

### ПРОГНОСТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ АПРОКСИМАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ БАЗИСІВ ТРИКУТНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА II ПОРЯДКУ

Г. Я. Тулущенко, Н. В. Старун, Т. П. Білоусова, С. І. Безердян

Херсонський національний технічний університет

Бериславське шосе, 24, м. Херсон, 73008, Україна. E-mail: tuluchenko@mail.ru

У статті досліджується теоретична можливість покращення апроксимаційних властивостей базисів лагранжевого трикутного скінченного елемента другого порядку за рахунок переходу до опису базисних функцій за допомогою степеневих рядів. Використовуються такі локальні оцінки властивостей елемента як число обумовленості матриці Грама, яка складена із базисних функцій елемента, та величина сліду матриці жорсткості досліджуваного елемента. Знайдені вирази для частинних сум рядів, які надають локальні мінімуми переліченим оцінкам як функціям від невідомих коефіцієнтів рядів. Модифіковані базиси протестовані при розв'язанні практичних задач. Проведена оцінка точності отриманих розв'язків. Зроблені рекомендації щодо доцільності практичного використання досліджених у статті базисів.

**Ключові слова:** трикутний скінченний елемент, локальні оцінки.

### ПРОГНОСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ АПРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ БАЗИСОВ ТРЕУГОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА II ПОРЯДКА

Г. Я. Тулущенко, Н. В. Старун, Т. П. Белоусова, С. И. Безердян

Херсонский национальный технический университет

Бериславское шоссе, 24, г. Херсон, 73008, Украина. E-mail: tuluchenko@mail.ru

В статье изучается теоретическая возможность улучшения аппроксимационных свойств базисов лагранжевого треугольного конечного элемента второго порядка за счет перехода к описанию базисных функций с помощью степенных рядов. В качестве локальных оценок свойств элемента используются число обусловленности матрицы Грама, составленной из базисных функций элемента, и величина следа матрицы жесткости исследуемого элемента. Найдены выражения для частных сум степенных рядов, которые доставляют локальные минимумы перечисленным оценкам как функциям от неизвестных коэффициентов рядов. Модифицированные базисы протестированы при решении практических задач. Проведена оценка точности полученных решений. Сделаны рекомендации о целесообразности практического использования исследованных в статье базисов.

**Ключевые слова:** треугольный конечный элемент, локальные оценки.

**АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ.** Метод скінченних елементів є одним із найбільш вживаних методів інженерних розрахунків у різних предметних галузях [1–2]. В літературних джерелах обговорюються такі прогностичні оцінки апроксимаційних властивостей базисів скінченних елементів (СЕ) як число обумовленості матриці Грама, складеної для базисних функцій [3], і величина сліду матриці жорсткості використовуваного елемента [4]. Застосування цих оцінок в наведених роботах має теоретичне обґрунтування. В той же час для методу скінченних елементів надійна кількісна і якісна оцінка прогнозованої похибки розв'язку може бути отримана, в більшості випадків, в результаті тестування модифікацій методу на задачах з відомими аналітичними розв'язками.

У роботах [5–7] досліджуються задачі побудови гармонічних базисів для прямокутних скінченних елементів і доводяться переваги використання цих базисів. Гармонічні базисні функції будуються при цьому у вигляді тригонометричних рядів як розв'язки за методом Фур'є задачі Діріхле з стандартними базисними функціями у якості граничних умов. У вказаних роботах відзначається можливість отримання аналогічних базисів для скінченних елементів у формі прямокутних рівнобедрених трикутників та звертається увага на такі позитивні риси цих елементів, як можливість сполучення у сітках із прямокутними елементами,

краща обумовленість матриць жорсткості, ніж при застосуванні різносторонніх елементів тощо.

Нами у роботах [8–9] показано, що перехід до гармонічних базисів може супроводжуватися неузгодженістю оцінок апроксимаційних властивостей і погіршенням точності отримуваних розв'язків у порівнянні із розв'язками, отриманими при використанні стандартних базисів.

Отже, актуальною є задача встановлення причин виникнення вказаних суперечностей.

Метою дослідження є побудова та обґрунтування доцільності практичного застосування базисних функцій у вигляді степеневих рядів для скінченного елемента другого порядку у формі рівнобедреного прямокутного трикутника.

**МАТЕРІАЛИ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.** Розглянемо стандартні базиси для трикутного скінченного елемента II порядку  $\{NS_i^{(2)}\}_{i=1;6}$  (рис. 1):

$$\begin{aligned} NS_1^{(2)} &= (1-2x-2y)(1-x-y); & NS_2^{(2)} &= 4x(1-x-y); \\ NS_3^{(2)} &= -x \cdot (1-2x); & NS_4^{(2)} &= 4xy; \\ NS_5^{(2)} &= -y \cdot (1-2y); & NS_6^{(2)} &= 4y(1-x-y), \end{aligned} \quad (1)$$

і першого порядку  $\{NS_i^{(1)}\}_{i=1;3}$  (рис. 2):

$$NS_1^{(1)} = 1 - x - y; \quad NS_2^{(1)} = x; \quad NS_3^{(1)} = y. \quad (2)$$

Вирази базисних функцій (1) і (2) записані для СЕ у формі прямокутних рівнобедрених трикутників із катетами довжиною 1.

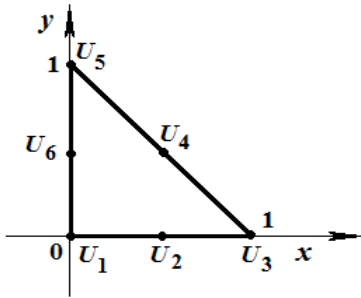


Рисунок 1 – Трикутний СЕ II порядку у формі прямокутного рівнобедреного трикутника

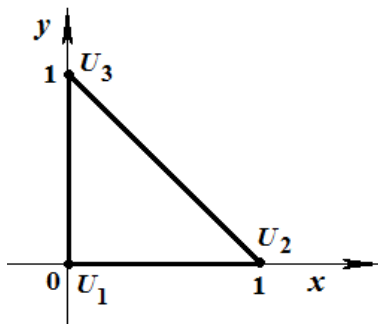


Рисунок 2 – Трикутний СЕ I порядку у формі прямокутного рівнобедреного трикутника

Відомо, що значення числа обумовленості матриці Грама для базисних функцій і величина сліду матриці жорсткості зростають з ростом порядку СЕ при одному і тому самому геометричному носіїві [3]. Тому для подальших досліджень доцільно виражати базисні функції наступних порядків через базисні функції попередніх порядків [10].

Між досліджуваними базисними функціями (1) і (2) існують співвідношення:

$$\begin{aligned} NS_1^{(2)} &= NS_1^{(1)} - \frac{1}{2} \cdot (NS_2^{(2)} + NS_6^{(2)}); \\ NS_3^{(2)} &= NS_2^{(1)} - \frac{1}{2} \cdot (NS_2^{(2)} + NS_4^{(2)}); \\ NS_5^{(2)} &= NS_3^{(1)} - \frac{1}{2} \cdot (NS_4^{(2)} + NS_6^{(2)}). \end{aligned} \quad (3)$$

Модифікація базисних функцій з метою надання їм додаткових властивостей традиційно виконується за рахунок переходу до їх опису у вигляді рядів або частинних сум цих рядів для практичних розрахунків [5–7].

З формул (3) зрозуміло, що модифікації доцільно піддавати тільки базисні функції, які асоційовані із вузлами на середині сторін трикутника (рис. 1).

Нові базисні функції будемо шукати у вигляді:

$$NM_{2k}^{(2)} = NS_{2k}^{(2)} \cdot \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i+j=r} a_{ij}^{2k} x^i y^j, \quad (4)$$

де  $k = \overline{1;3}$ ;  $a_{ij}^{2k}$  – невідомі коефіцієнти.

Розглянемо перші два найгрубіші наближення шуканих базисних функцій, коли  $r = 1$  і  $r = 2$ .

Для  $r = 1$  шукані функції представлені поліномами третього порядку, а для  $r = 2$  – четвертого.

Відзначимо, що для будь-яких значень коефіцієнтів  $a_{ij}^{2k}$  базисні функції (3–4) відповідають традиційним вимогам до базисних функцій у методі СЕ, в тому числі умові повноти базису [10].

Для базису виду (3–4) розв'яжемо дві задачі мінімізації:

1) числа обумовленості матриці Грама  $G$ , складеної для цих функцій, в метриці норми  $L_2$ :

$$cond(G,2) \rightarrow \min; \quad (5)$$

2) величини сліду матриці жорсткості досліджуваного елемента  $K$  за умови одиничної матриці коефіцієнтів пружності середовища:

$$trace(K) \rightarrow \min. \quad (6)$$

Окремо відзначимо, що кількість аргументів обох функцій (5) і (6) можна суттєво знизити, врахувавши вимоги до базисних функцій у методі СЕ. Так, для  $r = 1$  функції (5) і (6) залежать від 9 аргументів. Врахувавши, що

- в своєму вузлі базисна функція повинна дорівнювати одиниці  $NM_{2k}^{(2)}(U_{2k}^{(2)}) = 1, k = \overline{1;3}$ ;
- функція  $NM_6^{(2)}$  може бути отримана із функції  $NM_2^{(2)}$  підстановкою  $NM_6^{(2)} = NM_2^{(2)} \Big|_{\substack{x=y \\ y=x}}$ ;
- графік функції  $NM_4^{(2)}$  є симетричним відносно площини  $x - y = 0$ , тому  $a_{10}^4 = a_{01}^4$ ,

остаточно маємо три аргументи:  $a_{00}^2, a_{01}^2$  і  $a_{00}^4$ .

Оскільки задачу (5) неможливо розв'язати в загальному випадку для невідомих коефіцієнтів  $a_{ij}^{2k}$ , тому виконаємо табуляцію функції  $cond(G,2)$  з кроком зміни значень коефіцієнтів 0,05 в області, що містить точку  $a_{00}^2 = 1, a_{01}^2 = 0$  і  $a_{00}^4 = 1$ , яка відповідає стандартним базисним функціям. У результаті досліджень встановлено, що поверхня числа обумовленості матриці Грама  $G$ , як функції невідомих коефіцієнтів  $a_{ij}^{2k}$ , має багато локальних екстремумів. Один з них знаходиться у точці  $a_{00}^{2k} = 1, a_{10}^{2k} = a_{01}^{2k} = 0$ , саме коли функції (4) відповідають стандартним базисним функціям (1) (рис. 3).

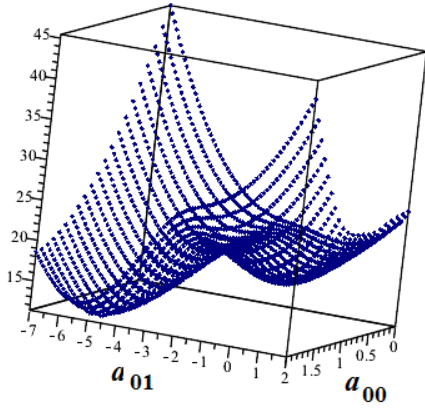


Рисунок 3 – Переріз графіка функції числа обумовленості матриці Грама, коли  $a_{00}^4 = 1$

У даному дослідженні обмежимося розглядом ще одного локального мінімуму числа обумовленості матриці Грама для функцій (4), який знаходиться у точці з наближеними координатами:

$$a_{00}^2 = 1, a_{01}^2 \approx -2,95 \text{ і } a_{00}^4 \approx -1,95 \quad (7)$$

і дорівнює  $\min \text{cond}(G,2) \approx 5,715$ .

Функція сліду матриці жорсткості досліджуваного СЕ є поліномом другого порядку від трьох аргументів  $a_{00}^2$ ,  $a_{01}^2$  і  $a_{00}^4$ . Вона має єдиний мінімум (рис. 4), який знаходиться у точці з координатами:

$$a_{00}^2 = \frac{128}{113} \approx 1,13, a_{01}^2 = -\frac{177}{113} \approx -1,57, a_{00}^4 = 1. \quad (8)$$

Мінімум функції сліду матриці жорсткості дорівнює  $\min \text{trace}(K) \approx 8,56$ . Числові значення отримані для єдиної матриці коефіцієнтів пружності середовища.

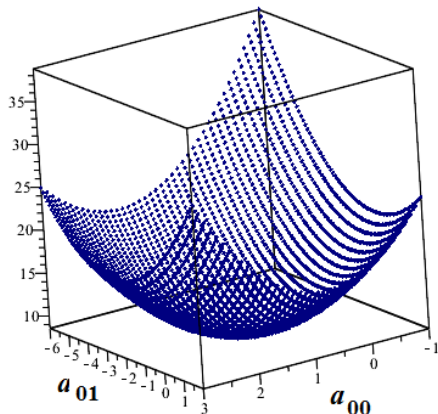


Рисунок 4 – Переріз графіка функції сліду матриці жорсткості, коли  $a_{00}^4 = 1$

Для тестування побудованих базисів використаємо задачу про відновлення стаціонарного температурного поля  $u(x; y)$  у квадратній області зі стороною  $a=2$  за таких граничних умов: на границях  $x=a$  і  $x=0$  підтримується температура  $u(0; y) = u(a; y) = 0^\circ \text{C}$ ; на границях  $y=0$  і  $y=a$  підтримується температура

$$u(x; 0) = u(x; a) = x \cdot (a - x)^\circ \text{C}.$$

Матрицю коефіцієнтів теплопровідності середовища будемо вважати єдиною. Задачу розв'яжемо за допомогою методу Фур'є. Отриманий при цьому розв'язок приймемо за точний.

Також задачу розв'яжемо за допомогою методу СЕ, при цьому на область накладемо рівномірну сітку із 8 СЕ досліджуваного виду.

Відносну похибку методу СЕ будемо оцінювати у нормі метрики  $C$ . Враховуючи симетричність граничних умов, найбільша відносна похибка скінченноелементного розв'язку очікувано має місце в центрі квадрата.

Результати тестування базисів занесемо в табл. 1.

Очевидно, що базиси, побудовані як розв'язки задач оптимізації локальних характеристик СЕ, мають гірші апроксимаційні властивості, ніж стандартний базис. Краща (із двох гірших) точність розв'язка тестової задачі отримана для базиса із мінімальним слідом матриці теплопровідності. Причому температури відновлені із заниженням значень.

Побудуємо ще один базис виду (4) для  $r=2$ . Після розв'язання для нього задачі мінімізації (6) отримаємо такі значення незалежних коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} a_{00}^2 &= \frac{21051}{66320} \approx 0,32, a_{10}^2 = \frac{106029}{33160} \approx 3,20, \\ a_{01}^2 &= -\frac{99953}{66320} \approx -1,51, a_{02}^2 = \frac{99953}{132640} \approx 0,75, \\ a_{11}^2 &= -\frac{19159}{132640} \approx -0,14, a_{00}^4 = 1, \\ a_{10}^4 &= a_{01}^4 = 0, a_{20}^4 = a_{00}^4 = -\frac{160517}{132640} \approx -1,21. \end{aligned} \quad (9)$$

Повторимо для цього базису розрахунки, які виконувалися для всіх попередніх базисів (табл. 1). Цікавим є той факт, що температурні показники відновлені із надлишком.

Очевидно, що зважаючи базиси з мінімальним слідом матриці теплопровідності для  $r=1$  і для  $r=2$ , можна отримати базис  $NT_l^{(2)}$ , що приведе до точного розв'язку тестової задачі:

$$NT_l^{(2)} = w \cdot NT_{l,r=1}^{(2)} + (1-w) \cdot NT_{l,r=2}^{(2)}, \quad (10)$$

де  $w$  – ваговий коефіцієнт  $w \in [0; 1]$ ;  $l = \overline{1; 6}$ ;  $NT_{l,r=1}^{(2)}$  – функції виду (3-4) із коефіцієнтами (8);  $NT_{l,r=2}^{(2)}$  – функції виду (3-4) із коефіцієнтами (9).

В результаті розрахункових експериментів встановлено, що при  $w \approx 0,358$  розв'язок за методом СЕ із базисом (10) з точністю до четвертого знаку співпадає із розв'язком за методом Фур'є.

Також авторами вивчався вплив граничних умов на точність отримуваних розв'язків. Знайдені значення коефіцієнтів, що забезпечують мінімальний слід глобальної матриці теплопровідності після врахування граничних умов для базису (3–4), коли  $r = 1$ :

Таблиця 1 – Характеристики апроксимаційних властивостей досліджуваних базисів

Спосіб розв'язання задачі	Локальні характеристики базису		Глобальні характеристики		Температура в центрі квадрата, град	Відносна похибка, %
	Число обумовленості матриці Грама	Величина сліду матриці теплопровідності елемента	Число обумовленості глобальної матриці теплопровідності	Величина сліду глобальної матриці теплопровідності		
Метод Фур'є	—	—	—	—	0,4106	—
МСЕ з стандартним базисом (1)	17,209	10,000	17,670	109,333	0,4000	2,58
МСЕ з базисом (3–4) і коефіцієнтами (7)	5,715	12,989	23,159	139,646	0,5263	28,18
МСЕ з базисом (3–4) і коефіцієнтами (8)	19,599	8,556	15,039	100,192	0,3927	4,36
МСЕ з базисом (3–4) і коефіцієнтами (9)	7,359	7,001	10,516	79,909	0,4358	6,14
МСЕ з базисом (10)	9,762	7,200	5,749	49,945	0,4106	0,00
МСЕ з базисом (3–4) і коефіцієнтами (11)	18,559	9,502	7,511	58,095	0,3928	4,34
МСЕ з базисом (3–4) і коефіцієнтами (12)	6,591	7,070	5,200	47,558	0,4688	14,17

$$a_{00}^2 = \frac{4}{7} \approx 0,57, a_{01}^2 = -\frac{11}{14} \approx -0,79, a_{00}^4 = 1 \quad (11)$$

і коли  $r = 2$ :

$$a_{00}^2 = \frac{112289}{567352} \approx 0,20, a_{10}^2 = \frac{1037827}{283676} \approx 3,66,$$

$$a_{01}^2 = -\frac{735651}{567352} \approx -1,30, a_{02}^2 = \frac{735651}{1134704} \approx 0,65,$$

$$a_{11}^2 = -\frac{573797}{1134704} \approx -0,51, a_{00}^4 = 1, \quad (12)$$

$$a_{10}^4 = a_{01}^4 = 0, a_{20}^4 = a_{00}^4 = -\frac{1785679}{1134704} \approx -1,57.$$

З даних табл. 1 видно, що використання базисів із коефіцієнтами (11) і (12) не привело до покращення точності отриманого розв'язку.

**ВИСНОВКИ.** Проведені обчислювальні експерименти показали, що досліджувані локальні характеристики трикутного СЕ II порядку є неузгодженими між собою. Мінімізація оцінок локальних і глобальних характеристик не приводить до зростання точності розв'язку тестової задачі.

Знайдений емпіричним шляхом базис (10), який забезпечує найкращу точність розв'язка тестової задачі, призводить до локальних і глобальних оцінок, які близькі до мінімальних за величиною сліду матриці теплопровідності.

При зміні граничних умов в ряді задач, що розв'язували автори, базис (10) незмінно демонстрував найкращу точність, тому він рекомендується для подальшого практичного тестування при розв'язанні граничних задач еліптичного типу.

Перспективи подальших досліджень автори пов'язують із пошуками нових видів локальних оцінок апроксимаційних властивостей базисів, які б забезпечували найкращу точність розв'язків при застосуванні базисів, обраних за цими оцінками.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Білий П.М., Опришко В.В. Розрахунок магнітного поля на основі програмного пакету "ANSYS", // Вісник КДПУ. – 2007. – Вип. 1(42). – Ч. 1. – С. 42–44.
2. Исследование электромагнитных параметров индукционных реостатов различных конструкций / А.В. Качура, С.В. Колычев, А.М. Сьянов // Вісник КДПУ. – 2007. – Вип. 3 (44). – Ч. 2. – С. 62–66.
3. Пинежанинов Ф., Пинежанинов П. Свойства базисных функций // Exponenta.ru – Режим доступа: [http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta\\_RU/soft/Mathemat/pinega/a2/a2.asp.htm](http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/soft/Mathemat/pinega/a2/a2.asp.htm) (доступный 4 января 2016).
4. The Finite Element Method for Engineers / Kenneth H. Huebner, Donald L. Dewhirst, Douglas E. Smith, Ted G. Byrom. – New York: A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&sons, Inc., 2001. – 744 p.
5. Пашковский А.В., Пашковская И.В. Прямоугольный стандартный элемент с условиями Дирихле на границе // Известия ВУЗов. Электромеханика. – 2003. – № 3. – С. 9–12.
6. Юлдашев О.И., Юлдашева М.Б. Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации // ОИЯИ. Лаборатория ИТ. Научный отчет 2006-2007. – Дубна: ОИЯИ, 2007. – С. 317–320. – Режим доступа к отчету: [http://lit.jinr.ru/Reports/SC\\_report\\_06-07/pdfall/r317.pdf](http://lit.jinr.ru/Reports/SC_report_06-07/pdfall/r317.pdf) (доступный 4 января 2016).
7. Yuldashev O.I., Yuldasheva M.B. 3D finite elements with harmonic basis functions for approximations of high order // Joint Institute for Nuclear Research. Laboratory of Information Technologies. Preprint E11-2008-104. – Dubna: Joint Institute for Nuclear Research, 2008. – 24 p. – available at: [http://www1.jinr.ru/Preprints/2008/104\(E11-2008-104\).pdf](http://www1.jinr.ru/Preprints/2008/104(E11-2008-104).pdf) (accessed January 4, 2016).
8. Безердян С.І., Тулученко Г.Я. Суперечливі оцінки апроксимативних властивостей гармонічних базисів трикутного скінченного елемента II порядку // Тези доповідей III Міжнародного форуму студентів, аспірантів і молодих вчених (м. Дніпропетровськ, 23–24 квітня 2015). – Дніпропетровськ: ДНУ, 2015. – С. 475–477.
9. Практична перевірка прогнозованих властивостей модифікованих базисів трикутного скінченного елемента II порядку / С.І. Безердян, Т.П. Білоусова, Г.Я. Тулученко // Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" (м. Київ, 25–26 червня 2015 р.). – К.: НУХТ, 2015. – С. 188–189.
10. Zienkiewicz O. Finite Element Method. Vol. 1. The Basis / O. Zienkiewicz, R. Taylor. – Oxford.: Batterworth Heinemann, 2000. – 690 p.

**PROGNOSTIC ESTIMATION OF APPROXIMATIVE PROPERTIES OF BASES  
FOR TRIANGULAR FINITE ELEMENTS OF II ORDER**

**G. Tuluchenko, N. Starun, T. Belousova, S. Bezerdyan**

Kherson National Technical University

Berislav Highway, 24, Kherson, 73008, Ukraine. E-mail: [tuluchenko@mail.ru](mailto:tuluchenko@mail.ru)

**Purpose.** The aim is to build and rationale for the practical application of basic functions in a power series for the finite element of the second order in the form of an isosceles right triangle. **Methodology.** For prognostic evaluation of the proposed basis functions approximationary properties we have used the value of the trace of stiffness (thermal conductivity) matrix of the element and the condition number of the Gram matrix for the functions of the test basis. **Results.** For the finite element of the second order in the form of an isosceles right triangle new base is constructed. On test problems it leads to solutions of higher accuracy compared with known bases. It is shown that local characteristics such as the value of the trace of stiffness (thermal conductivity) matrix of the element and the condition number of the Gram matrix for the basis functions are not consistent and not uniquely determined basis with the best approximationary properties. **Originality.** The relationships between the coefficients of power series, which describe the basic functions of the test finite element, and its local characteristics are established for the first time. On the graphs of these dependencies the placement features of points that correspond to known bases of test finite element and the authors' proposal basis are studied. **Practical value.** Modified bases are tested when solving the practical problems. The accuracy of the solutions is estimated. Recommendations on the feasibility of practical use of bases studied in the article are made. **References 10, tables 1, figures 4.**

**Key words:** triangular finite element, local estimates.

## REFERENCES

1. Bilyi, P.M., Opryshko, V.V. (2007), "The Calculation of the Magnetic Field Based Software Package "ANSYS", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, no. 1 (42), iss. 1, pp. 42–44.
2. Kachura, A.V., Kolychev, S.V., Sjanov, A.M. (2007), "Research of Electromagnetic Parameters for Induction Rheostats of Various Designs", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, no. 3 (44), iss. 2, pp. 62–66.
3. Pinejaninov, F., Pinejaninov, P. (1999), "Properties of Basic Functions", *Exponenta.ru*, available at: <http://exponenta.ru/soft/Mathemat/pinega/a1/a1.asp> (accessed January 4, 2016).
4. Kenneth, H.H., Dewhirst, D.L., Smith, D.E., Byrom, Ted G. (2001), *The Finite Element Method for Engineers*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&sons, Inc., New York, USA.

5. Pashkovsky, A.V., Pashkovskaya, I.V. (2003), "Rectangular Standard Element with Dirichlet conditions on boundary", *Proceedings of Universities. Electromechanics*, no. 3, pp. 9–12.

6. Uldashev, O.I., Uldasheva, M.B. (2007), "Harmonic Basis Functions for Finite Element with Higher Order Approximation", *JINR. Laboratory of IT. Research report 2006-2007*, Dubna, Russia, pp. 317-320, available at: [http://lit.jinr.ru/Reports/SC\\_report\\_06-07/pdfall/p317.pdf](http://lit.jinr.ru/Reports/SC_report_06-07/pdfall/p317.pdf) (accessed January 4, 2016).

7. Yuldashev, O.I., Uldasheva, M.B. (2008), *3D finite elements with harmonic basis functions for approximations of high order*, Joint Institute for Nuclear Research. Laboratory of Information Technologies. Preprint E11-2008-104, Dubna, Russia, available at: [http://www1.jinr.ru/Preprints/2008/104\(E11-2008-104\).pdf](http://www1.jinr.ru/Preprints/2008/104(E11-2008-104).pdf) (accessed January 4, 2016).

8. Bezerdyan, S.I., Tuluchenko, G.Ya. (2015), "Uncoordinated Estimations of Approximation Properties of Harmonic Bases for the Second Order Triangular Finite Element", *Proceedings of the Third International Forum of Students, Graduate Students and Young Scientists*, Dnipropetrovsk, DNU, April 23-24, 2015, pp. 475–477.

9. Bezerdyan, S.I., Bilousova, T.P., Tuluchenko, G.Ya. (2015), "The Practical Test for Predicted Properties of the Second Order Triangular Finite Elements Modified Bases", *Proceedings of the International Scientific-technical Conference "Modern Scientific and Methodological Problems of Mathematics in High School"*, Kyiv, NUFT, June 25-26, 2015, pp.188–189.

10. Zienkiewicz, O., Taylor, R.L. (2000), *Finite Element Method. Vol. 1. The Basis*, Batterworth Heinemann, Oxford, Great Britain.

Стаття надійшла 28.11.2015.