

УДК 539.377

**ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ, ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ
И ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ТЕПЛООБМЕНА
НА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА****Е. П. Зайцев**

Кировоградская летная академия национального авиационного университета

ул. Добровольского, 1, г. Кропивницкий, 25005, Украина. E-mail: zaytsev.ep.klanau@gmail.com

Рассмотрено применение разработанного приближенного аналитического метода решения задач квазистатической термоупругости, для исследования влияния анизотропии, термочувствительности и высокотемпературного теплообмена с окружающей средой на характер распределения температурных полей и напряжений в полом трансверсально-изотропном бесконечном графитовом цилиндре, подверженном воздействию лучисто-конвективного теплообмена на граничных поверхностях. Для частного случая полученного решения, когда на внутренней поверхности цилиндра происходит лучисто-конвективный теплообмен от газовой среды, а на внешней, происходит естественная конвекция, производятся вычисления в широком диапазоне изменения температуры среды и коэффициента теплоотдачи. Числовые расчеты проделаны для двух видов графита, в которых зависимость от температуры коэффициентов линейного расширения линейная, а модулей Юнга – квадратичная.

Ключевые слова: теплопроводность, термоупругость, термочувствительность, анизотропия, лучисто-конвективный теплообмен.

**ВПЛИВ АНІЗОТРОПІЇ, ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ І ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ТЕПЛООБМІНУ
НА ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПОЛОГО ЦИЛІНДРА****Є. П. Зайцев**

Кіровоградська льотна академія національного авіаційного університету

вул. Добровольського, 1, м. Кропивницький, 25005, Україна. E-mail: zaytsev.ep.klanau@gmail.com

Розглянуто застосування розробленого наближеного аналітичного методу розв'язання задач квазистатичної термопружності, для дослідження впливу анизотропії, термочутливості і високотемпературного теплообміну з навколишнім середовищем на характер розподілу температурних полів і напружень в полуму трансверсально-ізотропному нескінченному графітовому циліндрі, який знаходиться під впливом конвективно-променевого теплообміну на граничних поверхнях. Для окремого випадку отриманого рішення, коли на внутрішній поверхні циліндра відбувається конвективно-променевий теплообмін від газового середовища, а на зовнішній, відбувається природна конвекція, виконані обчислення в широкому діапазоні зміни температури середовища і коефіцієнта тепловіддачі. Числові розрахунки виконані для двох видів графіту, в яких залежність від температури коефіцієнтів лінійного розширення лінійна, а модуль Юнга – квадратична.

Ключові слова: теплопровідність, термопружність, термочутливість, анизотропія, конвективно-променевий теплообмін.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Уникальные свойства графита делают его незаменимым материалом, способным работать при высоких температурах в металлургии, атомной и ракетной технике, ядерной физике и энергетике и т. д. К другим особенностям графита как конструкционного материала относятся его прочность и пластичность, которая возрастает при повышении температуры вплоть до 2500°C [1] (например, прочность на растяжение большинства графитов при этой температуре примерно в два раза превышает прочность при комнатной температуре), высокая сопротивляемость тепловым ударам, хорошая обрабатываемость. Однако графит представляет собой хрупкий и анизотропный материал, имеющий высокую степень анизотропии. В то же самое время, графит как конструкционный материал, изучен недостаточно при высоких температурах, когда адекватно учитывается термочувствительность материала, анизотропия и высокотемпературный теплообмен с окружающей средой. Поэтому, для того чтобы вскрыть дополнительные резервы для интенсификации различных технологических режимов, их необходимо учитывать при расчетах термонапряженного состояния различных графитовых деталей. Литература по термоупругости в цилиндрах довольно обширна, однако, большинство исследований посвя-

щены изотропным материалам [2–9] и, кроме того, недостаточно изучен вопрос влияния вышеназванных характеристик на распределения температурных полей и напряжений в полых цилиндрах. В работе выведены аналитические зависимости для относительной температуры и соответствующих температурных напряжений цилиндра. На числовых примерах, для двух типов графита, исследованы влияния анизотропии, термочувствительности материала и высокотемпературного теплообмена с окружающей средой на характер распределения температурных полей и напряжений в полом трансверсально-изотропном бесконечном графитовом цилиндре, а также дано сравнение полученных результатов.

Поэтому важным и актуальным является получение решений задач термоупругости на основе нового аналитического подхода, применительно к постановкам задач, имеющим большое практическое значение, которые бы наиболее полно и адекватно учитывали свойства данного материала, анизотропию и высокотемпературный теплообмен с окружающей средой.

Целью работы является установление количественного и качественного влияния анизотропии, термочувствительности материала и лучисто-

конвективного теплообмена с окружающей средой на характер распределения температурных полей и напряжений в полом цилиндре.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Рассмотрим применение приближенного аналитического метода [2] решения задач квазистатической термоупругости, для свободной от внешней нагрузки бесконечного полого трансверсально-изотропного термочувствительного графитового цилиндра с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2 , имеющим начальную температуру T_0 , и находящимся в условиях лучисто-конвективного теплообмена со средами, имеющими постоянные температуры T_1 и T_2 . Предположим также, что общее нормальное усилие в поперечном сечении цилиндра равно нулю.

Первым этапом решения задачи термоупругости в квазистатической постановке является решение дважды нелинейной краевой задачи нестационарной теплопроводности, которую удобно записать в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} & \circ C_v^*(\theta)_{,\rho} = (\lambda^*(\theta)\theta_{,\rho})_{,\rho} + \lambda^*(\theta)\theta_{,\rho}/\rho, \\ & (1 < \rho < R; Fo > 0); \quad \theta(\rho, Fo)|_{Fo=0} = 0; \\ & L_i(\theta) = Sk_i (\theta^4 + 4\theta^3 S + 6\theta^2 S^2); \\ & \lambda^*(\theta)\theta_{,\rho}|_{\rho=1} = -Q_1 + (G_1\theta + L_1(\theta))|_{\rho=1}; \\ & \lambda^*(\theta)\theta_{,\rho}|_{\rho=R} = Q_2 - (G_2\theta + L_2(\theta))|_{\rho=R}, \bullet (1) \end{aligned}$$

где $T_c = \max\{T_1; T_2\}$, $\theta = (T - T_0)/T_z$, $T_z = T_c - T_0$,
 $S = T_0/T_z$, $a = \lambda_0/C_{v0}$, $\rho = r/r_1$, $R = r_2/r_1$,
 $Fo = at/r_1^2$, $\lambda(T) = \lambda_0 \lambda(\theta)$, $C_v(T) = C_{v0} C_v^*(\theta)$,
 $(i = 1; 2)$, $P_i = (T_i^4 - T_0^4)/T_z^4$, $\theta_i = (T_i - T_0)/T_z$,
 $Bi_i = \alpha_i r_1/\lambda_0$, $Sk_i = \sigma_0 \varepsilon_i r_1 T_z^3/\lambda_0$, $Q_i = Bi_i + Sk_i \cdot P_i$,
 $G_i = Bi_i + 4Sk_i \cdot S^3$.

Вводя в (1) преобразования Гудмэна и Кирхгофа [2]

$$A(\theta) = \int_0^\theta C_v^*(\theta') d\theta', \quad B(\theta) = \int_0^\theta \lambda^*(\theta') d\theta' \quad (2)$$

с помощью дифференциальных соотношений

$$A(\theta)_{,\rho} = C_v^*(\theta)_{,\rho}, \quad B(\theta)_{,\rho} = \lambda^*(\theta)_{,\rho},$$

преобразуем (1) к эквивалентному виду:

$$\begin{aligned} & \circ A(\theta)_{,\rho} = B(\theta)_{,\rho\rho} + \rho^{-1} B(\theta)_{,\rho}; \quad \theta(\rho, Fo)|_{Fo=0} = 0; \\ & L_i(\theta) = Sk_i (\theta^4 + 4\theta^3 S + 6\theta^2 S^2); \\ & B(\theta)_{,\rho}|_{\rho=1} = -Q_1 + (G_1\theta + L_1(\theta))|_{\rho=1}; \\ & B(\theta)_{,\rho}|_{\rho=R} = Q_2 - (G_2\theta + L_2(\theta))|_{\rho=R}. \bullet (3) \end{aligned}$$

В (3) функции (2) и $\theta^{(m)}$ ($m = \overline{1, 4}$) представим в виде следующих рядов Фурье по синусам:

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(1)} \sin(k\pi\theta / \theta_p) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}; \quad (4)$$

$$(A(\theta), B(\theta), \theta^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\beta_k^{(1)}}, \frac{b_k}{\beta_k^{(1)}}, \frac{\beta_k^{(m)}}{\beta_k^{(1)}} \right) \theta^{(k)}, \quad (5)$$

где $\theta^{(k)} = \beta_k^{(1)} \sin(k\pi\theta / \theta_p)$, $(a_k, b_k, \beta_k^{(m)}) =$
 $= \frac{2}{\theta_p} \int_0^{\theta_p} (A(\theta), B(\theta), \theta^{(m)}) \sin(k\pi\theta / \theta_p) d\theta. \quad (6)$

Подставляя разложения (4), (5) и $1 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!$ в (3), применяя обобщенный принцип суперпозиции [2], получим совокупность линейризованных задач теплопроводности относительно $\theta^{(k)}(\rho, Fo_k)$:

$$\begin{aligned} & \circ \theta_{,\rho}^{(k)} = \theta_{,\rho\rho}^{(k)} + \rho^{-1} \theta_{,\rho}^{(k)}; \quad \theta^{(k)}(\rho, Fo_k)|_{Fo_k=0} = 0; \\ & \left\{ \theta_{,\rho}^{(k)} - Bi_{1k} \theta^{(k)} \right\} \Big|_{\rho=1} = -M_{1k}; \\ & \left\{ \theta_{,\rho}^{(k)} + Bi_{2k} \theta^{(k)} \right\} \Big|_{\rho=R} = M_{2k}; \quad k = 1, 2, \dots, \bullet (7) \end{aligned}$$

где ($i = 1; 2$),

$$\begin{aligned} & \circ Fo_k = \alpha_k Fo, \quad \alpha_k = b_k/a_k, \quad M_{ik} = Q_i \beta_k^{(1)} / (e b_k (k-1)!), \\ & Bi_{ik} = (G_i \beta_k^{(1)} + Sk_i (\beta_k^{(4)} + 4S \beta_k^{(3)} + 6S \beta_k^{(2)})) / b_k, \bullet (8) \end{aligned}$$

Применяя к (7) конечное интегральное преобразование Ханкеля [10]

$$\bar{\theta}^{(k)}(\mu_{ki}, Fo_k) = \int_1^R \rho \theta^{(k)}(\rho, Fo_k) \psi_k(\mu_{ki}, \rho) d\rho, \quad (9)$$

где μ_{ki} – корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} & N_{1k}(\mu_k) L_{2k}(\mu_k R) - L_{1k}(\mu_k) N_{2k}(\mu_k R) = 0, \\ & N_{1k}(\mu_{ki}) = J_0(\mu_{ki}) + \mu_{ki} J_1(\mu_{ki}) / Bi_{1k}, \\ & L_{1k}(\mu_{ki}) = Y_0(\mu_{ki}) + \mu_{ki} Y_1(\mu_{ki}) / Bi_{1k}, \\ & N_{2k}(\mu_{ki} R) = J_0(\mu_{ki} R) - \mu_{ki} J_1(\mu_{ki} R) / Bi_{2k}, \\ & L_{2k}(\mu_{ki} R) = Y_0(\mu_{ki} R) - \mu_{ki} Y_1(\mu_{ki} R) / Bi_{2k}, \end{aligned}$$

$\psi_k(\mu_{ki}, \rho) = L_{1k}(\mu_{ki}) J_0(\mu_{ki} \rho) - N_{1k}(\mu_{ki}) Y_0(\mu_{ki} \rho) -$
 собственные функции, получим

$$\begin{aligned} & \circ \bar{\theta}_{,\rho}^{(k)} + \mu_{ki}^2 \bar{\theta}^{(k)} = R M_{2k} \psi_k(\mu_{ki}, R) + M_{1k} \psi_k(\mu_{ki}, 1), \\ & \bar{\theta}^{(k)}(\mu_{ki}, Fo_k) \Big|_{Fo_k=0} = 0. \bullet (10) \end{aligned}$$

Решая краевую задачу (10), получим

$$\bar{\theta}^{(k)}(\mu_{ki}, Fo_k) = H_k(\mu_{ki}) \left(1 - e^{-\mu_{ki}^2 Fo_k} \right) / \mu_{ki}^2, \quad (11)$$

где $H_k(\mu_{ki}) = R M_{2k} \psi_k(\mu_{ki}, R) + M_{1k} \psi_k(\mu_{ki}, 1)$.

Применяя обратное преобразование Ханкеля

$$\theta^{(k)}(\rho, Fo_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_k(\mu_{ki}, \rho)}{\|\psi_k\|^2} \bar{\theta}^{(k)}(\mu_{ki}, Fo_k), \quad (12)$$

где $\|\psi_k\|^2 =$

$$= \frac{2}{\pi^2 B_{2k}^2 \mu_{ki}^2} \left\{ \frac{N_{1k}^2 (\mu_{ki}) (\mu_{ki}^2 + B_{2k}^2)}{N_{2k}^2 (\mu_{ki} R)} - \frac{(\mu_{ki}^2 + B_{1k}^2) B_{2k}^2}{B_{1k}^2} \right\},$$

получим $\theta^{(k)}(\rho, F_{0k}) =$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_k(\mu_{ki}, \rho)}{\|\psi_k\|^2} H_k(\mu_{ki}) \frac{1}{\mu_{ki}^2} \left(1 - e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}} \right). \quad (13)$$

Улучшим сходимость решения (13) с помощью решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \circ W^{(k)}(\rho)_{,\rho} + \rho^{-1} W^{(k)}(\rho)_{,\rho} &= 0; \\ \left\{ W^{(k)}_{,\rho} - B_{1k} W^{(k)} \right\} \Big|_{\rho=1} &= -M_{1k}; \\ \left\{ W^{(k)} + B_{2k} W^{(k)} \right\} \Big|_{\rho=R} &= M_{2k}. \bullet \end{aligned} \quad (14)$$

Применяя к (14) преобразование Ханкеля (9), а затем (12), получим

$$W^{(k)}(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_k(\mu_{ki}, \rho)}{\|\psi_k\|^2} \frac{H_k(\mu_{ki})}{\mu_{ki}^2}. \quad (15)$$

Решение краевой задачи (14), с помощью непосредственного интегрирования дифференциального уравнения дает

$$W^{(k)}(\rho) = C_k + D_k \ln \rho, \quad (16)$$

где $C_k = \frac{RM_{2k} + M_{1k} + R \cdot M_{1k} B_{2k} \ln R}{B_{2k} R + B_{1k} + R \cdot B_{1k} B_{2k} \ln R},$

$$D_k = \frac{(M_{2k} B_{1k} - M_{1k} B_{2k}) R}{B_{2k} R + B_{1k} + R \cdot B_{1k} B_{2k} \ln R}.$$

Отнимая (15) и прибавляя (16) в (13), и сокращая одинаковые выражения, получим $\theta^{(k)}(\rho, F_{0k}) =$

$$= C_k + D_k \ln \rho - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \psi_k(\mu_{ki}, \rho) e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}}, \quad (17)$$

где $A_{ki} = H_k(\mu_{ki}) / (\mu_{ki}^2 \|\psi_k\|^2).$

Суммируя (17) по k , согласно (4), получим решение краевой задачи теплопроводности $\theta(\rho, F_{0k}) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (C_k + D_k \ln \rho) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \psi_k(\mu_{ki}, \rho) e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}}, \quad (18)$$

в котором θ_p определим из уравнения, полученного из (18) при $F_{0k} \rightarrow \infty$, т. е.

$$\theta_p = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k + D_k \ln \rho). \quad (19)$$

Определяя θ_p из уравнения (19), а по нему коэффициенты рядов Фурье (6), M_{ik} и B_{ik} из (8), решение (18) будет полностью определено.

Вторым этапом решения, является определение термонапряженного состояния цилиндра, по известному решению (18). Математически такой процесс описывается системой уравнений [8, 10, 11]:

$$\begin{aligned} \circ \bar{\sigma}_{rr,\rho} + \rho^{-1} (\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}) &= 0; \quad \bar{\varepsilon}_{rr} = \bar{u}_{,\rho}; \quad \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \rho^{-1} \bar{u}; \\ \bar{\varepsilon}_{rr} &= \frac{1}{E_r^*(\theta)} \bar{\sigma}_{rr} - \frac{\nu_{r\varphi}}{E_r^*(\theta)} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} - \frac{\nu_{rz} E_{r0}}{E_z^*(\theta) E_{z0}} \bar{\sigma}_{zz} + \varphi_r^*(\theta); \\ \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= -\frac{\nu_{r\varphi}}{E_r^*(\theta)} \bar{\sigma}_{rr} + \frac{1}{E_r^*(\theta)} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} - \frac{\nu_{rz} E_{r0}}{E_z^*(\theta) E_{z0}} \bar{\sigma}_{zz} + \varphi_r^*(\theta); \\ \bar{\varepsilon}_{zz} &= -\frac{\nu_{rz} E_{r0}}{E_z^*(\theta) E_{z0}} \bar{\sigma}_{rr} - \frac{\nu_{rz} E_{r0}}{E_z^*(\theta) E_{z0}} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} + \frac{E_{r0}}{E_z^*(\theta) E_{z0}} \bar{\sigma}_{zz} + \\ &+ \frac{\alpha_{z0}}{\alpha_{r0}} \varphi_z^*(\theta); \quad \bar{\sigma}_{rr} \Big|_{\rho=1} = 0; \quad \bar{\sigma}_{rr} \Big|_{\rho=R} = 0, \bullet \end{aligned} \quad (20)$$

где $\bar{\varepsilon}_{zz} = \bar{C}_0,$ $E_r(T) = E_{r0} E_r^*(\theta),$ $E_z(T) = E_{z0} E_z^*(\theta),$

$$\alpha_r(T) = \alpha_{r0} \alpha_r^*(\theta), \quad \alpha_z(T) = \alpha_{z0} \alpha_z^*(\theta), \quad \bar{u} = \frac{u}{\alpha_{r0} T_z r_1},$$

$$\varphi_r^*(\theta) = \int_0^{\theta} \alpha_r^*(\theta') d\theta', \quad \varphi_z^*(\theta) = \int_0^{\theta} \alpha_z^*(\theta') d\theta',$$

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}) &= (E_{r0} \alpha_{r0} T_z)^{-1} (\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}), \\ (\bar{\varepsilon}_{rr}, \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \bar{C}_0) &= (\alpha_{r0} T_z)^{-1} (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, C_0). \end{aligned}$$

Разлагая единицу и функции $1/E_r^*(\theta)$ и $1/E_z^*(\theta)$ в ряд Фурье-Бесселя, а $\varphi_r^*(\theta)$ и $\varphi_z^*(\theta)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $(0, \theta_p)$, получим

$$\begin{aligned} \circ 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(0)} J_0 \left(\frac{\nu_k \theta}{\theta_p} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k, \quad V_k = \alpha_k^{(0)} J_0 \left(\frac{\nu_k \theta}{\theta_p} \right), \\ 1/E_r^*(\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{rk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k, \quad 1/E_z^*(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{zk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k, \\ \varphi_r^*(\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{rk}}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)}, \quad \varphi_z^*(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{zk}}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)}. \bullet \end{aligned} \quad (21)$$

где $(\alpha_k^{(0)}, g_{rk}, g_{zk}) =$

$$= \frac{2}{\theta_p^2 J_1^2(\nu_k)} \int_0^{\theta_p} \theta \left(1, \frac{1}{E_r^*(\theta)}, \frac{1}{E_z^*(\theta)} \right) J_0 \left(\frac{\nu_k \theta}{\theta_p} \right) d\theta,$$

$$(\varphi_{rk}, \varphi_{zk}) = \frac{2}{\theta_p} \int_0^{\theta_p} (\varphi_r^*(\theta), \varphi_z^*(\theta)) \sin(k\pi\theta / \theta_p) d\theta.$$

Подставляя (21) в (20), преобразуем систему к виду:

$$\circ \left(\bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,\rho} + \rho^{-1} \cdot \left(\bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right) = 0;$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \left(\bar{u} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,\rho}; \quad \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \rho^{-1} \cdot \bar{u} \sum_{k=1}^{\infty} V_k;$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k &= \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{rk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k - v_{r\varphi} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{rk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k - \\ &- v_{rz} \frac{E_{r0}}{E_{z0}} \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{zk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{rk}}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)}; \\ \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} V_k &= \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{rk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k - v_{r\varphi} \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{rk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k - \\ &- v_{rz} \frac{E_{r0}}{E_{z0}} \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{zk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{rk}}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)}; \\ \bar{C}_0 \sum_{k=1}^{\infty} V_k &= \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{zk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k - v_{rz} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{zk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k - \\ &- v_{rz} \bar{\sigma}_{rr} \frac{E_{r0}}{E_{z0}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{zk}}{\alpha_k^{(0)}} V_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{rk}}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)}; \\ \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \Big|_{\rho=1} &= 0; \quad \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \Big|_{\rho=R} = 0; \bullet \quad (22) \end{aligned}$$

Вводя в системе (22) не зависящие от k компоненты напряжений, деформаций и перемещений под знаки сумм, используя обозначения

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_{rr}^{(k)}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)}, \bar{\sigma}_{zz}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)}, \bar{C}_0^{(k)}, \bar{u}^{(k)}) &= \\ &= (\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\varepsilon}_{rr}, \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \bar{C}_0, \bar{u}) V_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_r^{(k)} &= \frac{g_{rk}}{\alpha_k^{(0)}}, \quad s_z^{(k)} = \frac{E_{r0}}{E_{z0}} \frac{g_{zk}}{\alpha_k^{(0)}}, \quad s_{r\varphi}^{(k)} = -v_{r\varphi} \frac{g_{rk}}{\alpha_k^{(0)}}, \\ s_{rz}^{(k)} &= -v_{rz} \frac{E_{r0}}{E_{z0}} \frac{g_{zk}}{\alpha_k^{(0)}}, \quad \alpha_{rk} = \frac{\varphi_{rk}}{\beta_k^{(1)}}, \quad \alpha_{zk} = \frac{\alpha_{z0}}{\alpha_{r0}} \frac{\varphi_{zk}}{\beta_k^{(1)}}. \end{aligned}$$

и применяя обобщенный принцип суперпозиции, получим совокупность краевых задач термоупругости с постоянными приведенными физико-механическими характеристиками:

$$\begin{aligned} \circ \quad \bar{\sigma}_{rr,\rho} + \rho^{-1} (\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)}) &= 0; \quad \bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)} = \bar{u}_{,\rho}^{(k)}; \quad \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} = \rho^{-1} \bar{u}^{(k)}; \\ \bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)} &= s_r^{(k)} \bar{\sigma}_{rr}^{(k)} + s_{r\varphi}^{(k)} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} + s_{rz}^{(k)} \bar{\sigma}_{zz}^{(k)} + \alpha_{rk} \theta^{(k)}; \\ \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} &= s_{r\varphi}^{(k)} \bar{\sigma}_{rr}^{(k)} + s_r^{(k)} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} + s_{rz}^{(k)} \bar{\sigma}_{zz}^{(k)} + \alpha_{rk} \theta^{(k)}; \\ \bar{\varepsilon}_{zz}^{(k)} &= s_{rz}^{(k)} \bar{\sigma}_{rr}^{(k)} + s_{rz}^{(k)} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} + s_z^{(k)} \bar{\sigma}_{zz}^{(k)} + \alpha_{zk} \theta^{(k)}; \\ \bar{\sigma}_{rr}^{(k)} \Big|_{\rho=1} &= 0; \quad \bar{\sigma}_{rr}^{(k)} \Big|_{\rho=R} = 0; \bullet \quad (23) \end{aligned}$$

В системе (23), соотношения между деформациями и напряжениями выразим через напряжения:

$$\begin{aligned} \circ \quad \bar{\sigma}_{rr}^{(k)} &= \frac{1}{B_k^2 - A_k^2} \left[B_k \bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)} - A_k \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} + \right. \\ &+ \frac{s_{rz}^{(k)}}{s_z^{(k)}} (A_k - B_k) \bar{\varepsilon}_{zz}^{(k)} + P_k (A_k - B_k) \theta \left. \right]; \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} &= \frac{1}{B_k^2 - A_k^2} \left[-A_k \bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)} + B_k \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} + \frac{s_{rz}^{(k)}}{s_z^{(k)}} (A_k - B_k) \bar{\varepsilon}_{zz}^{(k)} + \right. \\ &+ P_k (A_k - B_k) \theta \left. \right]; \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(k)} = \frac{1}{s_z^{(k)}} \left[\bar{\varepsilon}_{zz}^{(k)} - s_{rz}^{(k)} (\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} + \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)}) - \alpha_{zk} \theta \right], \bullet \quad (24)$$

где $A_k = s_{r\varphi}^{(k)} - \frac{s_{rz}^{(k)}}{s_z^{(k)}}, \quad B_k = s_r^{(k)} - \frac{(s_{rz}^{(k)})^2}{s_z^{(k)}},$

$$P_k = \alpha_{rk} - \frac{s_{rz}^{(k)} \alpha_{zk}}{s_z^{(k)}}.$$

Подставляя первое и второе равенство (24) в первое уравнение (23), с учетом второго и третьего равенств, получим дифференциальное уравнение для определения радиального перемещения

$$\frac{d^2 \bar{u}^{(k)}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{u}^{(k)}}{d\rho} - \frac{\bar{u}^{(k)}}{\rho^2} = \frac{P_k (B_k - A_k)}{B_k} \frac{d\theta^{(k)}}{d\rho}. \quad (25)$$

Решая (25) путем двойного интегрирования, получим

$$\bar{u}^{(k)} = \frac{P_k (B_k - A_k)}{B_k \rho} \int_1^{\rho} \rho' \theta^{(k)}(\rho', F_{0k}) d\rho' + C_1^{(k)} \rho + \frac{C_2^{(k)}}{\rho},$$

где $C_1^{(k)}$ и $C_2^{(k)}$ определяются из граничных условий (23), с учетом первого равенства (24), и второго и третьего выражений (23). Подставляя найденные постоянные в равенство для $\bar{u}^{(k)}$, определяя деформации в (23) и используя первое и второе выражения (24), получим следующие выражения для радиальных и касательных напряжений: $\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} =$

$$= \frac{P_k}{B_k} \left[\frac{\rho^2 - 1}{(R^2 - 1)\rho^2} \int_1^R \rho' \theta^{(k)} d\rho' - \frac{1}{\rho^2} \int_1^{\rho} \rho' \theta^{(k)} d\rho' \right]; \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} &= \frac{P_k}{B_k} \left[\frac{\rho^2 + 1}{(R^2 - 1)\rho^2} \int_1^R \rho' \theta^{(k)} d\rho' + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\rho^2} \int_1^{\rho} \rho' \theta^{(k)} d\rho' - \theta^{(k)} \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

Подставляя (26) и (27) в третье выражение (24) и учитывая, что общее нормальное усилие в поперечном сечении цилиндра равно нулю, получим выражение для осевого напряжения

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(k)} = \frac{\alpha_{zk} B_k - P_k s_{rz}^{(k)}}{B_k s_z^{(k)}} \left[\frac{2}{R^2 - 1} \int_1^R \rho' \theta^{(k)} d\rho' - \theta^{(k)} \right]. \quad (28)$$

Подставляя (17) в (26)–(28), получим k -е компоненты для напряжений

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} = \frac{P_k}{B_k} \left\{ \frac{\rho^2 - 1}{(R^2 - 1)\rho^2} \left[C_k \frac{R^2 - 1}{2} + D_k \frac{2R^2 \ln R - R^2 + 1}{4} - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \int_1^R \rho' \cdot \psi_k(\mu_{ki}, \rho') d\rho' \cdot e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}} \right] - \frac{1}{\rho^2} \left[C_k \frac{\rho^2 - 1}{2} + D_k \frac{2\rho^2 \ln \rho - \rho^2 + 1}{4} - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \int_1^{\rho} \rho' \cdot \psi_k(\mu_{ki}, \rho') d\rho' \times e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}} \right] \right\}, \quad (31)$$

Суммуя (29), (30), (31) по k , получим аналитическое решение (20).

Числовые расчеты в системе СИ по определению $\theta, \bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}$ проделаны для решений (18), (19), (29), (30) и (31) в среде MATLAB [12], для двух типов графита с такими значениями входных числовых параметров и зависимостями физико-механических характеристик материала от температуры: $r_1 = 0,3 \text{ m}; r_2 = 0,45 \text{ m}; \varepsilon_1 = 0,8; \varepsilon_2 = 0; \alpha_2 = 0,612; \alpha_1 = 15,3; 30,6; 61,2; 153,1; 306,2; 490 (Bi_i = 0,025; 0,05; 0,1; 0,25; 0,5; 0,8); T_1 = 320; 620; 820; 1270; 1450 (Sk_1 = 0,002; 0,016; 0,038; 0,147; 0,22)$

$$\int_1^R \rho' \cdot \psi_k(\mu_{ki}, \rho') d\rho' = L_{1k}(\mu_{ki}) \frac{1}{\mu_{ki}} [RJ_1(\mu_{ki}R) - J_1(\mu_{ki})] - N_{1k}(\mu_{ki}) \frac{1}{\mu_{ki}} [RY_1(\mu_{ki}R) - Y_1(\mu_{ki})],$$

$$I_{jR} = RJ_1(\mu_{ki}R) - J_1(\mu_{ki}), \quad I_{yR} = RY_1(\mu_{ki}R) - Y_1(\mu_{ki})$$

$$\int_1^{\rho} \rho' \cdot \psi_k(\mu_{ki}, \rho') d\rho' = \frac{1}{\mu_{ki}} (L_{1k}(\mu_{ki})I_{j\rho} - N_{1k}(\mu_{ki})I_{y\rho}),$$

$$I_{j\rho} = \rho J_1(\mu_{ki}\rho) - J_1(\mu_{ki}), \quad I_{y\rho} = \rho Y_1(\mu_{ki}\rho) - Y_1(\mu_{ki})$$

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} = \frac{P_k}{B_k} \left\{ \frac{\rho^2 - 1}{(R^2 - 1)\rho^2} \left[C_k \frac{R^2 - 1}{2} + D_k \frac{2R^2 \ln R - R^2 + 1}{4} - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \frac{1}{\mu_{ki}} (L_{1k}(\mu_{ki})I_{jR} - N_{1k}(\mu_{ki})I_{yR}) \cdot e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}} \right] - \frac{1}{\rho^2} \left[C_k \frac{\rho^2 - 1}{2} + D_k \frac{2\rho^2 \ln \rho - \rho^2 + 1}{4} - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \frac{1}{\mu_{ki}} \times (L_{1k}(\mu_{ki})I_{j\rho} - N_{1k}(\mu_{ki})I_{y\rho}) \cdot e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}} \right] \right\}, \quad (29)$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{P_k}{B_k} \left\{ \frac{\rho^2 + 1}{(R^2 - 1)\rho^2} \left[C_k \frac{R^2 - 1}{2} + D_k \frac{2R^2 \ln R - R^2 + 1}{4} - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \frac{1}{\mu_{ki}} (L_{1k}(\mu_{ki})I_{jR} - N_{1k}(\mu_{ki})I_{yR}) \cdot e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}} \right] + \frac{1}{\rho^2} \left[C_k \frac{\rho^2 - 1}{2} + D_k \frac{2\rho^2 \ln \rho - \rho^2 + 1}{4} - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \frac{1}{\mu_{ki}} \times (L_{1k}(\mu_{ki})I_{j\rho} - N_{1k}(\mu_{ki})I_{y\rho}) \cdot e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}} \right] - \left[C_k + D_k \ln \rho - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \psi_k(\mu_{ki}, \rho) e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}} \right] \right\}, \quad (30)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(k)} = \frac{\alpha_{zk} B_k - P_k s_{rz}^{(k)}}{B_k s_z^{(k)}} \left\{ \frac{2}{R^2 - 1} \left[C_k \frac{R^2 - 1}{2} + D_k \frac{2R^2 \ln R - R^2 + 1}{4} - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \frac{1}{\mu_{ki}} (L_{1k}(\mu_{ki})I_{jR} - N_{1k}(\mu_{ki})I_{yR}) \cdot e^{-\mu_{ki}^2 F_{0k}} \right] \right\}$$

I.

$$\lambda(T) = 183,7 - 0,1143 \cdot T; \quad C_v(T) = 1729239 + 1925,5 \cdot T;$$

$$E_r(T) = 9,653 \cdot 10^9 - 3343 \cdot T^2; \quad \nu_{r\varphi} = 0,11;$$

$$E_z(T) = 7,93 \cdot 10^9 - 2726 \cdot T^2; \quad \nu_{rz} = 0,11;$$

$$\alpha_r(T) = 2,3 \cdot 10^{-6} + 0,21 \cdot 10^{-8} \cdot T;$$

$$\alpha_z(T) = 3,5 \cdot 10^{-6} + 0,32 \cdot 10^{-8} \cdot T$$

II.

$$\lambda(T) = 183,7 - 0,1143 \cdot T; \quad C_v(T) = 1729239 + 1925,5 \cdot T;$$

$$E_r(T) = 19,03 \cdot 10^9 - 6590,3 \cdot T^2; \quad \nu_{r\varphi} = 0,2;$$

$$E_z(T) = 5,24 \cdot 10^9 - 1814,7 \cdot T^2; \quad \nu_{rz} = 0,2;$$

$$\alpha_r(T) = 0,6 \cdot 10^{-6} + 0,055 \cdot 10^{-8} \cdot T;$$

$$\alpha_z(T) = 9 \cdot 10^{-6} + 0,83 \cdot 10^{-8} \cdot T.$$

Все зависимости от температуры преобразуются к виду $p(T) = p_0 p^*(\theta)$.

На графиках введены такие обозначения для параметров и линий: $\theta \div TET; \rho \div Ro; \bar{\sigma}_{rr} \div SRR; \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \div SFF; \bar{\sigma}_{zz} \div SZZ; 1$ – пунктирная линия обозначает линейное решение; 2 – штрихпунктирная, – нелинейность 1-го рода; 3 – сплошная, – решение с двойной нелинейностью в соответствующих задачах теплопроводности. Влияние нелинейностей анализируются на графиках по направлению снизу вверх для температуры и положительных напряжений, и сверху вниз для отрицательных напряжений.

На рис. 1 нижние графики, при одном и том же Bi_1 , соответствуют $\rho = 1,5$, а верхние – $\rho = 1$.

Так как критерий Старка имеет малое значение, то расположение графиков будет (2-3-1) для всего диапазона изменения критерия Био, причем, с его увеличением, начиная с 0,1, линии 2 и 3 совпадают.

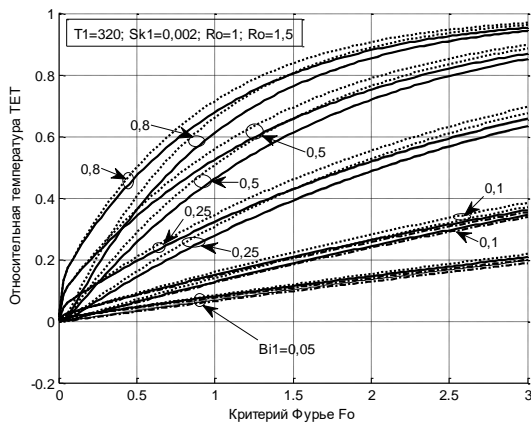


Рисунок 1 – Зависимость θ ($\rho = 1; 1,5$) от критерия Fo при различных Bi_1 и фиксированной $T_1 = 320$

При увеличении T_1 , а следовательно, и увеличении Sk_1 , как показано на рис. 2, происходит изменение расположение графиков с (2 – 1 – 3) на (2 – 3 – 1), начиная с $Bi_1 = 0,1$. С увеличением Bi_1 линии 3 и 2 сближаются.

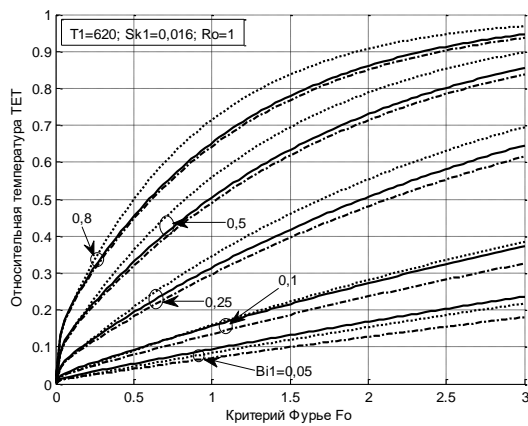


Рисунок 2 – Зависимость θ ($\rho = 1$) от критерия Fo при различных Bi_1 и фиксированной $T_1 = 620$

Поскольку, начиная с $T_1 = 820^\circ\text{C}$, теплообмен излучением является, основным способом передачи тепла (около 85–95% тепла в печах передается на поверхность нагреваемых предметов излучением и лишь 5--15% конвекцией), то на рис. 3 приведены графики относительных температур поверхностей цилиндра для малых значений критерия Био $Bi_1 = 0,025; 0,05; 0,1$, для которых расположение графиков будет (2-1-3). С увеличением температуры среды T_1 влияние лучистого теплообмена на распределение θ будет еще более существенным.

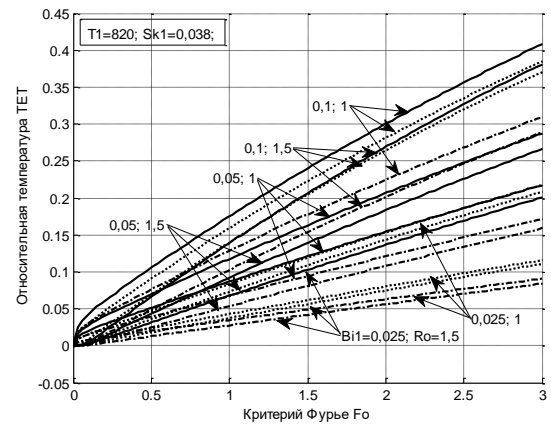


Рисунок 3 – Зависимость θ ($\rho = 1; 1,5$) от критерия Fo при различных Bi_1 и фиксированной $T_1 = 820$

Так как Sk_1 имеет малое значение, то на рисунках 4 и 5 видно, что линии 2 и 3 незначительно отличаются до критерия $Bi_1 = 0,25$, после которого они совпадают. Кроме того, с увеличением Bi_1 разность по модулю между максимумами напряжений сплошной 3 и пунктирной 1 линий увеличивается. С увеличением T_1 , как показано на рисунках 6 и 7, эта разность также увеличивается, причем, она будет больше для сжимающих напряжений.

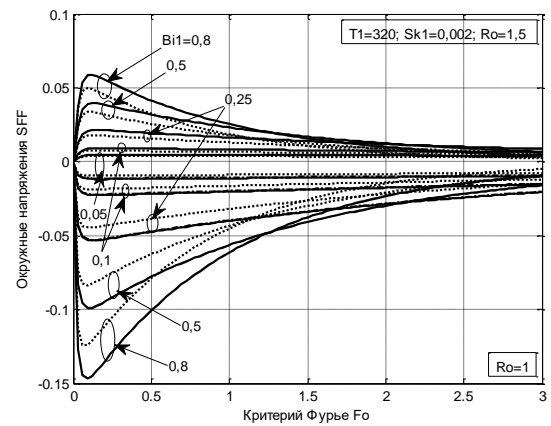


Рисунок 4 – Зависимость $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ ($\rho = 1; 1,5$) от Fo при различных Bi_1 и фиксированной $T_1 = 320$

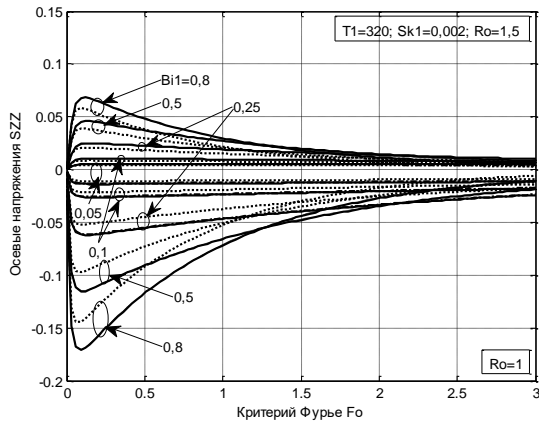


Рисунок 5 – Зависимость $\bar{\sigma}_{zz}$ ($\rho = 1; 1,5$) от Fo при различных Bi_1 и фиксированной $T_1 = 320$

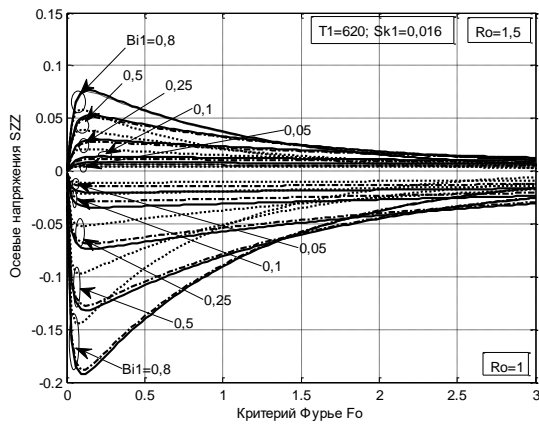


Рисунок 6 – Зависимость $\bar{\sigma}_{zz}$ ($\rho = 1; 1,5$) от Fo при различных Bi_1 и фиксированной $T_1 = 620$

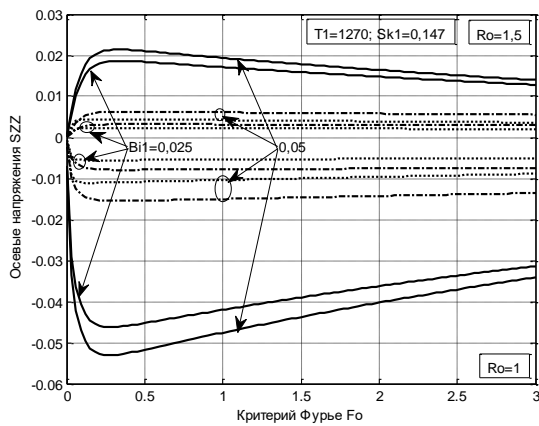


Рисунок 7 – Зависимость $\bar{\sigma}_{zz}$ ($\rho = 1; 1,5$) от Fo при различных Bi_1 и фиксированной $T_1 = 1270$

На рис. 8 показано, как существенно меняется окружное напряжение $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ по радиусу цилиндра с увеличением температуры среды и учета двойной нелинейности в задаче теплопроводности.

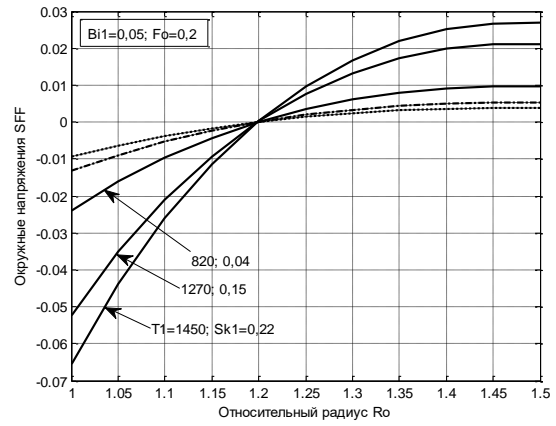


Рисунок 8 – Зависимость $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ от радиуса при различных Sk_1 и фиксированных Bi_1 и Fo

На рис. 9 и 10 показано влияние анизотропии на распределение окружного $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ ($T_1 = 320$) и осевого $\bar{\sigma}_{zz}$ ($T_1 = 820$) напряжений в зависимости от критерия Фурье. На графиках видно, что сжимающие напряжения подвержены большему влиянию анизотропии по сравнению с растягивающими. Кроме того, на рисунке 9 при анизотропии II экстремальное значения для сжимающего напряжения достигается при $Fo \approx 0,9$, а для растягивающего при $Fo \approx 1,1$. При таких же значениях критериев Фурье экстремумы достигаются и для анизотропии I. На рисунке 10 смещение экстремумов для анизотропий I и II не происходит.

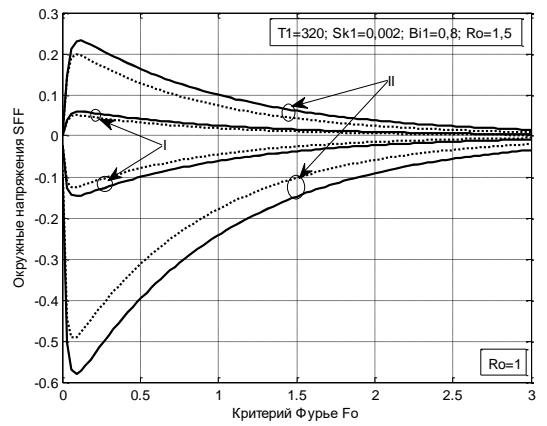


Рисунок 9 – Зависимость $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ ($Ro = 1; 1,5$) от критерия Fo для анизотропий I и II и фиксированных Bi_1 , $T_1 = 320$ и $Fo = 0,2$

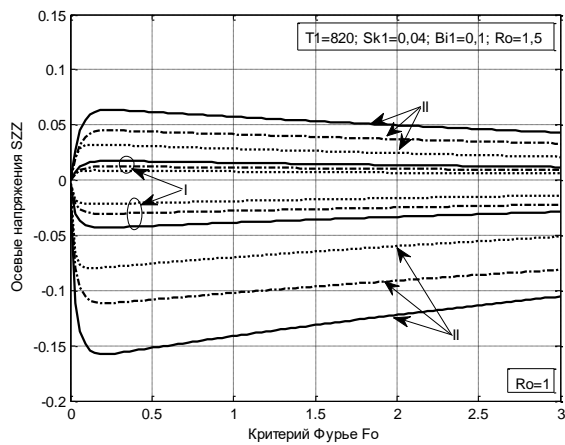


Рисунок 10 – Зависимость $\bar{\sigma}_{zz}$ ($Ro = 1; 1,5$) от критерия Fo для анизотропий I и II и фиксированных Bi_1 , $T_1 = 820$, $Fo = 0, 2$

На рис. 11 показано существенное влияние анизотропии на распределение радиальных напряжений по радиусу цилиндра для критерия Фурье $Fo = 0, 2$. Для тех же параметров, существенное влияние анизотропии на распределение осевых напряжений $\bar{\sigma}_{zz}$ по радиусу цилиндра показано на рис. 12.

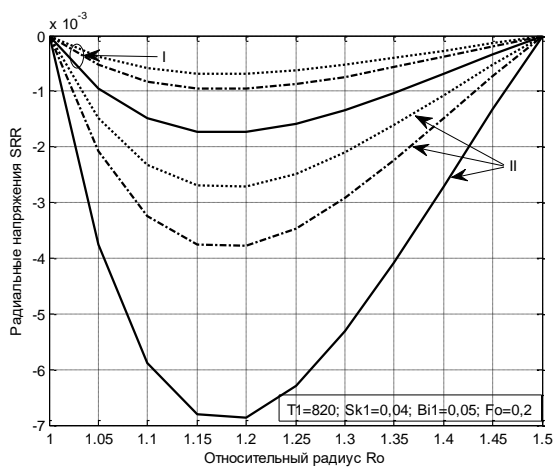


Рисунок 11 – Зависимость $\bar{\sigma}_{rr}$ от радиуса для анизотропий I и II при фиксированных Bi_1 , $T_1 = 820$ и $Fo = 0, 2$

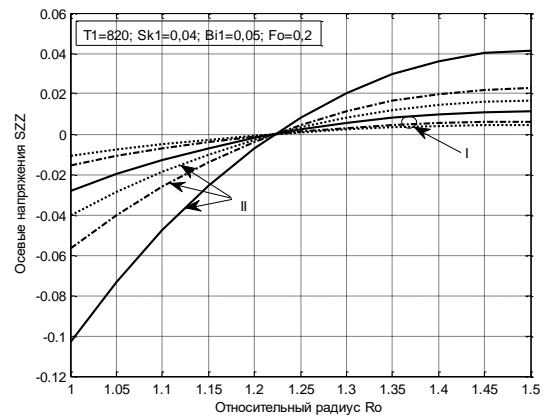


Рисунок 12 – Зависимость $\bar{\sigma}_{zz}$ от радиуса для анизотропий I и II при фиксированных Bi_1 , $T_1 = 820$ и $Fo = 0, 2$

ВЫВОДЫ. Применение разработанного метода [2] для решения поставленной задачи показало:

1. Для малых значений критерия Старка, расположение графиков (2-3-1) не меняется для всего диапазона изменения критерия Био. С увеличением критерия Старка происходит изменение расположения графиков с (2-1-3) на (2-3-1), причем, с увеличением критерия Био линии 2 и 3 сближаются.

2. С увеличением критериев Био и Старка разность по модулю между максимумами напряжений линий 3 и 1 увеличивается, причем, она будет больше для сжимающих напряжений.

3. Влияние анизотропии на распределение $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ ($T_1 = 320$) и $\bar{\sigma}_{zz}$ ($T_1 = 820$) в зависимости от критерия Фурье показывает, что сжимающие напряжения подвержены большему влиянию анизотропии по сравнению с растягивающими. Кроме того, при анизотропии II экстремальное значения для сжимающего напряжения достигается при $Fo \approx 0, 9$, а для растягивающего при $Fo \approx 1, 1$.

4. Существенное влияние анизотропия оказывает также на распределения $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{zz}$ по радиусу цилиндра, причем, сжимающие напряжения подвержены большему влиянию.

Дальнейшая научная работа будет направлена на решения двумерных задач термоупругости для анизотропных цилиндров, подверженных влиянию высокотемпературного теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Графит в науке и ядерной технике / Е.И. Жмуриков, И.А. Бубенков, В.В. Дремов, С.И. Самарин // Новосибирск, 2013. – 194 с.
2. Зайцев Е.П. Суперпозиция основных уравнений квазистатической термоупругости анизотропных термочувствительных тел / Вісник Кремен-

чуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2017. – Вип. 1/2017 (102). – С. 22–31.

3. Зайцев Е.П. Влияние термочувствительности и зонального высокотемпературного теплообмена на температурное поле бесконечного цилиндра // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2016. – Вип. 3 (98), част. 1. – С. 33–40.

4. Кушнір Р.М., Попович В.С. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра: Термопружність термочутливих тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 409 с.

5. Термопружний стан безмежного кругового термочутливого циліндра за умови конвективно-променевого теплообміну з довкіллям / В. Попович, Г. Гарматій, Р. Кушнір // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 113–120.

6. Моделювання і дослідження термомеханічної поведінки термочутливих тіл за врахування впливу теплового випромінювання / Р.Ф. Терлецький,

М.Б. Брухаль, Ю.В. Немировський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 2. – С. 212–224.

7. Аналитические решения квазистатических задач термоупругости с переменными физическими свойствами среды / В.А. Кудинов, А.Э. Кузнецова, А.В. Еремін // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – №2(35). – С. 130–135.

8. Noda N., (1991), “Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties”, *App. Mech. Review*, Vol. 44, pp. 383–397.

9. Noda N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: *Thermal Stresses I*. – Amsterdam: Elsevier, 1986. – pp. 391–483.

10. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: «Либроком», 2012. – 656 с.

11. Noda N., Hetnarski R.B. and Tanigawa Y. (2003), *Thermal Stresses*, 2nd edition. Taylor and Francis, New York.

12. Кетков Ю.Л. MATLAB 7: программирование, численные методы/Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М.М. Шульц. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 752 с.

INFLUENCE OF ANISOTROPY, THERMAL SENSITIVITY AND HIGH-TEMPERATURE HEAT EXCHANGE ON THE THERMONALIZED STATE OF A QUILL CYLINDER

Y. Zaytsev

Kirovograd Flight Academy of National Aviation University

vul. Dobrovolskogo, 1, Kropyvnytskyi, 25005, Ukraine. E-mail: zaytsev.ep.klanau@gmail.com

Purpose. To develop and approbate new approach to the decision of tasks of quasistatic thermoelasticity of anisotropic bodies, taking into account thermosensitivity of material and high-temperature heat exchange with the environment. Use of the constructional materials which are successfully functioning in the conditions of high-temperature heat exchange along with the isotropic, broad application is found by anisotropic materials which problem of authentic determination of thermotension is of great importance in the general complex of engineering calculations. **Methodology.** After the decision of the task of heat conduction, this approach to superposition of the appropriate task of quasistatic thermoelasticity has been applied. For this purpose we decompose the physicommechanical characteristics depending on temperature and unit in a row Fourier-Bessel of the 1st type on an interval of change of temperature and we enter them into each equation of system. Adding not depending on a component of tension, deformations, relocation, volume and surface forces under signs of the amounts, entering designations, and then, applying the generalized superposition principle to system, we will receive set of boundary value problems of the linear thermoelasticity with the constant provided thermoelastic characteristics. Defining components of system solutions, and then, adding them on, we will receive the approximate analytical solution of an objective. **Results.** The offered approach has been applied to the decision of the task of thermoelasticity to the free from external loading of the infinite continuous isotropic thermosensitive cylinder which is in conditions of radiative convective heat exchange. On a large number of numerical calculations influence of nonlinearity of the 1st kind and double nonlinearity on distributions of temperature, tension and relocation for cases of change of convection in case of continuous temperature of the environment and change of temperature of the environment is shown, up to high-speed heating, in case of continuous convection. **Originality.** The offered approach allows to receive analytical solutions of complex challenges of thermoelasticity and to analyze the researched processes in a broad range of physicommechanical characteristics of material and conditions of heat exchange. **Practical value.** The developed approach to the decision of tasks of quasistatic thermoelasticity allows considering most fully and adequately anisotropy, thermosensitivity of material and high-temperature heat exchange with the environment in case of determination of temperature, tension and relocation of elements of the constructions working in a wide range of temperatures. Besides, this method allows tousing it as obtaining test decisions when calculating difficult elements of constructions.

Key words: heat conduction, thermoelasticity, thermosensitivity, superposition, high-temperature heat exchange.

REFERENCES

1. Zhmurikov, E.I., (2013), *Grafit v nauke I yadernoj texnike* [Graphite in Science and Nuclear Engineering], Novosibirsk, Russia.
2. Zaytsev, Y.P. (2017), “Superposition of the basic equations of quasi-static thermoelasticity of anisotropic thermosensitive bodies”, *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, iss. 1 (102), pp. 22 – 31.
3. Zaytsev, Y.P. (2016), “Influence of the double nonlinearity on the infinite cylinder temperature field at zonal high-temperature heat exchange”, *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, iss 3 (98), part 1, – pp. 33 – 40.
4. Kushnir, R.M., Popovych, V.S. (2009), *Modelyuvannya ta optimizatsiya v termomehanitsi elektroprovodnyh neodnorodnyh til. Termoprujnyct termoshtyluvuh til* [Modelling and optimization in thermomechanics of electrically conductive heterogeneous bodies. Thermoelasticity of temperature-dependent bodies], Lviv, Ukraine.
5. Popovych, V., Harmatiy, H., Kushnir, R. (2008), “Thermoelastic state of infinite thermosensitive circular cylinder conditioned upon the convective-radial heat exchange with surrounding air”, *Bulletin of Donetsk university. Natural sciences*, iss. 1. – pp. 113-120.
6. Terletsy, R.F., Bruhal, M. B., Nemirovsky, Y.V. (2013), “Simulation and research of thermomechanical behavior of thermosensitive bodies in terms of influence of thermal radiation”, *Mathematical methods and physico-mechanical fields*. iss 2(56), pp. 212-224.
7. Kudinov, V., Kuznetsova, A., Eremin, A. (2014), “Analytical decisions of quasistatic tasks of thermoelasticity with variable physical properties of the environment”, *Journal of Samara State Techical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, iss 2(35), pp. 130–135.
8. Noda, N. (1991), “Thermal Stresses in Materials with Temperature–Dependent Properties”, *App. Mech. Review*, Vol. 44, pp. 383-397.
9. Noda, N. (1986), “Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties” *In: Thermal Stresses I. – Amsterdam: Elsevier. – pp. 391 – 483.*
10. Kartashov, E.M. (2012), *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in solid bodies thermal conduction theory], Higher school, Moscow, Russia.
11. Noda, N., Hetnarski, R.B. and Tanigawa, Y. (2003), *Thermal Stresses*, 2nd edition. Taylor and Francis, New York.
12. Ketkov, Y.L., Ketkov, A.Y., Shults, M.M. (2005), *MATLAB 7: programirovanie, chislennue me-todu* [MATLAB 7: programming, numerical methods], Science, Sankt-Petersburg, Russia.

Стаття надійшла 20.12.2017.