УДК 517.9

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛООБМІНУ З УМОВАМИ ІМПЕДАНСНОГО ТИПУ У БАГАТОШАРОВИХ ОБЛАСТЯХ

В. П. Ляшенко, О. Б. Кобильська
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: viklyash2903@gmail.com
О. П. Дем'янченко
Азовський морський інститут Національного університету «Одеська морська академія»
вул. Чорноморська, 19, м. Маріуполь, 87517, Україна. E-mail: olgademyanchenko@gmail.com

Розглянуто методи побудови умов імпедансного типу для однорідного рівняння теплопровідності у двошарових циліндричній та сферичній областях на межі розділу середовищ з різними теплофізичними характеристиками. Температурне поле циліндричного валка із зносостійким покриттям розглянуто у вигляді температурного поля двошарового циліндра. Для визначення температурного розподілу у такому складеному циліндрі побудована математична модель у вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності. Розглянуто спрощення математичної моделі, яке дозволило побудувати умову імпедансного типу на межі двох шарів циліндра, при щільному контакті. Розглянуто крайову задачу для однорідного рівняння теплопровідності у сферичній області. На основі рівняння теплового балансу елемента двошарової сферичної області та скориставшись теоремою Остроградського - Гауса та теоремою про середнє побудована умова імпедансного типу. Друга умова імпедансного типу отримана із використанням умови моменту теплового балансу у довільній точці сферичної області.

Ключові слова: крайова задача, умова імпедансного типу, сферична область, циліндрична область.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛООБМЕНА С УСЛОВИЯМИ ИМПЕДАНСНОГО ТИПА В МНОГОСЛОЙНЫХ ОБЛАСТЯХ

В. П. Ляшенко, Е. Б. Кобыльская
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: viklyash2903@gmail.com
О. П. Демьянченко
Азовский морской институт Национального университета «Одесская морская академия»
ул. Черноморская, 19, г. Мариуполь, 87517, Украина. E-mail: olgademyanchenko@gmail.com

Рассмотрены методы построения условий импедансного типа для однородного уравнения теплопроводности в двухслойных цилиндрической и сферической областях на границе раздела сред с различными теплофизическими характеристиками. Температурное поле цилиндрического валка с износостойким покрытием рассмотрено в виде температурного поля двухслойного цилиндра. Для определения температурного распределения в таком сложенном цилиндре построена математическая модель в виде краевой задачи для уравнения теплопроводности. Рассмотрено упрощение математической модели, которое позволило построить условие импедансного типа на границе двух слоев цилиндра, при плотном контакте. Рассмотрена краевая задача для однородного уравнения теплопроводности в сферической области. На основе уравнения теплового баланса элемента двухслойной сферической области и воспользовавшись теоремой Остроградского - Гаусса и теоремой о среднем построено условие импедансного типа. Второе условие импедансного типа получено с использованием условия момента теплового баланса в произвольной точке сферической области.

Ключевые слова: краевая задача, условие импедансного типа, сферическая область, цилиндрическая область.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ У математичних моделях теплообміну та дифузії у багатошарових канонічних та неканонічних областях часто доводиться розв'язувати задачі з граничними умовами третього роду [1–10]. Найбільш часто такі задачі розглядаються у канонічних областях, що обмежують циліндри та кулі з однорідними теплофізичними властивостями, з діючими внутрішніми або зовнішніми джерелами тепла. Якщо тіло, що обмежене областю Ω має ізотропні теплофізичні властивості, а його поверхня $\overline{\Omega} \in \Omega$ поглинає або випромінює тепло за законом Ньютона, або Стефана–Больцмана, гранична умова, що описує таку теплову взаємодію між тілом і оточуючим його середовищем має вигляд

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\overline{\Omega}} = \pm\left[\alpha\left(u_c - u\right) + \varepsilon\sigma\left(u_c^4 - u^4\right)\right]. \qquad (1)$$

У багатошарових областях з різними теплофізичними характеристиками шарів умова (1) може змінюватися і приймати більш складний вигляд. Тут можна розглядати два види контакту між шарами – щільний і не щільний тепловий контакт. При нещільному тепловому контакті шарів форма умови третього роду (1) не змінюється і приймає вигляд

$$\lambda_i \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\overline{\Omega}_i} = \pm\left[\alpha_i\left(u_{c_i} - u\right) + \varepsilon_i\sigma\left(u_{c_i}^4 - u^4\right)\right], \qquad (2)$$

де $\lambda_i, \alpha_i, \varepsilon_i, \sigma$ – відповідні коефіцієнти теплопровідності, тепловіддачі, ступеня чорноти шарів та стала Стефана –Больцмана. При щільному тепловому контакті шарів форма умови третього роду (1) змінюється. У такому випадку замість граничної умови третього роду з'являється умова четвертого роду – умова спряження, яка складається з рівності теплових потоків та рівності температур на межі областей щільного теплового контакту. Умовою для визначення теплових потоків при щільному контакті є умова теплового балансу одного із сусідніх шарів, для якого відомі граничні умови [7].

$$\lambda_i \operatorname{div}\left(\operatorname{grad} u\right) - c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} \pm w\left(P, u, t\right) = 0, \qquad (3)$$

де $P, c_i, \rho_i, w\left(P, u, t\right)$ – координати точок області, теплоємність, щільність матеріалу шару та щільність джерел тепла, що діють у шарі

$$\lambda_i \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\overline{\Omega_i}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\overline{\Omega_{i+1}}}. \qquad (4)$$

Для неоднорідного рівняння теплопровідності (3) з діючими у зовнішньому шарі внутрішніми джерелами тепла умова імпедансного типу описана у роботі [11].

Метою роботи є побудова умов імпедансного типу для однорідного рівняння теплопровідності у двошарових циліндричній та сферичній областях на межі розділу середовищ з різними теплофізичними характеристиками.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Розглянемо обмежену двошарову циліндричну область з різними теплофізичними властивостями шарів. З фізичної точки зору її можна розглядати як один стальний валок прокатного стану із зносостійким покриттям, який застосовується під час прокатки металевої стрічки. Для підвищення стійкості валків, подовження терміну їх роботи валки покривають зносостійким матеріалом. При цьому поверхневий шар – покриття товщиною Δ має зовсім інші теплофізичні властивості ніж основна маса валка (рис. 1).

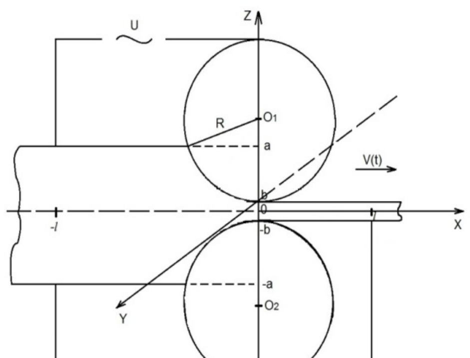

Рисунок 1 – Схема прокатки стрічки

Тому температурне поле такого циліндричного валка доцільно розглядати як температурне поле двошарового циліндра. Моделювання температурного розподілу на поверхні валкових калібрів під час термічної обробки та прокатки стрічки відноситься до задач визначення температурного поля у циліндричній області, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω [12, 13]. Для визначення температурного розподілу $T(r, z, \varphi, t)$ у такому складеному циліндрі приходимо до наступної крайової задачі на спряження в області $\Omega \times t = \left\{\left(r, z, \varphi, t\right) \middle| 0 < r < r_0, 0 < z < l, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\right\}$

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \lambda_{1,2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda_{1,2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - c_{1,2}\rho_{1,2} \frac{\partial T}{\partial t} = \begin{cases} -w, & \forall \quad r_0 - \Delta + 0 \le r < r_0, \\ 0, & \forall \quad 0 < r < r_0 - \Delta - 0 \end{cases} \qquad (5)$$

$$T(r, 0, t) = T(r, z, 0) = T_0, \qquad T(r, z, l) = T_l, \qquad (6)$$

$$\lambda_1 T_r(r_0 - \Delta - 0, z, \varphi, t) = \lambda_2 T_r(r_0 - \Delta + 0, z, \varphi, t), \qquad (7)$$

$$T(r_0 - \Delta - 0, z, \varphi, t) = T(r_0 - \Delta + 0, z, \varphi, t), \qquad (8)$$

$$\begin{gathered} \lambda_1 T_r(r_0, z, \varphi, t) = -\alpha(T - t_c) - \varepsilon\sigma(T^4 - t_c^4), \\ T_r(0, z, \varphi, t) = 0, \end{gathered} \qquad (9)$$

$$T\left(r, \varphi + 2\pi, t\right) = T\left(r, \varphi, t\right), \qquad (10)$$

де $\lambda_{1,2}$, $c_{1,2}$, $\rho_{1,2}$, α, ε, σ – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів шару покриття та основного тіла валка, t_c – температура оточуючого валки середовища. При таких умовах теплообміну у математичній моделі припускаємо, що температура циліндра уздовж його довжини залишається сталою, тому похідною по z можна знехтувати, поклавши $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$. При цьому задача (5)-(10) спрощується, рівняння (5) в області $\Omega_1 \times t = \left\{\left(r, \varphi, t\right) \middle| 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\right\}$ набуває вигляду

$$\lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \lambda_{1,2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - c_{1,2}\rho_{1,2} \frac{\partial T}{\partial t} = \begin{cases} -w, & \forall \quad r_0 - \Delta + 0 \le r < r_0, \\ 0, & \forall \quad 0 < r < r_0 - \Delta - 0 \end{cases}.$$

Для дослідження температурного поля внутрішнього циліндра достатньо знати усереднений температурний розподіл у зовнішньому (рис. 2) [11]. Тому для визначення теплового потоку через поверхню внутрішнього циліндра, помножимо рівняння (5) на rdr і зінтегруємо по товщині шару в межах від $r_0 - \Delta$ до r_0.

Скориставшись співвідношенням

$$u(\varphi, t) = \frac{2}{S} \int\limits_{r_{0-\Delta}}^{r_0} T(r, \varphi, t) r dr,$$

де S – площа перетину зовнішнього шару

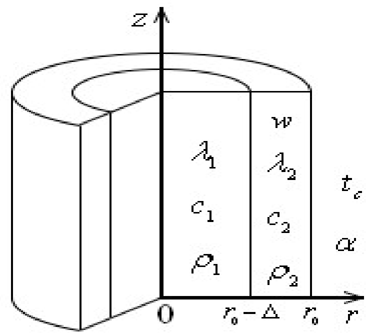

Рисунок 2 – Двошаровий циліндр

Після перетворень маємо на границі внутрішнього та зовнішнього циліндрів умову імпедансного типу

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}+\alpha u-\beta\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\delta\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{r=r_0-\Delta}= \tag{11}$$
$$=\begin{cases} g_0, & \omega t<\varphi<\omega t+\varphi_0,\ t>0,\\ f_0+f(u), & \omega t+\varphi_0<\varphi<\omega t+2\pi,\ t>0.\end{cases}$$

де $g_0, f_0, f(u)$ – сталі величини, або кусково - монотонні функції.

Умову імпедансного типу на межі двох шарів, при щільному контакті, можна отримати зінтегрувавши рівняння (3), яке у випадку відсутності внутрішніх джерел тепла та для нелінійного теплообміну з оточуючим середовищем матиме вигляд

$$\lambda_i\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)-c_i\rho_i\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{12}$$

Розглянемо умову теплового балансу елемента двошарової сферичної області

$\gamma\in\Omega\times t=\{0<r<r_0,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi,\ \mathrm{t}>0\}$

для рівняння (12) (рис. 3)

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}, \tag{13}$$

$$\int_\gamma\left[\lambda_i div(gradu)-c_i\rho_i u_t\right]dV=0. \tag{14}$$

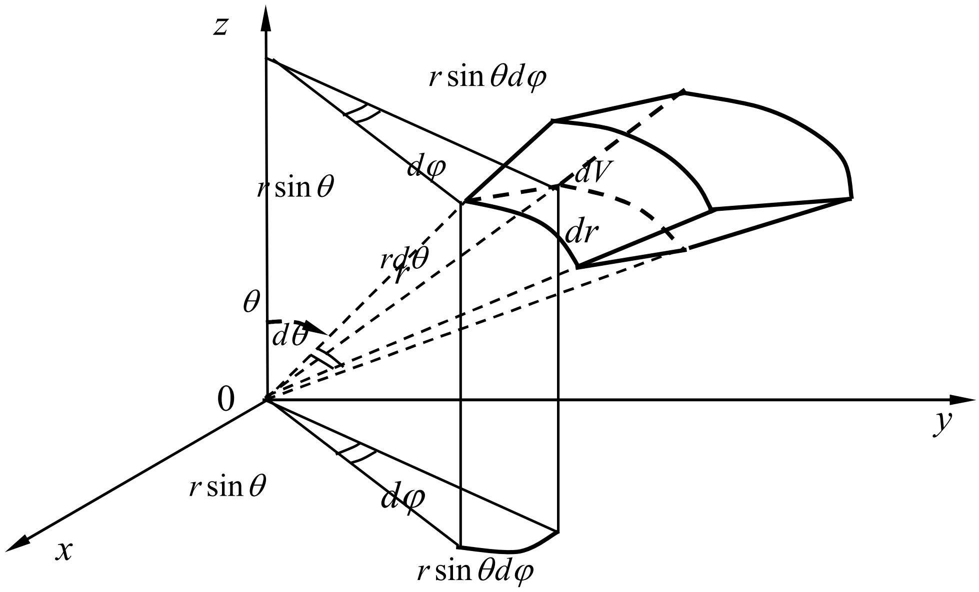

Рисунок 3 – Елемент двошарової сферичної області γ

Умова імпедансного типу виникає у наступній задачі на спряження у двошаровій області $\Omega\times t=\{0<r<r_0,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi,\ \mathrm{t}>0\}$ з границями

$\partial\gamma=\{\Phi_+\cup\Phi_-\cup\partial\theta\cup\partial\varphi\}$ (рис. 3)

$$\Delta T_i-\frac{1}{d^2}T_{it}=0,$$

$$T(r,\theta,\varphi,0)=T_0=const,$$

$$\left.\frac{\partial T_2}{\partial r}+h_2T_2\right|_{r=r_0}=$$
$$=\begin{cases} h_2t_c+\dfrac{q}{\lambda}\sin\theta\sin\varphi & 0<\theta<\pi,\ \omega t<\varphi<\omega t+\pi\\ (h_2-h_1)T+h_1t_c+\kappa\left(t_c^4-T^4\right) & 0<\theta<\pi,\ \omega t+\pi<\varphi<\omega t+2\pi\end{cases}$$

$$T_1(r_0-\Delta-0,\varphi,\theta)\cong T_2(r_0-\Delta+0,\varphi,\theta)=$$
$$=T(r_0-\Delta\pm0,\varphi,\theta),$$
$$T_r(r_0-\Delta-0,\varphi,\theta)\cong T_r(r_0-\Delta+0,\varphi,\theta),$$

$U(r,\theta,\varphi,t)=U(r,\theta,\varphi+2\pi,t),$

де h_1,h_2,κ,q,a^2- теплофізичні характеристики кулі та теплового процесу.

Скориставшись формулою Остроградського – Гауса рівняння (14) запишемо у вигляді [14, 15].

$$\lambda\int_{\gamma} div\left(gradu\right)dV=\lambda\int_{\partial\gamma}\frac{\partial u}{\partial n}ds. \quad (15)$$

Ліву частину цієї формули запишемо у сферичній системі координат (13)

$$\lambda\int_{\gamma} div\left(gradu\right)dV=$$

$$=\lambda\int_{\gamma}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

Розглянемо праву частину формули (15)

$$\lambda\int_{\partial\omega}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\lambda\int_{\Phi_+}\frac{\partial u}{\partial n}ds+\lambda\int_{\Phi_-}\frac{\partial u}{\partial n}ds+\lambda\int_{\partial\gamma_\theta}\frac{\partial u}{\partial n}ds+\lambda\int_{\partial\gamma_\varphi}\frac{\partial u}{\partial n}ds. \quad (16)$$

Тут $\partial\gamma=\left\{\Phi_+\cup\Phi_-\cup\partial\theta\cup\partial\varphi\right\}-$ границі області γ. Обчислимо окремо кожний із інтегралів, що входять у формулу (16).

$$\int_{\Phi_+}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_{\Phi_+}\lambda\frac{\partial u}{\partial r}ds=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\lambda\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0-\Delta}r_0^2\sin\theta d\theta d\varphi= \quad (17)$$

$$=\lambda r_0^2\sin\theta_{cp}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0-\Delta}d\theta d\varphi,$$

$$\int_{\Phi_-}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_{\Phi_-}\lambda\frac{\partial u}{\partial(-r)}rds=$$

$$=-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\lambda\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0-\Delta}\left(r_0-\Delta\right)^2\sin\theta d\theta d\varphi=$$

$$=-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\lambda\left.\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=r_0-\Delta}\sin\theta d\theta d\varphi= \quad (18)$$

$$=-\lambda\left(r_0-\Delta\right)^2\sin\theta_{cp}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0-\Delta}d\theta d\varphi.$$

$$\int_{\partial\gamma_\theta}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_{\partial\gamma_{\theta_1}}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}ds+\int_{\partial\gamma_{\theta_2}}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}ds=$$

$$=-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}\lambda\frac{1}{r}\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_1}r^2\sin\theta_1 dsd\varphi+$$

$$+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}\lambda\frac{1}{r}\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_2}r^2\sin\theta_1 dsd\varphi=$$

$$=-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}\lambda\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_1}r\sin\theta_1 dsd\varphi+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_0-\Delta}^{r_0-\Delta}\lambda\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_2}r\sin\theta_1 dsd\varphi=$$

$$=\lambda\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}r\left(\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\sin\theta\right|_{\theta=\theta_2}-\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\sin\theta\right|_{\theta=\theta_1}\right)drd\varphi=$$

$$=\lambda\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}r\left(\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\sin\theta\right|_{\theta_1}^{\theta_2}\right)drd\varphi=$$

$$=\lambda\int_{\varphi 1}^{\varphi 2}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}r\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\sin\theta\right)d\theta drd\varphi=$$

$$=\lambda\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}rudr\right)d\theta=$$

$$=\lambda r_{cp}^2\mu\sin\theta_{cp}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\Delta u_\theta d\theta. \quad (19)$$

$$\int_{\partial\gamma}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_{\partial\gamma_{\varphi_1}}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}ds+\int_{\partial\gamma_{\varphi_2}}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}ds=$$

$$=-\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}\lambda\frac{1}{r\sin^2\theta}\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1}r^2\sin\theta drd\theta+$$

$$+\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}\lambda\frac{1}{r\sin^2\theta}\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_2}r^2\sin\theta drd\theta=$$

$$=\lambda\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sin\theta}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}r\left(\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_2}-\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1}\right)drd\theta=$$

$$=\lambda\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sin\theta}\int_{r_0-\Delta}^{r_0}r\left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}d\varphi\right)drd\theta=$$

$$=-\frac{\lambda\mu}{r_{cp}^2\sin\theta_{cp}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}d\theta d\varphi, \quad (20)$$

де $\mu=const$, що залежить від теплофізичних параметрів області γ.

Розглянемо другий доданок рівняння теплового балансу (15)

$$\int_{\gamma}c\rho u_t dV=c\rho\int_{\gamma}u_t\, r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=$$

$$=c\rho\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_{r_0-\Delta}^{r_0}u_t\, r^2dr\right)d\varphi=$$

$$=c\rho\nu\sin\theta_{cp}\frac{\partial u}{\partial t}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi d\theta,$$

де $\nu=const$, що залежить від теплофізичних параметрів області γ.

Отже рівняння теплового балансу області γ набуває вигляду

$$\lambda r_0^2\sin\theta_{cp}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0}d\theta d\varphi-$$

$$-\lambda\left(r_0-\Delta\right)^2\sin\theta_{cp}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=(r_0-\Delta)}d\theta d\varphi+$$

$$+\lambda r_{cp}^2 \mu \sin\theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta u_\theta d\theta d\varphi +$$
$$+\lambda r_{cp}^2 \mu \sin\theta_{cp} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta u_\varphi d\theta d\varphi - \quad (21)$$
$$-c\rho\nu \sin\theta_{cp} \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta u_t d\varphi d\theta = 0.$$

Скориставшись теоремою про середнє, будемо мати

$$\lambda r_0^2 \sin\theta_{cp}(\varphi_2-\varphi_1)(\theta_2-\theta_1)\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} -$$
$$-\lambda(r_0-\Delta)^2 \sin\theta_{cp}(\varphi_2-\varphi_1)(\theta_2-\theta_1)\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0-\Delta} +$$
$$+\lambda r_{cp}^2 \mu \sin\theta_{cp}(\varphi_2-\varphi_1)(\theta_2-\theta_1)\Delta_\theta +$$
$$+\lambda r_{cp}^2 \mu \sin\theta_{cp}(\varphi_2-\varphi_1)(\theta_2-\theta_1)\Delta_\varphi - \quad (22)$$
$$-c\rho\nu \sin\theta_{cp}(\varphi_2-\varphi_1)(\theta_2-\theta_1)\Delta u_t = 0.$$

Поділивши обидві частини рівняння (22) на $r_{cp}^2 \sin\theta_{cp}(\varphi_2-\varphi_1)(\theta_2-\theta_1)$, будемо мати

$$\frac{r_0^2}{r_{cp}^2}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} - \frac{(r_0-\Delta)^2}{r_{cp}^2}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0-\Delta} + \mu\Delta_{\theta,\varphi} - \frac{c\rho\nu}{\lambda r_{cp}^2}\Delta u_t = 0.$$

У випадку ідеального теплового контакту в інтервалі $(r_0-\Delta-0, r_0-\Delta+0)$ будемо мати

$$u_1(r_0-\Delta-0,\varphi,\theta) \cong u_2(r_0-\Delta+0,\varphi,\theta) =$$
$$= u(r_0-\Delta\pm 0,\varphi,\theta) \quad ,$$
$$u_r(r_0-\Delta-0,\varphi,\theta) \cong u_r(r_0-\Delta+0,\varphi,\theta)$$
$$\frac{\lambda_c(2r_0\Delta-\Delta^2)}{r_{cp}^2}\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda_c \vartheta \Delta u_{\theta,\varphi} - \frac{c\rho\upsilon}{r_{cp}^2}u_t = 0, \quad (23)$$

де $\vartheta, \upsilon \in const$, що залежать від теплофізичних параметрів області γ.

Рівняння (23) є першою імпедансною умовою для двошарової сферичної області.

Другу умову імпедансного типу можна отимати скориставшись умовою моменту теплового балансу у довільній точці області γ.

$$\int_\gamma m(r,\theta,\varphi)\left(div(\lambda gradU) - c\rho U_t\right)dV = 0. \quad (24)$$

Поклавши у рівнянні (24) $m(r,\theta,\varphi) = r$ отримаємо

$$\int_\gamma r\left(div(\lambda gradU) - c\rho U_t\right)dV = 0. \quad (25)$$

Вважаючи, що при щільному контакті на границі $(r_0-\Delta-0, r_0-\Delta+0)$ шарів з різними теплофізичними властивостями температури співпадають $u_1(r_0-\Delta-0,\varphi,\theta) \cong u_2(r_0-\Delta+0,\varphi,\theta)$, провівши перетворення рівняння (25) аналогічні (16)–(22) отримаємо другу умову імпедансного типу для двошарової сферичної області у вигляді

$$\frac{1}{r_{cp}^2}\frac{\partial u_i}{\partial r}\left(\lambda_1 r_0^3 - \lambda_2(r_0-\Delta)^3\right) + (\xi+\zeta)\Delta u_{i\theta,\varphi} -$$
$$-\frac{c\rho(\varsigma+\chi)}{r_{cp}^2}\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0. \quad (26)$$

Умови (23) і (26) є умовами імпедансного типу, що містять поряд із нормальною похідною по радіусу також похідні за кутовими координатами та за часом.

ВИСНОВКИ. В роботі розглянуто методи побудови умов імпедансного типу для однорідного рівняння теплопровідності у двошарових циліндричній та сферичній областях на межі розділу середовищ з різними теплофізичними характеристиками.

Температурне поле циліндричного валка з стійким покриттям розглянуто у вигляді температурного поля двошарового циліндра. Для визначення температурного розподілу у такому складеному циліндрі побудована метематична модель у вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності. Розглянуто спрощення математичної моделі, яке дозволило побудувати умову імпедансного типу на межі двох шарів циліндра, при щільному контакті. Розглянута крайова задача для однорідного рівняння теплопровідності у двошаровій сферичній області. На основі рівняння теплового балансу елемента двошарової сферичної області та скориставшись теоремою Остроградського - Гауса та теоремою про середнє побудована умова імпедансного типу. Друга умова імпедансного типу отримана із використанням умови моменту теплового балансу у довільній точці сферичної області.

Подальший розвиток наукових досліджень з використанням умови імпедансного типу буде спрямований на побудову та дослідження математичних моделей температурних розподілів у електричних машинах[1].

ЛІТЕРАТУРА

1. V. Lyashenko, A. Zaika, O. Hrytsiuk, E. Kobilskaya. The Generalized Mathematical Model of Heat Conduction in a Complex Multi-layered Area // Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings, 22-26 June 2017. – Albena (Bulgaria), 2017. – P. 090004-1 – 090004-9.

2. Demyanchenko O. Of heat exchange model in a spherical region // Вісник КрНу. – Кременчук: КрНУ, 2016. – Вип. 6/2016. – Ч. 1. – С. 46–52.

3. Atalyilmaz S.O. Experimental and numerical study of natural convection heat transfer from horizontal concentric cylinders // International Journal of Thermal Sciences. – 2011. – Vol. 50. – P. 1472–1483.

4. Nezhad Y.R., Asemi K., Akhlaghi M. Transient solution of temperature field in functionally graded hollow cylinder with finite length using multi-layered approach // International Journal of Mechanics and Materials in Design. – 2011. – Vol. 7. – P. 71–82.

5. Lyashenko V., Demyanchenko O. Modeling of Thermal Processes in Spherical Area Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences / AIP Conference Proceedings, 22-27 June 2016. – Albena (Bulgaria), 2016. – P. 040004-1–040004-8.

6. Углерод-графитовые материалы в ядерной энергетике / В.Н. Воеводин, В.А. Грибанов, И.В. Гурин и др. // Сборник научных трудов Национального научного центра «Харьковский физико-технический інститут». – 2015. – С. 52–64.

7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

8. Нелінійні інтегральні рівняння у математичних моделях теплообміну рухомого осесиметричного середовища / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська, Т.С. Бриль, О. П. Дем'янченко // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 2/2017 (62). – С. 133–137.

9. Демьянченко О.П. Усредненная задача теплопроводности для вращающегося шара: Сборник научных трудов «Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения» Ин-та математики НАН Украины. – 1998. – С. 83–86.

10. Lyashenko V., Hryhorova T. Generalized Mathematical Model of Thermal Diffusion in Powder Metallurgy // AIP Conference Proceedings, 2014. – Albena. – Vol. 1629 (1). – P. 85–93.

11. Ляшенко В.П., Григорова Т.А. Моделювання процесів спікання у контейнері. // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 3(39). – Херсон: ХНТУ, 2010. – С. 292 – 296.

12. Чисельно-аналітичний метод у математичних моделях високотемпературних процесів / А.П. Слесаренко, О.П. Дем'янченко, В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХГТУ, 2015. – Вып. 3/2015 (54). – С. 467–471.

13. Ляшенко В.П., Демьянченко О.П. К расчету температурного поля теплоизлучающего полого цилиндра. // Вестник Херсонского государственного технического университета. – Херсон: ХГТУ, 2002. – Вып. 2/ 2002 (15). – С. 154–159.

14. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.

15. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 699 с.

MATHEMATICAL MODEL WITH COMPLEX HEAT TRANSFER CONDITIONS IN THE SPHERICAL AREA

V. Lyashenko, E. Kobilskaya

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail:viklyash2903@gmail.com

O. Demyanchenko

Azov Maritime Institute of Odessa National Maritime Academy

vul. Chernomorskaya, 19, Mariupol, 87517, Ukraine. E-mail: olgademyanchenko@gmail.com

Purpose. To construct impedance-type conditions for a homogeneous heat conduction equation in two-layer cylindrical and spherical regions at the interface of regions with different thermophysical characteristics. **Methodology.** The conditions of the impedance type for a homogeneous heat equation have been obtained by reducing the dimensionality of the problem, transformations, using the heat balance equation for an element of a two-layer spherical region, and using the Divergence theorem and the mean-value theorem. **Originality.** With dense thermal contact in mathematical models of heat transfer and diffusion in multilayer canonical and noncanonical areas, it becomes necessary to specify additional conditions at the interface between the two media. Such additional conditions may be the conditions of the impedance type. This allows us to calculate the temperature field in complex multilayer areas. The paper presents a campaign to construct impedance-type conditions for a homogeneous heat conduction problem in a cylindrical and spherical area. **Practical value.** The mathematical models that have been obtained in the work can be used in researches of space objects and in nuclear power engineering. References 19, figures 3.

Key words: boundary-value problem, non-canonical area, spherical area, cylindrical area.

REFERENCES

1. Lyashenko, V., Zaika, A., Hrytsiuk, O., Kobilskaya, E. (2017), "The Generalized Mathematical Model of Heat Conduction in a Complex Multi-layered Area", *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings* [Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings], Albena (Bulgaria), June 22-26, 2017. pp. 090004-1 – 090004-9.

2. Demyanchenko, O. (2016), "Of heat exchange model in a spherical region", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University,* vol. 6, no. 101, pp. 46-52.

3. Atalyilmaz, S.O. (2011), "Experimental and numerical study of natural convection heat transfer from horizontal concentric cylinders", *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 50, pp. 1472-1483.

4. Nezhad, Y.R., Asemi, K., Akhlaghi, M. (2011), "Transient solution of temperature field in functionally

graded hollow cylinder with finite length using multi-layered approach", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 7, pp. 71-82.

5. Lyashenko, V., Demyanchenko, O. (2016), "Modeling of Thermal Processes in Spherical Area", *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings* [Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings], Albena (Bulgaria), June 22-27, 2016. pp. 040004-1–040004-8.

6. Voevodin, V.N, Gribanov, V.A., Gurin, I.V. et al. (2015), "Carbon-graphite materials in nuclear power engineering", National Scientific Center "*Kharkov Institute of Physics and Technology*", pp. 52-64.

7. Samarskiy, A.A. and Vabishchevich, P.N. (2003), *Vichislitelnaya teploperedacha* [Computational heat transfer], Editorial URSS, Moscow, Russian.

8. Lyashenko, V., Kobilskaya, E., Bryl, T., Demyanchenko, O. (2017), "Nonlinear integral equations in the mathematical models of heat transfer in a moving axial-symmetric medium", *Transactions of Kherson National Technical University,* vol. 3, no. 62, Pate 2, pp. 133-138.

9. Demyanchenko, O.P. (1998), "The average heat conduction problem for a rotating sphere in Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications", *Collection of scientific papers Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine*, pp. 83-86.

10. Lyashenko, V., Hryhorova, T. (2014), Generalized Mathematical Model of Thermal Diffusion in Powder Metallurgy, AIP Conference Proceedings, Albena, vol. 1629 (1), p. 85-93.

11. Lyashenko, V., Hryhorova, T. (2010), "Modeling of sintering processes in a container", *Transactions of Kherson National Technical University*, vol. 3, no. 39, pp. 292-296.

12. Slesarenko, A., Demyanchenko, O., Lyashenko, V., Kobilskaya, E. (2015), "Numerical analytical methods in mathematical models of high-temperature processes", *Transactions of Kherson National Technical University*, vol. 3, no. 54, pp. 467-471.

13. Lyashenko, V.P, Demyanchenko, O.P. (2002), "To the calculation of the temperature field of a heat-emitting hollow cylinder", *Transactions of Kherson National Technical University*, vol. 2, no. 15, pp. 154-159.

14. Kartashov, E.M. (2001), *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids], Vyssh. shk. Publ., Moscow, Russia.

15. Vlasova, E.A., Zarubin, V.S., Kuvyrkin, G.N. (2004), *Priblizennie metodi matematicheskoj fiziki* [Approximate methods of mathematical physics], MSTU N.E. Bauman, Moscow, Russia.

Стаття надійшла 11.12.2017.