

УДК 517.9

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗІ СКЛАДНИМИ УМОВАМИ ТЕПЛООБМІНУ У СФЕРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

**В. П. Ляшенко, А. Е. Козир**

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського  
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: viklyash2903@gmail.com

**О. П. Дем'янченко**

Азовський морський інститут Національного університету «Одеська морська академія»  
вул. Чорноморська, 19, м. Маріуполь, 87517, Україна. E-mail: olgademyanchenko@gmail.com

Розглянуто математичну модель температурного поля ізотропної кулі з різними умовами теплообміну поверхні з навколишнім середовищем. Розв'язок нелінійної початково-крайової задачі зведено до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна. Запропоновано алгоритм чисельно - аналітичного розв'язання нелінійного інтегрального рівняння. Основою алгоритма став метод квадратурних формул який дозволив нелінійне інтегральне рівняння представити у вигляді системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомої функції. Розглянуто спрощення математичної моделі, яке дозволило звести тривимірну крайову задачу до одновимірної задачі з нелінійними крайовими умовами третього роду. Розв'язок задачі знайдено чисельним методом. Побудовані графіки температурних розподілів.

**Ключові слова:** математична модель, крайова задача, інтегральне рівняння, функція Гріна, різницева схема квадратурні формули.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СО СЛОЖНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТЕПЛООБМЕНА В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

**В. П. Ляшенко, А. Е. Козыр**

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского  
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: viklyash2903@gmail.com

**О. П. Демьянченко**

Азовский морской институт Национального университета «Одесская морская академия»  
ул. Черноморская, 19, г. Мариуполь, 87517, Украина. E-mail: olgademyanchenko@gmail.com

Рассмотрена математическая модель температурного поля изотропного шара с разными условиями теплообмена поверхности с окружающей средой. Решение нелинейной начально-краевой задачи сведено к решению нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна с ядром в виде функции Грина. Предложен алгоритм численно - аналитического решения нелинейного интегрального уравнения. Основой алгоритма стал метод квадратурных формул, который позволил нелинейное интегральное уравнение представить в виде системы алгебраических уравнений относительно неизвестной функции. Рассмотрены упрощения математической модели, которое позволило свести трехмерную краевую задачу к одномерной задаче с нелинейными краевыми условиями третьего рода. Решение задачи найдено численным методом. Построенные графики температурных распределений.

**Ключевые слова:** математическая модель, краевая задача, интегральное уравнение, функция Грина, разностная схема, квадратурные формулы.

**АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ** Дослідження процесів теплообміну, як правило, пов'язане з проведенням натурних експериментів, по вимірюванню температури і теплофізичних параметрів поверхні і внутрішніх областей досліджуваного об'єкта. Установка датчиків на його поверхні часто виявляється неможливою через те, що досліджуваний об'єкт знаходиться на значній відстані, наприклад астероїд, планета, зірка. Тому інформацію про температурний поле отримують з обмеженої множини точок спостереження, розташованих усередині або на поверхні досліджуваного об'єкта [1]. З огляду на дані спостережень, на основі математичної моделі, шляхом розв'язання прямої або оберненої задачі, визначаються температурні розподілу, відновлюються параметри теплового процесу [2–5, 8].

В ядерній енергетиці однією із важливих задач є задача моделювання температурного поля  $U = U(r, \theta, \varphi, t)$  графітової кулі, що розігрівається зовнішніми джерелами тепла. Використання графіту в атомних реакторах зумовлене його порівняно низькою ціною, властивостями, що дозволяють

уповільнювати ядерну реакцію та малим перетином захоплення нейтронів [6].

Наприклад, у високотемпературному газово-графітовому реакторі (ВТГР) використовуються дисперсійні твели двох конструкцій: блочні та кульові. В охолоджуваних газом реакторах ВГР-50 та ВГ-400 активна зона складається із вільної засипки кульових уран-графітових твелів.

Виготовлення кульових твелів діаметром 60 мм проводиться з використанням реакторного графіту, який попередньо стискається. Потім проводиться термічна обробка при температурах 1200–2000°C.

Кульовий твел дає зниження максимальної температури в твелі при використанні приблизно на 150°C. Виникає проблема у необхідності знаходження температурного поля твела під час термічної обробки та при знаходженні його в реакторі [6].

У астрофізиці і геофізиці однією із важливих задач є задача визначення температурного поля  $U = U(r, \theta, \varphi, t)$  кулі  $r \leq R$ , що обертається з кутовими швидкостями  $\omega$  та  $\theta$ , а напрям теплового

потоків інтенсивністю  $q = const$ , що вона сприймає, ортогональний до дотичної площини у кожній точці поверхні [6]. З математичної точки зору більшість космічних об'єктів такі як планети або астероїди можна розглядати як кулі або кулеподібні – сфероїди, тіла обмежені сферою, такі що опромінюються тепловим потоком з боку найближчої зірки (рис. 1) [3].

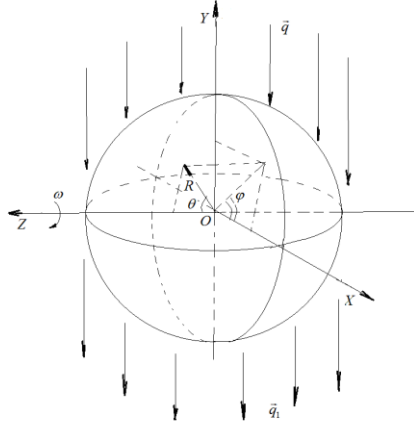


Рисунок 1 – Напрями теплових потоків на зовнішній поверхні сферичної області

Більшість із них мають не одну, а кілька осей обертання. При цьому космічний об'єкт можна розглядати як ізотропне тіло зі сталими теплофізичними характеристиками, тоді область дослідження є простою. А якщо космічний об'єкт розглядається як анізотропне – багатопланове тіло з різними теплофізичними характеристиками, то область дослідження стає складною і визначення температурного поля у ньому приводить до розв'язання крайової задачі для рівняння теплопровідності зі складними граничними умовами на межах переходу від одного шару до іншого – умовами імпедансного типу [5, 12, 13]. Більшість задач, що виникають у математичних моделях теплообміну тривимірні, нелінійні або описують теплові процеси у складній області. Тому такі задачі можуть бути розв'язані лише чисельними методами [14–17]. Для зменшення кількості ітерацій при застосуванні чисельних методів необхідно зменшувати розмірність крайової задачі шляхом зведення її до інтегрального рівняння [9–11].

Метою роботи є побудова, у вигляді інтегрального рівняння, математичної моделі температурного поля ізотропної кулі з різними умовами теплообміну поверхні з навколишнім середовищем.

**МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.** Розглянемо кулю, що має ізотропні фізичні властивості та обертається навколо двох осей симетрії. Одна частина кулі сприймає тепловий потік інтенсивністю  $q = const$ , а інша втрачає тепло. Можна вважати, що на опромінованій поверхні має місце теплообмін за законом Ньютона, а на неопромінованій втрата тепла за законами Ньютона і Стефана-Больцмана.

У такому випадку для визначення температури кулі  $U(r, \theta, \varphi, t)$  отримаємо третю нелінійну почат-

ково-крайову задачу для рівняння теплопровідності в області

$$\Omega \times t = \{0 < r < R, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\}$$

$$\Delta U - \frac{1}{a^2} U_t = 0 \tag{1}$$

$$U(r, \theta, \varphi, 0) = U_0 = const, \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} + h_2 U \Big|_{r=R} = \begin{cases} h_2 U_c + \frac{q}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi & 0 < \theta < \pi \\ & \omega t < \varphi < \omega t + \pi \\ (h_2 - h_1) U + h_1 U_c + \kappa (U_c^4 - U^4) & 0 < \theta < \pi \\ & \omega t + \pi < \varphi < \omega t + 2\pi \end{cases} \tag{3}$$

$$U(r, \theta, \varphi, t) = U(r, \theta, \varphi + 2\pi, t) \tag{4}$$

Тут

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

– оператор Лапласа у сферичній системі координат;

$$a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}, \kappa = \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda},$$

$q_i = (h_2 - h_1)U + h_1 U_c + \kappa(U_c^4 - U^4)$ ,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $c$  – теплоємність;  $\rho$  – щільність;  $\alpha_i$  – коефіцієнт теплообміну;  $\sigma$  – стала Стефана-Больцмана;  $\varepsilon$  – ступінь чорноти поверхні кулі;  $U_c$  – температура навколишнього середовища;  $R$  – радіус кулі.

Умова (3) умови свідчить, що куля обертається навколо двох осей та відображає умови теплообміну її поверхні з оточуючим її середовищем, напрями теплових потоків, які куля сприймає та випромінює.

Шукаємо розв'язок задачі (1) – (4) у вигляді еквівалентного інтегрального рівняння типу Фредгольма по кутових координатах  $0 < \varphi < 2\pi$  і  $0 < \theta < \pi$  та типу Вольтерра за часом  $t > 0$  [9–11]. Нехай  $V(r, \theta, \varphi, t)$  – довільна гармонійна функція. Тоді скориставшись другою формулою Гріна у сферичній системі координат, розставивши межі зінтегрувавши рівняння (1) по змінних  $r, \varphi, \theta$ , одержимо

$$\int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R V \left( \Delta U - \frac{1}{a^2} U_t \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi dt = \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R V \Delta U r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi dt - \frac{1}{a^2} \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^\pi \int_0^R V U_t r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi dt$$

Застосувавши інтегрування частинами та зробивши відповідні перетворення отримуємо другу формулу Гріна [9–11].

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \left[ V \left( \Delta U - \frac{1}{a^2} U_t \right) - U \left( \Delta V + \frac{1}{a^2} V_t \right) \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi dt = \\ & = \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} \left[ V \left( \frac{\partial U}{\partial r} - h_2 U \right) - U \left( \frac{\partial V}{\partial r} - h_2 V \right) \right] \Big|_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi dt - \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R (UV) \Big|_0^{\tau+0} r^2 \sin \theta dr d\theta \end{aligned} \quad (5)$$

Крім формули Гріна для отримання розв'язку задачі (1)-(4) знайдемо функцію Гріна  $G = G(r, \theta, \varphi, t)$ , яку можна отримати із розв'язку спряженої задачі

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} G + \frac{1}{a^2} G_t = -\delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(\varphi-\psi)\delta(t-\tau), \quad (6)$$

$$0 < r, \rho < R, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi, t, \tau > 0 \quad (7)$$

$$G = 0, \quad t > \tau; G < \infty, \quad r = 0 \quad (8)$$

$$G_r + h_2 G \Big|_{r=R} = 0, \quad G \Big|_{\varphi+2\pi} = G \Big|_{\varphi}, \quad (9)$$

де  $\Delta_{r,\theta,\varphi}$  – оператор Лапласа у сферичній системі координат,  $\delta(r-\rho), \delta(\theta-\zeta), \delta(\varphi-\psi)$  – дельта-функції Дірака.

Розглянемо спрощення задачі (1) – (4). Будемо вважати що обертання відбувається навколо однієї осі, поклавши  $\sin \varphi = 1$ . Позначимо у формулі (5)  $V = G(r, \rho; \theta, \zeta; \varphi - \psi; t - \tau)$  і з огляду на (1)–(9), отримуємо інтегральне рівняння відносно функції  $W(\theta, \varphi, t)$ , в області

$$\Omega \times t = \{0 < r < R, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R (G \cdot 0 + U \delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(\varphi-\psi)\delta(t-\tau)) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi dt = \\ & = \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} \left[ G \left( h_2 U_c + \frac{q}{\lambda} \sin \theta \right) \right] \Big|_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi dt + \\ & + \int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} \left[ G \left( (h_2 - h_1) U + h_1 U_c + \kappa (U_c^4 - U^4) \right) \right] \Big|_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi dt + \\ & + \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R U_0 G(r, \rho; \theta, \zeta; \varphi - \psi; 0 - \tau) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Після перетворень останнє рівняння приймає вигляд

$$U(\rho; \zeta; \psi; \tau) = U_L(\rho; \zeta; \psi; \tau) - \int_0^{\tau} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} G(R, \rho; \theta, \zeta; \varphi - \psi; t - \tau) [(h_1 - h_2)W + \kappa W^4] R^2 \sin \theta d\theta d\varphi dt, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} U_L(\rho, \zeta, \psi, \tau) &= \frac{U_0}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R G(r - \rho; \theta - \zeta; \varphi - \psi; 0 - \tau) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi + \\ &+ \int_0^{\tau} \int_{\omega t}^{\omega t+\pi} \int_0^{\pi} G(R, \rho; \theta, \zeta; \varphi - \psi; t - \tau) \left( h_2 U_c + \frac{q}{\lambda} \sin \theta \right) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi dt + \\ &+ (h_1 U_c + \kappa U_c^4) \int_0^{\tau} \int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} G(R, \rho; \theta, \zeta; \varphi - \psi; t - \tau) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Увівши позначення

$$\begin{aligned} U(R, \theta, \varphi, t) &= W(\theta, \varphi, t); \quad G(\rho; \theta, \zeta; \varphi - \psi; t - \tau) = R^2 G(R - \rho; \theta - \zeta; \varphi - \psi; t - \tau); \\ G(\theta - \zeta; \varphi - \psi; t - \tau) &= G(R; \theta - \zeta; \varphi - \psi; t - \tau); \quad W(h_1 - h_2 + \kappa W^3) = \Phi[W(\theta, \varphi, t)], \end{aligned}$$

вираз (10) з урахуванням (11) розподілу температури на поверхні кулі буде мати вигляд

$$W(\zeta, \psi, \tau) = W_L(\xi; \psi; \tau) - \int_0^{\tau} \int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi} \int_0^{\pi} G(\theta, \zeta; \varphi, \psi; t - \tau) \Phi[W(\theta, \varphi, t)] \sin \theta d\theta d\varphi dt. \quad (12)$$

У виразі (12)  $W_L(\xi; \psi; \tau)$  є розв'язок лінійної задачі в області  $\Omega_0 \times t = \{0 < \theta < \pi, \omega t < \varphi < \omega t + \pi\}$ . Нелінійну складову виразу (12) знаходимо методом послідовних наближень [17]. Для цього розбиваємо область  $\Omega_0 \times t$  площинами паралельними координа-

тним осям і наближено заміняємо потрійний інтеграл квадратурою. Цим самим ми отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомої функції  $W_n(\zeta; \varphi; \tau)$

$$W_{n+1}(\zeta; \varphi; \tau) = \int_0^\tau \int_{\omega+\pi}^{\omega+2\pi} \int_0^\pi G(\theta, \zeta; \varphi, \psi; t-\tau) \Phi[W_n(\theta, \varphi, t)] \sin \theta d\theta d\varphi dt, \quad W_0(\zeta; \varphi; \tau) = W_L(\zeta; \varphi; \tau).$$

Знайшовши функцією  $W(\zeta; \varphi; \tau)$  з (12), знайдемо температуру у будь-якій точці поверхні кулі [14].

Розглянемо спрощення задачі (1)–(4), яка є математичною моделлю розігрівання графітових шарів у твелі [6].

Поверхня кулі розігрівається рівномірно постійним тепловим потоком. Тому температурне поле центрально симетричне. З урахуванням того, що в тілі відсутні внутрішні джерела тепла та центральну симетричність температурного поля рівняння (1) можна спростити записавши область  $\Omega$  у вигляді  $\Omega_1 \times t = \{0 < r < R, t > 0\}$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right). \quad (13)$$

Оскільки, на поверхні кулі за умовою задачі відбувається теплообмін з оточуючим її середовищем, діє зовнішнє джерело тепла, то крайові умови при цьому мають наступний вигляд

$$U(r, 0) = u_0, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U(0, t)}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial U(R, t)}{\partial r} = h(u_c - U) + \kappa(u_c^4 - U^4) \end{cases}. \quad (15)$$

*Алгоритм розв'язку*

Наявність нелінійної граничної умови 3-го роду (15) не дозволяє знайти аналітичний розв'язок, а тому для знаходження розв'язку задачі (13) – (15) застосуємо кінцево-різницеви метод на основі неявної чотирьохточкової схеми.

Алгоритм числового розв'язування поставленої задачі побудуємо аналогічно до [14]. На просторово-часовій сітці апроксимуємо диференціальне рівняння (13) звичайно-різницевою схемою. Задачу (13) – (15) запишемо у вигляді різницевої задачі у сепарабельному просторі, а саме: різницеви аналоги рівняння (13), крайових умов (14)–(15), а також додаткові умови для граничних та приграничних вузлів у відповідній рівномірній сітковій області  $G_h^\tau = \{(r_i, t_j) : r_0 = 0$

$$r_i = +(i-1)h, \quad i = 1 \div N, \quad r_N = R, \quad h = \frac{R}{N-1},$$

$$t_n = n \cdot \tau, \quad \tau > 0, \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad t_0 = 0, \dots, t_M \} \quad [17].$$

Замінімо диференціальні оператори у рівнянні (13) їх кінцево-різницеви аналогами отримаємо

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{1}{h^2} \cdot \left[ r_{i+\frac{1}{2}} \cdot u_{i+1}^{n+1} - (r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}}) \cdot u_i^{n+1} + r_{i-\frac{1}{2}} \cdot u_{i-1}^{n+1} \right] \quad (17)$$

$$\text{де } r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, \quad r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}$$

Після апроксимації частинних похідних відповідними кінцевими різницями отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^{n+1}$

$$\rho \cdot c \cdot \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{\lambda}{r_i \cdot h^2} \cdot \left[ r_{i+\frac{1}{2}} \cdot u_{i+1}^{n+1} - (r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}}) \cdot u_i^{n+1} + r_{i-\frac{1}{2}} \cdot u_{i-1}^{n+1} \right]. \quad (18)$$

$$i = 2, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, \dots, M$$

Систему (18) напишемо у більш загальному вигляді

$$A_i \cdot u_{i+1}^{n+1} - B_i \cdot u_i^{n+1} + C_i \cdot u_{i-1}^{n+1} = F_i,$$

$$\text{де } A_i = \frac{\lambda}{h^2} \cdot \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i}, \quad B_i = \frac{\lambda}{h^2} \cdot \frac{r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i} + \frac{\rho c}{\tau},$$

$$C_i = \frac{\lambda}{h^2} \cdot \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i}, \quad F_i = -\frac{\rho c}{\tau} u_i^n$$

Коефіцієнти  $\alpha_i, \beta_i$  знаходяться за формулами

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i \cdot \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}} \quad (19)$$

Невідоме поле температури області визначається з наступного співвідношення

$$u_i^{n+1} = \alpha_i \cdot u_{i+1}^{n+1} + \beta_i. \quad (20)$$

Для визначення початкових значень коефіцієнтів  $\alpha_i$  та  $\beta_i$  використаємо граничні умови (15) та із співвідношення (21) отримаємо  $u_1 = \alpha_1 \cdot u_2 + \beta_1$ .

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \Rightarrow \frac{u_2 - u_1}{h} = 0 \Rightarrow u_2 = u_1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 0 \end{cases},$$

Для визначення температури  $U_N$  скористуємося другою граничною умовою із (15)

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = h_1(u_c - U|_{r=R}) + \kappa(u_c^4 - (U|_{r=R})^4),$$

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = h_1(u_c - u_N) + \kappa(u_c^4 - (u_N)^4)$$

Зваживши на те, що  $u_{N-1} = \alpha_{N-1} \cdot u_N + \beta_{N-1}$ , отримуємо

$$u_N - \alpha_{N-1} \cdot u_N - \beta_{N-1} = Bi(u_c - u_N) + \frac{\varepsilon \sigma h}{\lambda} (u_c^4 - (u_N)^4),$$

$$u_N = \frac{\beta_{N-1} + Bi \cdot u_c + \frac{\varepsilon \sigma h}{\lambda} (u_c^4 - (u_N)^4)}{1 + Bi - \alpha_{N-1}}$$

або

$$u_N = \frac{\lambda \cdot \beta_{N-1} + h \cdot \alpha \cdot u_c + \varepsilon \sigma h (u_c^4 - (u_N)^4)}{h \cdot \alpha + \lambda \cdot (1 - \alpha_{N-1})}. \quad (21)$$

У результаті отримали систему нелінійних рівнянь для визначення температури на поверхні кулі. Ці рівняння розв'язані методом простих ітерацій.

Проведено дискретизацію нелінійної граничної умови з похибкою  $O(h^2)$ . Припустимо, що на границі виконується рівняння теплопровідності (13). Визначимо  $u_N$ , використовуючи праву граничну умову

$$u_{N-1}^{n+1} = u_N^{n+1} - h \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} + \frac{h^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{r=R} = u_N^{n+1} - h \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} + \frac{\rho ch^2}{2\lambda} \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{r=R},$$

$$u_{N-1}^{n+1} = u_N^{n+1} - \frac{\alpha h}{\lambda} \cdot (u_c - u_N^{n+1}) - \frac{\varepsilon \sigma h}{\lambda} \cdot (u_c^4 - (u_N^{n+1})^4) + \frac{\rho ch^2}{2\lambda} \cdot \frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\tau}$$

Враховуючи, що  $u_{N-1} = \alpha_{N-1} \cdot u_N + \beta_{N-1}$ , отримаємо

$$\alpha_{N-1} \cdot u_N^{n+1} + \beta_{N-1} = u_N^{n+1} - \frac{\alpha h}{\lambda} u_c + \frac{\alpha h}{\lambda} u_N^{n+1} + \frac{\rho ch^2}{2\lambda \tau} u_N^{n+1} - \frac{\rho ch^2}{2\lambda \tau} u_N^n - \frac{\varepsilon \sigma h}{\lambda} (u_c^4 - (u_N^{n+1})^4)$$

$$u_N^{n+1} (1 - \alpha_{N-1} + \frac{\alpha h}{\lambda} + \frac{\rho ch^2}{2\lambda \tau}) = \beta_{N-1} + \frac{\alpha h}{\lambda} u_c + \frac{\rho ch^2}{2\lambda \tau} u_N^n + \frac{\varepsilon \sigma h}{\lambda} (u_c^4 - (u_N^{n+1})^4)$$

$$u_N^{n+1} = \frac{2\lambda \tau \beta_{N-1}}{2\lambda \tau (1 - \alpha_{N-1}) + 2\tau \alpha h + \rho ch^2} + \frac{2\tau \alpha h u_c}{2\lambda \tau (1 - \alpha_{N-1}) + 2\tau \alpha h + \rho ch^2} + \frac{\rho ch^2}{2\lambda \tau (1 - \alpha_{N-1}) + 2\tau \alpha h + \rho ch^2} u_N^n + \frac{2\tau \varepsilon \sigma h}{2\lambda \tau (1 - \alpha_{N-1}) + 2\tau \alpha h + \rho ch^2} (u_c^4 - (u_N^{n+1})^4)$$

Використовуючи отримані різницеві формули створені модулі у середовищі Matlab для знаходження температурного поля графітової кулі, що розігрівається зовнішніми джерелами тепла [14].

На рис. 2 зображено температурні розподіли після 60, 600, 1800 секунд розігрівання графітової кулі

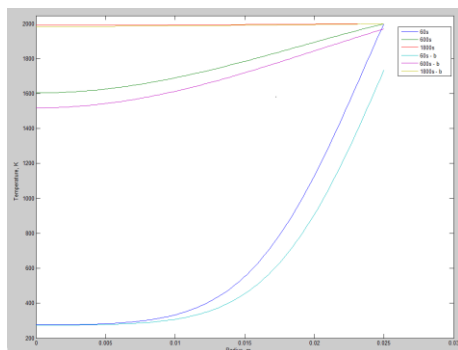


Рисунок 2 – Температурний розподіл після 60, 600, 1800 секунд

На рис. 3 зображено температурний розподіл графітової кулі, що отримані шляхом розв'язання нелінійного диференціального рівняння (13) – (15), з

крайовими умовами 3-го роду після 60 секунд розігрівання зовнішнім джерелом тепла.

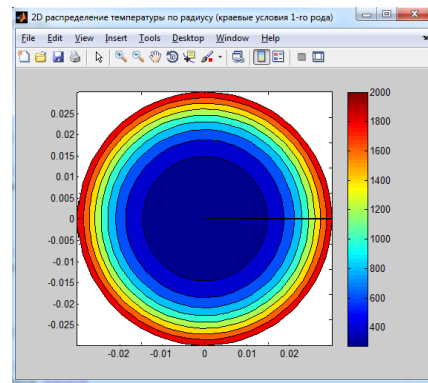


Рисунок 3 – 2D розподіл температури (K) по радіусу (м) (розв'язок задачі (13)-(15), 60 секунд)

**ВИСНОВКИ.** У статі розглянута математична модель температурного поля ізотропної кулі з різними умовами теплообміну поверхні з навколишнім середовищем. Розв'язок нелінійної початково-крайової задачі зведено до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна. Запропоновано алгоритм чисельно - аналітичного розв'язання нелінійного інтегрального рівняння. Основою алгоритма став метод квадратурних формул який дозволив нелінійне інтегральне рівняння представити у вигляді системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомої функції. Розглянуто спрощення математичної моделі, яке дозволило звести тривимірну крайову задачу до одномірної задачі з нелійними крайовими умовами третього роду. Розв'язок задачі знайдено чисельним методом на просторово-часовій сітці шляхом апроксимації диференціального рівняння звичайно-різницевою схемою у сепарабельному просторі. Використовуючи отримані різницеві формули створені модулі у середовищі Matlab для знаходження температурного поля графітової кулі, що розігрівається зовнішніми джерелами тепла. Побудовані графіки температурних розподілів. Отримані математичні моделі можуть бути використані в дослідженнях космічних об'єктів та у атомній енергетиці.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Мацевитий Ю.М., Слесаренко А.П. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений. – К.: Наукова. Думка, 2014. – 336 с.
2. Demyanchenko O. Of heat exchange model in a spherical region // Вісник КрНУ. – Кременчук: КрНУ, 2016. – Вип. 6/2016(101). – Ч. 1. – С. 46–52.
3. Фаворский О.Н, Каданер Я.С. Вопросы теплообмена в космосе. – М.: Высшая школа, 1967. – 239 с.
4. Lyashenko V., Demyanchenko O. Mathematical models of thermal processes in the spherical area: Book of abstracts Eight International Conference, 22-27 June 2016, Albena (Bulgaria) / Application of Mathematics

in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings. – Albena, 2016. – P. 43–44.

5. Lyashenko V., Demyanchenko O. Modeling of Thermal Processes in Spherical Area Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences / AIP Conference Proceedings, 22-27 June 2016. – Albena (Bulgaria), 2016. – P. 040004-1–040004-8.

6. Углерод-графитовые материалы в ядерной энергетике / В.Н. Воеводин, В.А. Грибанов, И.В. Гурин и др. // Сборник научных трудов Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт». – 2015. – С. 52–64.

7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

8. Нелінійні інтегральні рівняння у математичних моделях теплообміну рухомого осесиметричного середовища / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська, Т.С. Бриль, О.П. Дем'янченко // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 2/2017 (62). – С. 133–137.

9. Дем'янченко О.П. Усредненная задача теплопроводности для вращающегося шара: Сборник научных трудов «Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения» Ин-та математики НАН Украины. – 1998. – С. 83–86.

10. Lyashenko V., Hryhorova T. Generalized Mathematical Model of Thermal Diffusion in Powder Metallurgy // AIP Conference Proceedings, 2014. – Albena. – Vol. 1629 (1). – P. 85–93.

11. Дем'янченко О.П. Интегральные уравнения нелинейных периодических задач для одномерных

параболических уравнений // Сборник научных трудов «Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики» Ин-та математики НАН Украины. – 1997. – С. 99–102.

12. Чисельно-аналітичний метод у математичних моделях високотемпературних процесів / А.П. Слесаренко, О.П. Дем'янченко, В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХГТУ, 2015. – Вып. 3/2015 (54). – С. 467–471.

13. Ляшенко В.П., Дем'янченко О.П. К расчету температурного поля теплоизлучающего полого цилиндра. // Вестник Херсонского государственного технического университета. – Херсон: ХГТУ, 2002. – Вып. 2/ 2002 (15). – С. 154–159.

14. Доля П.Г. Использование Matlab. Решение дифференциальных уравнений. – 2012. – Режим доступа: [http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20140425101544\\_ca2b78ee.pdf](http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20140425101544_ca2b78ee.pdf).

15. Мартинсон Л.К., Чигирева О.Ю. Температурное поле цилиндрического тела в режиме периодического разогрева // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – Москва: МГТУ, 2015. – № 3. – С. 88–98.

16. Геренштейн А.В, Геренштейн Е.А., Машрабов Н. Устойчивые явные схемы уравнения теплопроводности для осесимметричной задачи // Вестник ЮУрГУ. – 2010. – № 9. – С. 4–8.

17. Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 699 с.

## MATHEMATICAL MODEL WITH COMPLEX HEAT TRANSFER CONDITIONS IN THE SPHERICAL REGION

V. Lyashenko, A. Kozyr

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University  
vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail: viklyash2903@gmail.com

O. Demyanchenko

Azov Maritime Institute of Odessa National Maritime Academy  
vul. Chernomorskaya, 19, Mariupol, 87517, Ukraine. E-mail: olgademyanchenko@gmail.com

**Purpose.** To consider the mathematical model of the temperature field of an isotropic sphere with different conditions of surface heat exchange with the environment. **Methodology.** The solution of the nonlinear initial-boundary value problem is reduced to the solution of the non-linear integral equation of Hammerstein type with the kernel in the form of the Green's function. **Originality.** The algorithm of the numerical - analytical solution of a nonlinear integral equation has been proposed. The basis of the algorithm was the method of quadrature formulas which allowed the nonlinear integral equation to be represented as a system of algebraic equations for a relatively unknown function. The simplification of the mathematical model has been considered, which allowed to reduce the three-dimensional boundary value problem to a one-dimensional problem with nonlinear boundary conditions of the third kind. The solution of the problem has been received numerically. Graphs of temperature distributions have been constructed. **Practical value.** The mathematical models that have been obtained in the work can be used in researches of space objects and in nuclear power engineering. References 17, figures 3.

**Key words:** mathematical model, boundary value problem, integral equation, Green's function, difference scheme, quadrature formulas.

### REFERENCES

1. Matsevyty, Yu.M., Slesarenko, A.P. (2014), *Necorectnye mnogoparametricheskie zadachi teploprovodnosti i regionalno-strukturalnaya regulyaryzatsia ih resheni* [Ill-posed multiparametric problems of heat conduction and regional-structural

regularization of their solutions], Nauk. Dumka, Kiev, Ukraine.

2. Demyanchenko, O. (2016), “Of heat exchange model in a spherical region”, *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, vol. 6, no. 101, pp. 46-52.

3. Favorskii, O.N. and Kadaner, Ya.S. (1967), *Voprosi teploobmena v kosmose* [Issues of Heat Transfer in Space], Vysshaya shkola, Moscow, Russia.
4. Lyashenko, V., Demyanchenko, O. (2016), "Mathematical models of thermal processes in the spherical area", *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. Book of abstracts Eight International Conference on, AIP Conference Proceedings* [Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. Eight International Conference on, AIP Conference Proceedings], Albena (Bulgaria), June 22-27, 2016. pp. 43-44.
5. Lyashenko, V., Demyanchenko, O. (2016), "Modeling of Thermal Processes in Spherical Area", *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings* [Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings], Albena (Bulgaria), June 22-27, 2016. pp. 040004-1–040004-8.
6. Voevodin, V.N., Gribanov, V.A., Gurin, I. V. et al. (2015), "Carbon-graphite materials in nuclear power engineering" National Scientific Center "Kharkov Institute of Physics and Technology", pp 52-64.
7. Samarskiy, A.A. and Vabishchevich, P.N (2003), *Vichislitel'naya teploperedacha* [Computational heat transfer], Editorial URSS, Moscow, Russian.
8. Lyashenko, V., Kobil'skaya, E., Bryl, T., Demyanchenko, O. (2017), "Nonlinear integral equations in the mathematical models of heat transfer in a moving axial-symmetric medium", *Transactions of Kherson National Technical University*, vol. 3, no. 62, Pate 2, pp. 133-138.
9. Demyanchenko, O.P. (1998), "The average heat conduction problem for a rotating sphere in Non-linear boundary value problems of mathematical physics and their applications", *Collection of scientific papers Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine*, pp. 83-86.
10. Lyashenko, V., Hryhorova, T. Generalized Mathematical Model of Thermal Diffusion in Powder Metallurgy // AIP Conference Proceedings, 2014. – Albena. – Vol. 1629 (1). – pp. 85-93.
11. Dem'yanchenko, O.P. (1997), "Integral equations of nonlinear periodic problems for one-dimensional parabolic equations. Nonlinear problems of differential equations and mathematical physics", *Collection of scientific papers Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine*, pp. 99-102.
12. Slesarenko, A., Demyanchenko, O., Lyashenko, V., Kobil'skaya, E. (2015), "Numerical analytical methods in mathematical models of high-temperature processes", *Transactions of Kherson National Technical University*, vol. 3, no. 54, pp. 467-471.
13. Lyashenko, V.P, Demyanchenko, O.P. (2002), "To the calculation of the temperature field of a heat-emitting hollow cylinder", *Transactions of Kherson National Technical University*, vol. 2, no. 15, pp. 154-159.
14. Dolya, P.G (2012), "Use of the Matlab. Solution of differential equations", available at: [http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20140425101544\\_ca2b78ee.pdf](http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20140425101544_ca2b78ee.pdf).
15. Martinson, L.K., Chigireva, O.Yu. (2015), "Thermal field of a cylindrical body during cyclic heating", *Transactions of Bauman Moscow State Technical University*, no. 3, pp. 88-98.
16. Herreinstein, A.W., Herreinstein, E.A., Mashrabov, N. (2008), "Independent obvious schemes of the heat equation for the axisymmetric commitment" *Transactions of South Ural State University*, vol. 15, no. 115, pp. 9-11.
17. Vlasova, E.A., Zarubin, V.S., Kuvyrkin, G.N. (2004), *Approximate methods of mathematical physics* [Approximate methods of mathematical physics], MSTU. N.E. Bauman, Moscow, Russia.

Стаття надійшла 10.11.2017.