{-1}^{1}K(x-t)\frac{V(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=f(x),\quad |x|\le 1; \tag{1}$$

где $\{V,f\}\in C^{m,q}_{[-1,1]}$, $m\ge 0, q>0$, а функция $K(t)$ имеет разрыв первого рода в точке $t=0$ и является непрерывной по Гёльдеру на отрезках $t\in[-1,-0]$ и $t\in[+0,1]$.

Таким образом, построение квадратурных формул для вычисления интегралов от разрывных функций является актуальной задачей.

Цель работы: построение квадратурной формулы интерполяционного типа вычисления интегралов:

$$K_V(x)=\frac{1}{p}\int_{-1}^{1}K(x-t)\frac{V(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{2}$$

где $K(t)$ - функция, которая является гёльдеровой на множествах $t\in[-1,-0]$ и $t\in[+0,1]$, а в точке $x=0$ имеет разрыв первого рода.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Пусть

$$K'(-0)=k_1, K(-0)=b_1, \tag{3}$$

$$K'(+0)=k_2, K(+0)=b_2. \tag{4}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$S(t)=\begin{cases}k_1t+b_1, & t\ge 0,\\ k_2t+b_2, & t<0.\end{cases} \tag{5}$$

Тогда функция

$$Q(t)\equiv K(t)-S(t) \tag{6}$$

обладает свойствами:

$$Q'(-0)=Q'(+0),\quad Q(-0)=Q(+0) \tag{7}$$

и, следовательно [6],

$$\frac{1}{p}\int_{-1}^{1}Q(x-t)\frac{V(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Q\left(x-t_k^n\right)V\left(t_k^n\right)+r_n; \qquad (8)$$

где $\{t_k^n\}_{k=1}^n$ – нули полинома Чебышева $T_n(t)$, а

$$|r_n|=O\left(\frac{1}{(n-1)^{m+q}}\right),\quad n\to\infty. \qquad (9)$$

Следовательно, задача вычисления интеграла $K_V(x)$ свелась к вычислению интеграла

$$SS_V(x)=\frac{1}{p}\int_{-1}^{1}S(x-t)\frac{V(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}. \qquad (10)$$

Интерполяционный полином Лагранжа степени $n-1$ функции $V(t), t\in[-1,1]$ с n чебышевскими узлами 1-го рода $\{t_k^n\}_{k=1}^n$ обозначим $V_{n-1}(t)$. Он имеет вид

$$V_{n-1}(t)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k^n)l_{n-1,k}^{I}(t), \qquad (11)$$

где $l_{n-1,k}^{I}(t)$ -фундаментальные интерполяционных полиномы

$$l_{n-1,k}^{I}(t)=\left[1+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(t_k^n)T_p(t)\right]\frac{1}{n},$$
$$k=0,1,\mathbf{K},n-1. \qquad (12)$$

Справедливо равенство:

$$SS_{V_n}(x)=\frac{1}{p}\int_{-1}^{1}S(x-t)\frac{V_n(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}V_n\left(t_k^n\right)\cdot\left[c_0(x)+2\sum_{p=1}^{n-1}c_p(x)\cdot T_p\left(t_k^n\right)\right], \qquad (13)$$

где

$$c_p(x)=\frac{1}{p}\int_{-1}^{1}S(x-t)\frac{T_p(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}. \qquad (14)$$

Справедливы формулы:

$$p\cdot c_0(t_0)=\int_{-1}^{1}\frac{S(t_0-t)\cdot T_0(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$
$$=\frac{p}{2}\cdot(s_1+s_2)+(k_2-k_1)\sqrt{1-t_0^2}+$$
$$+(s_2-s_1)\cdot\arcsin t_0; \qquad (15)$$

$$p\cdot c_1(t_0)=\int_{-1}^{1}\frac{S(t_0-t)\cdot T_1(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$
$$=\frac{k_2-k_1}{2}\left(t_0\sqrt{1-t_0^2}-\arcsin t_0\right)-$$
$$-\frac{p}{4}\cdot(k_1+k_2)-(s_2-s_1)\sqrt{1-t_0^2} \qquad (16)$$

где

$$s_1=k_1t_0+b_1,\quad s_2=k_2t_0+b_2. \qquad (17)$$

В работе [6] показано, что

$$\int_{-1}^{t_0}T_p(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{U_{p-1}(t_0)}{p}\sqrt{1-t_0^2},\ p\in N \qquad (18)$$

Выполняя преобразования, подобные тем, которые были проведены в [6], получаем:

$$\int_{t_0}^{1}T_p(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{U_{p-1}(t_0)}{p}\sqrt{1-t_0^2},\ p\in N \qquad (19)$$

$$\int_{t_0}^{1}\frac{t\cdot T_n(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int_{-1}^{t_0}\frac{t\cdot T_n(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$=\left(\frac{U_{n-2}(t_0)}{n-1}+\frac{U_n(t_0)}{n+1}\right)\frac{\sqrt{1-t_0^2}}{2},\ n=2,3,\mathbf{K} \qquad (20)$$

Из (18)–(20) следует, что

$$p\cdot c_n(t_0)=\int_{-1}^{1}\frac{S(t_0-t)\cdot T_n(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$
$$=-\frac{s_2-s_1}{n}U_{n-1}(t_0)\sqrt{1-t_0^2}+$$
$$+(k_2-k_1)\cdot\left(\frac{U_{n-2}(t_0)}{n-1}+\frac{U_{n-2}(t_0)}{n+1}\right)\frac{\sqrt{1-t_0^2}}{2} \qquad (21)$$
$$n=2,3,4,\mathbf{K}$$

Пусть $L_{2,r}[-1,1]$ – гильбертово пространство функций со скалярным произведением

$$(f,g)_r=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (22)$$

и нормой

$$\|f\|_r=\sqrt{(f,f)_r}\equiv\sqrt{\int_{-1}^{1}f^2(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}} \qquad (23)$$

В работе [6] приведено асимптотическое равенство:

$$\left\|V_{n-1}-V\right\|_r = O\left(\frac{1}{(n-1)^{m+q}}\right), \quad n\to\infty \tag{24}$$

Введём величину

$$R_n = \max_{x\in[-1,1]} \left|SS_V(x) - SS_{V_{n-1}}(x)\right| =$$

$$= \max_{x\in[-1,1]} \frac{1}{p}\left|\int_{-1}^{1} SS(x-t)\frac{(V(t)-V_n(t))dt}{\sqrt{1-t^2}}\right|. \tag{25}$$

В силу неравенства Коши–Буняковского справедлива оценка:

$$\left|\int_{-1}^{1} SS(x-t)\frac{(V(t)-V_n(t))dt}{\sqrt{1-t^2}}\right| \le$$

$$\le \int_{-1}^{1}\frac{SS^2(x-t)dt}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{(V(t)-V_n(t))^2dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \left\|V_{n-1}-V\right\|_r\cdot\int_{-1}^{1}\frac{SS^2(x-t)dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{26}$$

Из (24), (26) и ограниченности функции $SS(x-t)$ следует справедливость асимптотического равенства

$$|R_n| = O\left(\frac{1}{(n-1)^{m+q}}\right), \quad n\to\infty. \tag{27}$$

Ряд разрывных функций $S(t)$, входящих в ядра интегральных операторов $K_V(x)$, обладают свойствами:

$$S'(-0)=S'(+0),\ S(-0)=-S(+0). \tag{28}$$

К их числу относится функция

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{n} = -\frac{x}{2}+\frac{p}{2}\cdot sign(x), \quad x\in[-p,p]. \tag{29}$$

В этом случае формулы (15), (16),(21) для определения величин $c_n(t_0)$ значительно упрощаются:

$$c_0(t_0) = k_1\cdot t_0 - 2\frac{b_1}{p}\cdot\arcsin t_0; \tag{30}$$

$$c_1(t_0) = -\frac{k_1}{2}+2\frac{b_1}{p}\cdot\sqrt{1-t_0^2} \tag{31}$$

$$c_n(t_0) = \frac{2b_1}{pn}U_{n-1}(t_0)\sqrt{1-t_0^2}, n=2,3,\mathbf{K} \tag{32}$$

В частности, для функции (29) имеем:

$$c_0(t_0) = \arcsin t_0 - \frac{t_0}{2}; \tag{33}$$

$$c_1(t_0) = \frac{1}{4}-\sqrt{1-t_0^2} \tag{34}$$

$$c_n(t_0) = -\frac{1}{n}U_{n-1}(t_0)\sqrt{1-t_0^2}, n=2,3,\mathbf{K} \tag{35}$$

ВЫВОДЫ. Полученная квадратурная формула для вычисления интегралов (2), которая имеет вид:

$$K_V(x) = \frac{1}{p}\int_{-1}^{1}K(x-t)\frac{V(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}V(t_k^n)\cdot\left[c_0(x)+2\sum_{p=1}^{n-1}c_p(x)\cdot T_p(t_k^n)\right]+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Q\left(x-t_k^n\right)V(t_k^n)+\Delta_n; \tag{36}$$

где

$$|\Delta_n| = O\left(\frac{1}{(n-1)^{m+q}}\right), \quad n\to\infty; \tag{37}$$

а вид функций $Q(t)$ и $c_p(x)$ определён формулами (5), (15), (16), (17).

Формула (36) является точной $(\Delta_n \equiv 0)$, когда функции $V(t)$ являются многочленами степени не превышающей n-1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский А.С, Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 231 с.

2. Кравченко В.Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. – М.: Физматлит, 2006. – 280 с.

3. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К.: Институт математики НАН Украины, 1995. – С. 65–66.

4. Gandel' Yu.V. Parametric representations of integral and psevdodifferential operators in diffraction problems // Conf. Proc., 10th Int. Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory. Dnepropetrovsk, Sept. 14–17, 2004. – PP. 57–62.

5. Lifanov I.K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices. – Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan: VSP, 1996. – 475 p.

6. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Введе-

ние в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2001. – 92 с.

THE QUADRATURE FORMULA FOR CALCULATION OF THE INTEGRAL OF A SIMPLE DISCONTINUITY FUNCTIONAL RELATION

V. Dushkin
Academy of IF of MIA of Ukraine
pl. Povstanya 3, Kharkov, 61005, Ukraine. E–mail Dushkin_V_and_V@mail.ru

The solution of the scattering problems of electromagnetic waves on impedance structures leads to the numerical solution of integral equations systems. The integrands of these integral equations contain discontinuous functions, in particular, the function with simple discontinuities of the first kind. The quadrature formula for the integral calculation of these functions had been obtained. This formula is true for polynomials, which degree does not exceed the number of interpolation points. The convergence of approximate values of the integrals to the exact values had been shown. The estimation of the speed of this process convergence is presented. A consequence of the formula for the functions of practical interest, had been obtained.

Key words: quadrature formulas, the speed of convergence, the process of approximation.

REFERENCES

1. Il'insky A.S, Slepjan G.Ja. *Oscillations and waves in electrodynamic systems with losses.* – Moscow: Moscow State University Press, 1983. – 231 p. [in Russian]

2. Kravchenko V.F. *Electrodynamics of superconducting structures. Theory, algorithms and computational methods.* – M: Fizmatlit, 2006. – 280 p. [in Russian]

3. Gandel' Yu.V. Parametric representations of singular integral transforms and boundary value problems of mathematical physics // *Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications.* – Kiev: Institute of Mathematics, 1995. – PP. 65–66. [in Russian]

4. Gandel' Yu.V. Parametric representations of integral and psevdodifferential operators in diffraction problems // *Conf. Proc., 10th Int.Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory. Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14–17*, 2004. – PP. 57–62.

5. Lifanov I.K. *Singular Integral Equations and Discrete Vortices.* – Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan: VSP, 1996. – 475 p.

6. Gandel' Yu.V. , Kravchenko V.F., Pustovoit V.I. The scattering of electromagnetic waves by a thin superconducting tape // *Reports of Academy of Sciences.* –1996. – V. 351, № 4. – PP. 462–464. [in Russian]

Стаття надійшла 03.09.2012.
Рекомендовано до друку
д.т.н., доц. Ляшенком В.П.