

## СРАВНЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ТЕПЛООБМЕНА НА ТЕРМОУПРУГОСТЬ ЦИЛИНДРА ИЗ СПЛАВОВ АЛЮМИНИЯ, ТИТАНА И СТАЛИ

**Е. П. Зайцев**

Летная академия национального авиационного университета

ул. Добровольского, 1, г. Кропивницкий, 25005, Украина. E-mail: zaytsev.ep.klanau@gmail.com

Рассматривается применение разработанного приближенного аналитического метода решения задач квазистатической термоупругости анизотропных термочувствительных тел, на анализ влияния термочувствительности рассмотренных материалов и лучисто-конвективного теплообмена на распределение температурных полей и напряжений по времени в центре и поверхности цилиндра. Графически показаны качественные и количественные изменения влияния нелинейности первого рода и двойной нелинейности в задаче теплопроводности, на характер распределения температур и напряжений в центре и поверхности цилиндра, для случая изменения коэффициента теплоотдачи при фиксированной температуре окружающей среды, а также для случая изменения температуры окружающей среды при фиксированном значении коэффициента теплоотдачи. Полученные в работе результаты могут быть использованы в инженерной практике как тестовые решения при конструировании и расчёте режимов высокотемпературного теплообмена элементов конструкций, а также критерием оценки для соответствующих численных решений.

**Ключевые слова:** теплопроводность, термоупругость, термочувствительность, суперпозиция, высокотемпературный теплообмен, преобразования Гудмэна и Кирхгофа, ряды Фурье.

## ПОРІВНЯННЯ ВПЛИВУ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ І ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ТЕПЛООБМІНУ НА ТЕРМОПРУЖНІСТЬ ЦИЛІНДРА ЗІ СПЛАВІВ АЛЮМІНІЮ, ТИТАНУ І СТАЛІ

**Є. П. Зайцев**

Льотна академія національного авіаційного університету

вул. Добровольського, 1, м. Кропивницький, Україна, 25005 E-mail: zaytsev.ep.klanau@gmail.com

На сучасному етапі розвитку техніки, широке використання знаходять нові розроблені сплави алюмінію і титану, які застосовуються для деталей космічних і повітряних літальних апаратів, парових і газових турбін, реактивних і ракетних двигунів. Метою дослідження є застосування нового підходу до вирішення задач термопружності, для оцінки впливу нелінійностей першого роду і подвійної нелінійності на розподіл температурних полів і напружень в алюмінієвих і титанових сплавах, які мають суттєві відмінності коефіцієнтів теплопровідності. Розроблений новий підхід до вирішення задачі нелінійної нестационарної теплопровідності анизотропних термочувствительних тіл, застосовується до суперпозиції відповідної задачі квазистатичної термопружності. Для цього фізико-механічні характеристики, які залежать від температури, і одиницю розкладаємо в ряд Фур'є-Бесселя 1-го типу на інтервалі зміни відносної температури, отриманої з рішення задачі нестационарної теплопровідності, вводимо їх в кожне рівняння системи і, застосовуючи узагальнений принцип суперпозиції, отримуємо сукупність крайових задач лінійної термопружності з постійними наведеними термопружними характеристиками матеріалу. Визначаючи  $k$  – і компоненти рішень системи, а потім, підсумовуючи їх по  $k$ , одержимо наближене аналітичне рішення поставленої задачі. Розробка наближеного аналітичного методу і отримання якісних і кількісних числових результатів для оцінки впливу нелінійностей на розподіл температурних полів і напружень в елементах конструкцій з алюмінієвих і титанових сплавів, дозволяє найбільш повно і адекватно враховувати властивості матеріалу і высокотемпературний теплообмін з навколишнім середовищем. Отримані результати можуть бути використані в розрахунковій практиці теплотехнічних лабораторій для оцінки експериментальних досліджень матеріалів, які піддаються впливу высокотемпературного теплообміну, а також критерієм оцінки відповідних числових рішень. Подальші дослідження будуть спрямовані на порівняння впливу нелінійностей і анізотропії для трансверсально-ізотропного циліндра в широкому діапазоні змін фізико-механічних характеристик матеріалу.

**Ключові слова:** теплопровідність, термопружність, термочутливість, суперпозиція, высокотемпературний теплообмін, перетворення Гудмэна і Кірхгофа, ряди Фур'є.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** Исследование термонапряженного состояния элементов конструкций, подверженных воздействию высокотемпературного теплообмена (терморadiационного, аэродинамического, комбинированного лучисто-конвективного и др.), является одним из важнейших направлений современной науки и имеет большое практическое значение для энергетической, металлургической, авиационной, ракетной, химической, строительной и других отраслей промышленности. В связи с тем, что за последнее время широкое применение находят новые сплавы алюминия и титана, которые применяются для деталей космических и воздушных

летательных аппаратов, паровых и газовых турбин, реактивных и ракетных двигателей, возникает необходимость более точного определения температурных полей и напряжений в элементах конструкций, изготовленных из таких сплавов, и сравнение рассчитываемых характеристик. Распространение на эти усложненные условия методов расчета, разработанных в рамках теории линейных процессов теплопереноса, в большинстве случаев приводит к малодостоверным результатам, так как указанные процессы реально нелинейны. Поскольку при решении таких задач возникают большие градиенты температуры, то в соответствующей математической поста-

новке задач квазистатической термоупругости требуется, как зависимость физико-механических характеристик материала от температуры, так и влияние высокотемпературного теплообмена с окружающей средой [1]. На пути решения этой проблемы большие значения приобретают вопросы оценки влияния нелинейностей в задаче теплопроводности для алюминиевых [2] и титановых сплавов, которые имеют существенные различия физико-механических характеристик, на термонапряженное состояние исследуемых тел. В работе, для более наглядной графической картины оценки такого влияния, в качестве промежуточных числовых расчетов, использовалась низкоуглеродистая сталь.

При решении задач квазистатической термоупругости, различные типы нелинейностей, в соответствующей задаче теплопроводности, учитывались в работах [3–10], однако, среди них незначительная их часть учитывала двойную нелинейность, с последующим численным анализом влияния нелинейностей на распределение температурных полей и напряжений в рассматриваемом теле.

Важность и актуальность решаемой задачи состоит в том, что применение метода [1] и получение качественных и количественных результатов для оценки влияния нелинейностей в задаче теплопроводности на распределение температурных полей и напряжений в элементах конструкций из алюминиевых и титановых сплавов, позволяет наиболее полно и адекватно учитывать свойства материалов и высокотемпературный теплообмен с окружающей средой. Полученные результаты могут быть использованы в расчетной практике теплотехнических лабораторий для оценки экспериментальных исследований материалов, подверженных воздействию высокотемпературного теплообмена, а также критерием оценки соответствующих числовых решений.

Целью работы является применение метода суперпозиции [1], для качественного и количественного сравнения влияния всех типов нелинейностей, в задаче теплопроводности, на распределение температурных полей и напряжений в элементах конструкций из алюминиевых и титановых сплавов, которые имеют существенные различия физико-механических характеристик, что позволит использовать полученные результаты в расчетной практике различных теплотехнических лабораторий.

**МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.** Рассмотрим применение такого подхода на решении задачи термоупругости для свободного от внешней нагрузки бесконечного сплошного изотропного термочувствительного цилиндра радиуса  $R$ , имеющего начальную температуру  $T_0$ , и находящегося в условиях лучисто-конвективного теплообмена со средой постоянной температуры  $T_c$ . Предположим также, что общее нормальное усилие в поперечном сечении цилиндра равно нулю.

Вначале решим соответствующую дважды нелинейную краевую задачу нестационарной теплопроводности, записанную в безразмерном виде:

$$\circ C_v^*(\theta)_{,Fo} = (\lambda^*(\theta)\theta_{,r})_{,r} + \lambda^*(\theta)\theta_{,r}/\rho,$$

$$\theta(\rho, Fo)|_{Fo=0} = 0; \theta_{,r}|_{\rho=0} = 0; \lambda^*(\theta)\theta_{,r}|_{\rho=1} = Q - (G\theta + Sk(\theta^4 + 4\theta^3S + 6\theta^2S^2))|_{\rho=1}, \bullet \quad (1)$$

где  $\vartheta = T - T_0$ ,  $\theta = \vartheta/T_z$ ,  $T_z = T_c - T_0$ ,  $S = T_0/T_z$ ,

$$a = \lambda_0/C_{v0}, \quad Q = Bi + SkP, \quad G = Bi + 4Sk \cdot S^3,$$

$$\sigma_B = \varepsilon\sigma_0, \quad \rho = r/R, \quad P = (T_c^4 - T_0^4)/T_z^4,$$

$$\lambda(T) = \lambda_0\lambda^*(\theta), \quad Bi = \alpha R/\lambda_0, \quad C_v(T) = C_{v0}C_v^*(\theta),$$

$$Sk = \sigma_{\lambda}RT_z^3/\lambda_0, \quad Fo = at/R^2.$$

Вводя в (1) преобразования Гудмэна и Кирхгофа

$$A(\theta) = \int_0^\theta C_v^*(\theta')d\theta', \quad B(\theta) = \int_0^\theta \lambda^*(\theta')d\theta' \quad (2)$$

с помощью дифференциальных соотношений

$$A(\theta)_{,Fo} = C_v^*(\theta)\theta_{,Fo}, \quad B(\theta)_{,r} = \lambda^*(\theta)\theta_{,r},$$

преобразуем (1) к эквивалентному виду:

$$\circ A(\theta)_{,Fo} = B(\theta)_{,r\rho} + \rho^{-1}B(\theta)_{,r}; \theta|_{Fo=0} = 0; \theta_{,r}|_{\rho=0} = 0; \{B(\theta)_{,r} = Q - (G\theta + Sk(\theta^4 + 4\theta^3S + 6\theta^2S^2))\}|_{\rho=1}. \bullet \quad (3)$$

В (3) функции (2) и  $\theta^{(m)}$  ( $m = \overline{1, 4}$ ) представим в виде следующих рядов Фурье по синусам:

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(1)} \sin(k\pi\theta/\theta_p) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}; \quad (4)$$

$$(A(\theta), B(\theta), \theta^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{\beta_k^{(1)}}, \frac{b_k}{\beta_k^{(1)}}, \frac{\beta_k^{(m)}}{\beta_k^{(1)}} \right) \theta^{(k)}, \quad (5)$$

$$\text{где } \theta^{(k)} = \beta_k^{(1)} \sin(k\pi\theta/\theta_p), \quad (a_k, b_k, \beta_k^{(m)}) = \frac{2}{\theta_p} \int_0^{\theta_p} (A(\theta), B(\theta), \theta^{(m)}) \sin(k\pi\theta/\theta_p) d\theta. \quad (6)$$

Подставляя разложения (4), (5) и  $1 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!$  в (3), применяя обобщенный принцип суперпозиции [11], получим совокупность линеаризованных задач теплопроводности относительно  $\theta^{(k)}(\rho, Fo_k)$ :

$$\circ \theta_{,Fo_k}^{(k)} = \theta_{,r\rho}^{(k)} + \rho^{-1}\theta_{,r}^{(k)}; \quad \theta^{(k)}(\rho, Fo_k)|_{Fo_k=0} = 0;$$

$$\theta_{,r}^{(k)}|_{\rho=0} = 0; \{ \theta_{,r}^{(k)} + Bi_k \theta^{(k)} \}|_{\rho=1} = M_k, \quad k = 1, 2, \dots, \bullet \quad (7)$$

где

$$\circ Fo_k = \alpha_k Fo, \quad \alpha_k = b_k/a_k, \quad M_k = Q\beta_k^{(1)}/(e b_k (k-1)!),$$

$$Bi_k = (G \cdot \beta_k^{(1)} + Sk \cdot (\beta_k^{(4)} + 4S\beta_k^{(3)} + 6S\beta_k^{(2)}))/b_k, \bullet \quad (8)$$

Используя преобразование Лапласа, решение системы (7) для любого  $k$  получим в виде [8]

$$\theta^{(k)}(\rho, Fo_k) = (M_k / Bi_k) \cdot \left( 1 - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} J_0(\mu_{ki}\rho) \cdot \exp(-\mu_{ki}^2 Fo_k) \right), \quad (9)$$

где  $A_{ki} = 2Bi_k / ((\mu_{ki}^2 + Bi_k^2) J_0(\mu_{ki}))$ , а  $\mu_{ki}$  – корни следующего характеристического уравнения:

$$\mu_k J_1(\mu_k) - Bi_k J_0(\mu_k) = 0. \quad (10)$$

Суммируя (9) по  $k$ , согласно (4), получим решение краевой задачи теплопроводности  $\theta(\rho, Fo) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (M_k / Bi_k) \left( 1 - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} J_0(\mu_{ki}\rho) \exp(-\mu_{ki}^2 Fo_k) \right), \quad (11)$$

в котором  $\theta_p$  определим из уравнения, полученного из (11) при  $F_{0k} \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\theta_p = \sum_{k=1}^{\infty} (M_k / Bi_k). \quad (12)$$

Определяя  $\theta_p$  из уравнения (12), а по нему коэффициенты рядов Фурье (6),  $M_k$  и  $Bi_k$  из (8), решение (11) будет полностью определено.

Используя (11) определим термонапряженное состояние цилиндра из решения системы уравнений [8, 9], записанной в безразмерной форме:

$$\circ \bar{\sigma}_{rr,\rho} + \rho^{-1} \cdot (\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}) = 0; \quad \bar{\varepsilon}_{rr} = \bar{u}_{,\rho}; \quad \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \rho^{-1} \cdot \bar{u};$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr} = (1/E^*(\theta)) [\bar{\sigma}_{rr} - \nu(\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} + \bar{\sigma}_{zz})] + F^*(\theta);$$

$$\bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = (1/E^*(\theta)) [\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} - \nu(\bar{\sigma}_{rr} + \bar{\sigma}_{zz})] + F^*(\theta);$$

$$\bar{C}_0 = (1/E^*(\theta)) [\bar{\sigma}_{zz} - \nu(\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} + \bar{\sigma}_{rr})] + F^*(\theta);$$

$$\bar{\sigma}_{rr}|_{\rho=1} = 0; \quad \int_0^1 \rho \bar{\sigma}_{zz} d\rho = 0, \bullet \quad (13)$$

$$\text{где } \bar{u} = (\alpha_{i0} T_z R)^{-1} u, \quad \bar{\varepsilon}_{zz} = \bar{C}_0, \quad E(T) = E_0 E^*(\theta),$$

$$F(T) = \alpha_{i0} T_z F^*(\theta), \quad \alpha(T) = \alpha_{i0} \alpha_i^*(\theta),$$

$$F^*(\theta) = \int_0^{\theta} \alpha_i^*(\theta') d\theta',$$

$$(\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}) = (E_0 \alpha_{i0} T_z)^{-1} (\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}),$$

$$(\bar{\varepsilon}_{rr}, \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \bar{C}_0) = (\alpha_{i0} T_z)^{-1} (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, C_0).$$

Разлагая единицу и функции  $1/E^*(\theta)$  в ряд Фурье-Бесселя, а  $F^*(\theta)$  в ряд Фурье на интервале  $(0, \theta_p)$

$$\circ 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(0)} J_0\left(\frac{v_k \theta}{\theta_p}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k, \quad V_k = \alpha_k^{(0)} J_0\left(\frac{v_k \theta}{\theta_p}\right),$$

$$1/E^*(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k, \quad F^*(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)}, \bullet \quad (14)$$

где

$$(\alpha_k^{(0)}, g_k) = 2\theta_p^{-2} J_1^{-2}(v_k) \int_0^{\theta_p} \theta (1/E^*(\theta)) J_0\left(\frac{v_k \theta}{\theta_p}\right) d\theta,$$

$$f_k = (2/\theta_p) \int_0^{\theta_p} F^*(\theta) \sin(k\pi\theta/\theta_p) d\theta$$

и подставляя (14) в (13), преобразуем ее к виду:

$$\circ \left( \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,\rho} + \rho^{-1} \cdot \left( \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right) = 0;$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \left( \bar{u} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,\rho}; \quad \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \rho^{-1} \cdot \bar{u} \sum_{k=1}^{\infty} V_k;$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k - \nu \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k -$$

$$- \nu \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)};$$

$$\bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k - \nu \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k -$$

$$- \nu \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)};$$

$$\bar{C}_0 \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k - \nu \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k -$$

$$- \nu \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)};$$

$$\bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \Big|_{\rho=1} = 0; \quad \int_0^1 \rho \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} V_k d\rho = 0, \bullet \quad (15)$$

Вводя в системе (15) не зависящие от  $k$  компоненты напряжений, деформаций и перемещений под знаки сумм, используя обозначения

$$(\bar{\sigma}_{rr}^{(k)}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)}, \bar{\sigma}_{zz}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)}, \bar{C}_0^{(k)}, \bar{u}^{(k)}) =$$

$$= (\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\varepsilon}_{rr}, \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \bar{C}_0, \bar{u}) V_k,$$

$$E_k = \alpha_k^{(0)} / g_k, \quad \alpha_{ik} = f_k / \beta_k^{(1)}$$

и применяя обобщенный принцип суперпозиции, получим совокупность краевых задач термоупругости с постоянными характеристиками  $E^{(k)}$ ,  $\alpha_{ik}$ :

$$\circ \bar{\sigma}_{rr,\rho}^{(k)} + \rho^{-1} (\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)}) = 0; \quad \bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)} = \bar{u}_{,\rho}^{(k)}; \quad \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} = \rho^{-1} \bar{u}^{(k)};$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)} = (1/E_k) [\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} - \nu(\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} + \bar{\sigma}_{zz}^{(k)})] + \alpha_{ik} \theta^{(k)};$$

$$\bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} = (1/E_k) [\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} - \nu(\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} + \bar{\sigma}_{zz}^{(k)})] + \alpha_{ik} \theta^{(k)};$$

$$\bar{C}_0^{(k)} = (1/E_k) [\bar{\sigma}_{zz}^{(k)} - \nu(\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} + \bar{\sigma}_{rr}^{(k)})] + \alpha_{ik} \theta^{(k)};$$

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(k)}|_{\rho=1} = 0; \quad \int_0^1 \rho \bar{\sigma}_{zz}^{(k)} d\rho = 0, \bullet \quad (16)$$

Решение системы (16), полученное в [8, 9, 10], после суммирования по  $k$ , дает окончательно аналитическое решение поставленной задачи:

$$\circ \bar{u} = \rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{Bi_k} \alpha_{ik} \left\{ 1 - \frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \left[ \frac{J_1(\mu_{ki}\rho)}{\mu_{ki}\rho} + \frac{1-3\nu}{1+\nu} \frac{J_1(\mu_{ki})}{\mu_{ki}} \right] \exp(-\mu_{ki}^2 Fo_k) \right\};$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{Bi_k} \frac{f_k \alpha_k^{(0)}}{g_k \beta_k^{(1)}} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \left[ \frac{J_1(\mu_{ki}\rho)}{\mu_{ki}\rho} - \frac{J_1(\mu_{ki})}{\mu_{ki}} \right] e^{-\mu_{ki}^2 Fo_k};$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{Bi_k} \frac{f_k \alpha_k^{(0)}}{g_k \beta_k^{(1)}} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \left[ J_0(\mu_{ki}\rho) - \frac{2J_1(\mu_{ki})}{\mu_{ki}} \right] e^{-\mu_{ki}^2 Fo_k};$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{Bi_k} \frac{f_k \alpha_k^{(0)}}{g_k \beta_k^{(1)}} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \left[ J_0(\mu_{ki}\rho) - \frac{J_1(\mu_{ki}\rho)}{\mu_{ki}\rho} - \frac{J_1(\mu_{ki})}{\mu_{ki}} \right] \exp(-\mu_{ki}^2 Fo_k); \bullet \quad (17)$$

где в (17) выражение  $(1-\nu)$  отнесено к  $\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}$ . Частный случай (17), без учета термочувствительности материала и лучистого теплообмена с окружающей средой, совпадает с точным решением.

Числовые расчеты в системе СИ по определению  $\theta, \bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}$ , проделаны для решений (11) и (17) в среде MATLAB [12], для изотропных цилиндров, изготовленных из титанового сплава (на графике обозначается А), низкоуглеродистой стали (обозна-

чается В) и алюминиевого сплава (обозначается С), при следующих аппроксимациях физико-механических характеристик материалов от температуры и значений входных числовых параметров:

$$\lambda(T) = \lambda_0 + \delta_\lambda T = \lambda'_0(1 + \varepsilon_\lambda \theta); \quad \lambda'_0 = \lambda_0 + \delta_\lambda T_0;$$

$$\varepsilon_\lambda = \delta_\lambda T_z / \lambda'_0,$$

$$C_v(T) = C_{v0} + \delta_c T_0 = C'_{v0}(1 + \varepsilon_c \theta); \quad C'_{v0} = C_{v0} + \delta_c T_0;$$

$$\varepsilon_c = \delta_c T_z / C'_{v0},$$

$$E(T) = E_0 + \delta_E T = E'_0(1 + \varepsilon_E \theta); \quad E'_0 = E_0 + \delta_E T_0;$$

$$\varepsilon_E = \delta_E T_z / E'_0,$$

$$\alpha_t(T) = \alpha_{t0} + \delta_\alpha T = \alpha'_{t0}(1 + \varepsilon_\alpha \theta); \quad \alpha'_{t0} = \alpha_0 + \delta_\alpha T_0;$$

$$\varepsilon_\alpha = \delta_\alpha T_z / \alpha'_{t0},$$

A.  $\lambda_0 = 6,52; \quad \delta_\lambda = 0,0172; \quad C_{v0} = 2079936;$

$\delta_c = 1080; \quad E_0 = 11,7 \cdot 10^{10}; \quad \delta_E = -64,47 \cdot 10^6$

$\alpha_{t0} = 8,026 \cdot 10^{-6}; \quad \delta_t = 0,0087 \cdot 10^{-6}; \quad \varepsilon = 0,19,$

B.  $\lambda_0 = 50,24; \quad \delta_\lambda = 0,029; \quad C_{v0} = 3392840;$

$\delta_c = 3883; \quad E_0 = 20,4 \cdot 10^{10}; \quad \delta_E = -112,19 \cdot 10^6;$

$\alpha_{t0} = 1,2 \cdot 10^{-5}; \quad \delta_t = 0,1 \cdot 10^{-7}; \quad \varepsilon = 0,8,$

C.  $\lambda_0 = 143; \quad \delta_\lambda = 0,0625; \quad C_{v0} = 2263250;$

$\delta_c = 2082; \quad E_0 = 6,152 \cdot 10^{10}; \quad \delta_E = -26,04 \cdot 10^6;$

$\alpha_{t0} = 21,86 \cdot 10^{-6}; \quad \delta_t = 0,0071 \cdot 10^{-6}; \quad \varepsilon = 0,057,$

$R = 0,3, \quad \alpha = 30; 50; 150, \quad T_c = 520; 820; 1420.$

На графиках введены такие обозначения для параметров и линий:  $\theta \div TET$ ;  $\alpha \div AF$ ;  $\rho \div Ro$ ;  $\bar{\sigma}_{rr} \div SRR$ ;  $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \div SFF$ ;  $\bar{\sigma}_{zz} \div SZZ$ ; 1 – пунктирная линия обозначает линейное решение; 2 – штрихпунктирная, – нелинейность 1-го рода; 3 – сплошная, – решение с двойной нелинейностью в задаче теплопроводности и соответствующих значениях напряжений. Влияние нелинейностей анализируются на графиках по направлению снизу вверх.

На рис. 1 показаны распределения температурных полей в цилиндре на его поверхности и в центре, когда конвективный теплообмен превалирует над лучистым. Так как коэффициент теплопроводности алюминиевого сплава С имеет большое значение, то критерий Старка почти не оказывает влияния на нагрев цилиндра, поэтому линии 2 и 3 совпадают. При уменьшении коэффициента теплопроводности наблюдается вначале незначительное влияние нелинейности 1-го рода и двойной нелинейности на распределение температурного поля (сплав В). Дальнейшее уменьшение  $\lambda$  приводит к качественному изменению расположения графиков, с (2-3-1) на (1-2-3), причем, линии 2 и 3 совпадают. На рис. 1 также видно, что с уменьшением коэффициента теплопроводности, при увеличении критерия

Фурье, графики для всех случаев расчета сближаются, а для титанового сплава А, совпадают.

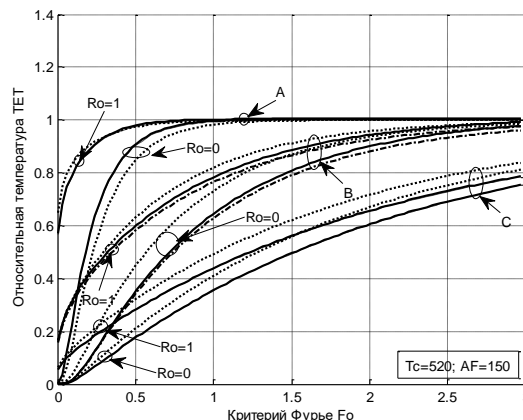


Рисунок 1 – Зависимость  $\theta$  от критерия  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 520, \alpha = 150$

Поскольку, начиная с  $T_c = 800^\circ C$ , теплообмен излучением является основным способом передачи тепла (около 85–95% тепла в печах передается на поверхность нагреваемых предметов излучением и лишь 5–15% конвекцией), то на рисунке 2 приведены расчеты для случая теплообмена  $T_c = 820, \alpha = 50$ .

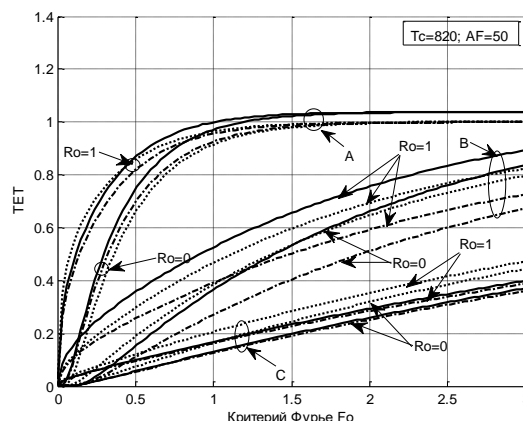


Рисунок 2 – Зависимость  $\theta$  от критерия  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 820, \alpha = 50$

На рисунке 2 лучистый теплообмен уже превалирует над конвективным и в этом случае для сплава С, графики с нелинейностями 1-го рода и двойной нелинейностью уже не совпадают, так как критерий Старка ( $Sk = 0,0034$ ) уже оказывает влияние на процесс теплообмена. При уменьшении коэффициента теплопроводности и переходе к сплаву В, картина распределения графиков качественно меняется как на поверхности (2–1–3), так и в центре цилиндра (2–3–1). Дальнейшее уменьшение коэффициента теплопроводности и переход к сплаву А вызывает снова качественный переход в расположении графиков с (1–2–3) для центра на (2–1–3) для поверхности цилиндра, начиная с  $Fo = 0,5$ . При увеличении критерия Фурье, для этого сплава, на

чиная с  $Fo = 1,7$ , линии 3 совпадают на поверхности и в центре пластины.

На рисунке 3 показаны распределения температур в цилиндре, когда лучистый теплообмен значительно превалирует над конвективным теплообменом. В этом случае, для сплава С, качественного изменения распределения графиков не происходит (2-3-1), как на поверхности, так и в центре цилиндра. Для сплава В, качественный переход распределения графиков с (3-2-1) на (2-1-3) происходит только до критерия Фурье  $Fo = 0,3$ , а затем сохраняется (2-1-3) как на поверхности, так и в центре цилиндра. При дальнейшем уменьшении коэффициента теплопроводности до сплава А, расхождения между графиками уменьшается, причем качественный переход происходит в центре цилиндра с (1-2-3) на (2-1-3), начиная с критерия Фурье  $Fo = 0,5$ . Для этого сплава, при увеличении критерия Фурье происходит сближение, а затем и совпадения графиков линейного решения и нелинейности первого рода как на поверхности, так и в центре цилиндра. Такая же картина наблюдается и для случая двойной нелинейности.

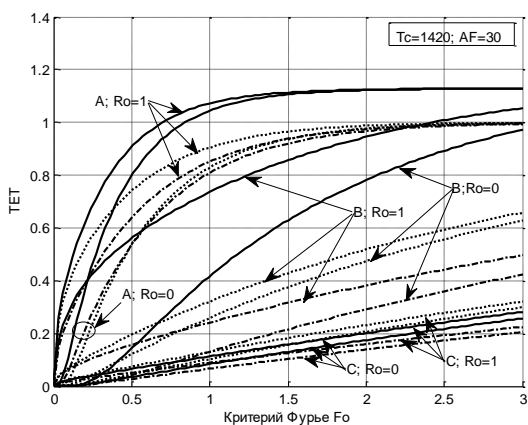


Рисунок 3 – Зависимость  $\theta$  от критерия  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 1420$ ,  $\alpha = 30$

Как известно, в центре цилиндра радиальные и окружные напряжения равны. Для этого случая, на рисунках 4, 5 и 6 показаны растягивающие напряжения при различных сочетаниях коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды.

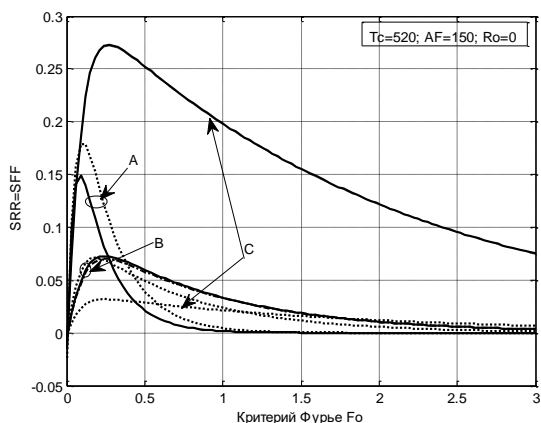


Рисунок 4 – Зависимость  $\bar{\sigma}_{rr}$  и  $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$  ( $\rho = 0$ ) от  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 520$ ,  $\alpha = 150$

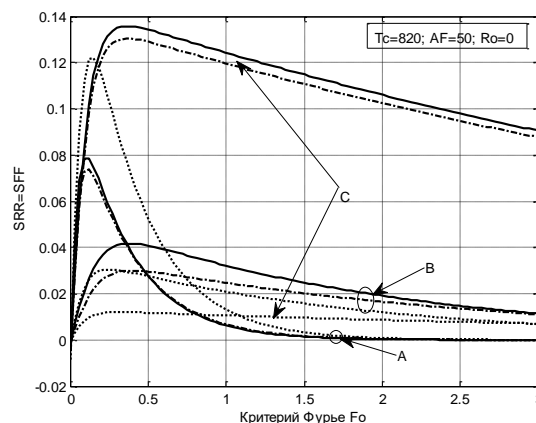


Рисунок 5 – Зависимость  $\bar{\sigma}_{rr}$  и  $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$  ( $\rho = 0$ ) от  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 820$ ,  $\alpha = 50$

Для сплава В распределение графиков (1-2-3) начинается с  $Fo = 0,18$  (график 4), с  $Fo = 0,35$  (график 5), с  $Fo = 1,1$  (график 6). При возрастании  $Fo$ , графики 1, 2 и 3 сближаются. Для сплава А распределение графиков будет (2-3-1) для всех  $Fo$ . При увеличении  $Fo$ , графики 1, 2 и 3 совпадают. Для сплава С расположение графиков во всем диапазоне критерия Фурье будет (1-2-3).

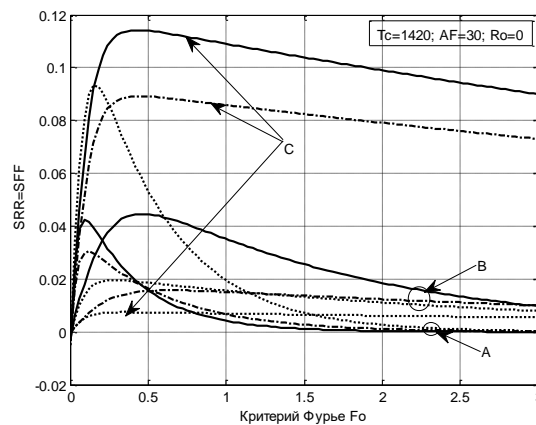


Рисунок 6 – Зависимость  $\bar{\sigma}_{rr}$  и  $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$  ( $\rho = 0$ ) от  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 1420$ ,  $\alpha = 30$

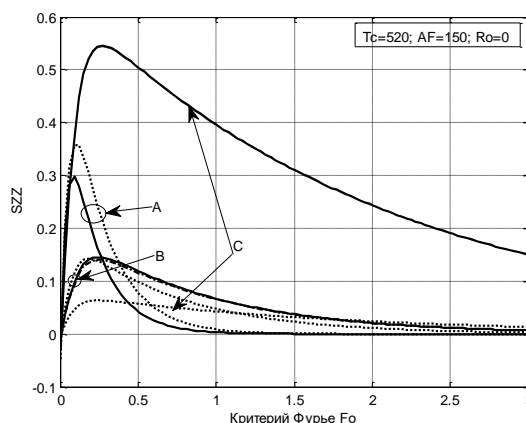


Рисунок 7 – Зависимость  $\bar{\sigma}_{zz}$  ( $\rho = 0$ ) от  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 520$ ,  $\alpha = 150$

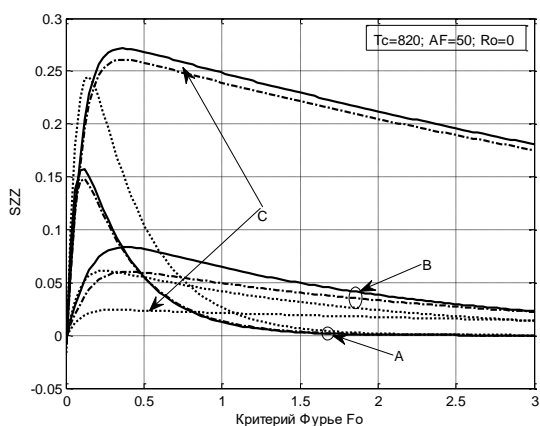


Рисунок 8 – Зависимость  $\bar{\sigma}_{zz}$  ( $\rho = 0$ ) от  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 820$ ,  $\alpha = 50$

Поскольку осевое напряжение равно сумме радиального и окружного напряжений, то картина распределения графиков 7, 8 и 9 в центре цилиндра, по сравнению с графиками 4, 5 и 6 не изменяется. Только величины этих напряжений будут в два раза больше соответствующих напряжений графиков 4, 5 и 6.

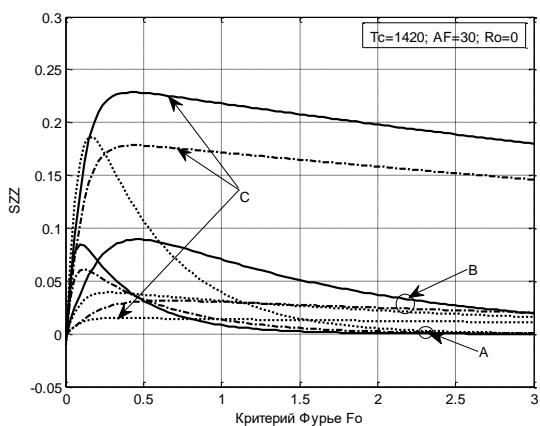


Рисунок 9 – Зависимость  $\bar{\sigma}_{zz}$  ( $\rho = 0$ ) от  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 1420$ ,  $\alpha = 30$

Как известно, на поверхности цилиндра радиальное напряжение равно нулю, а сжимающие окружные и осевые напряжения совпадают. Для этого случая, на рисунках 10, 11 и 12 показаны распределения окружных и осевых напряжений при рассмотренных ранее сочетаниях коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды. Влияние нелинейностей будем анализировать на графиках по направлению сверху вниз от нулевой оси. Для сплава В распределение графиков (1 – 2 – 3) начинается с  $Fo = 0,05$  (график 10), с  $Fo = 0,23$  (график 11), с  $Fo = 1,4$  (график 12). При возрастании  $Fo$ , графики 1, 2 и 3 сближаются. Для сплава А распределение графиков качественно изменяется на (2 – 3 – 1) во всем рассматриваемом диапазоне  $Fo$ . При увеличе-

нии критерия Фурье, графики 1, 2 и 3 совпадают. Для сплава С наблюдается также существенный разброс графиков, причем расположение их во всем диапазоне критерия Фурье будет (1 – 2 – 3).

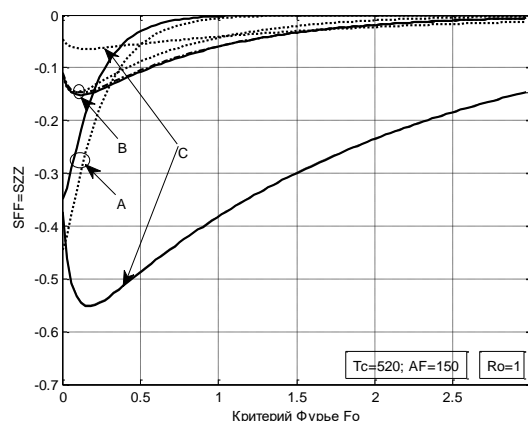


Рисунок 10 – Зависимость  $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$  и  $\bar{\sigma}_{zz}$  ( $\rho = 1$ ) от  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 520$ ,  $\alpha = 150$

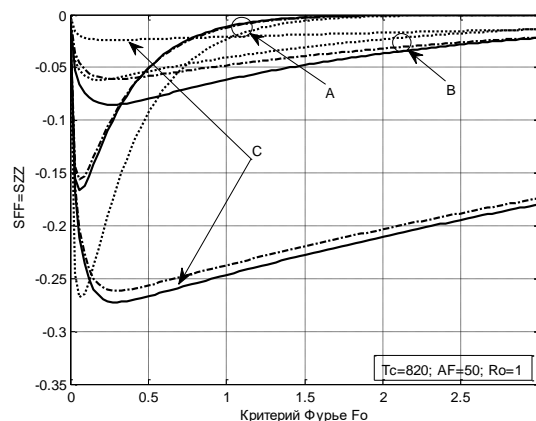


Рисунок 11 – Зависимость  $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$  и  $\bar{\sigma}_{zz}$  ( $\rho = 1$ ) от  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 820$ ,  $\alpha = 50$

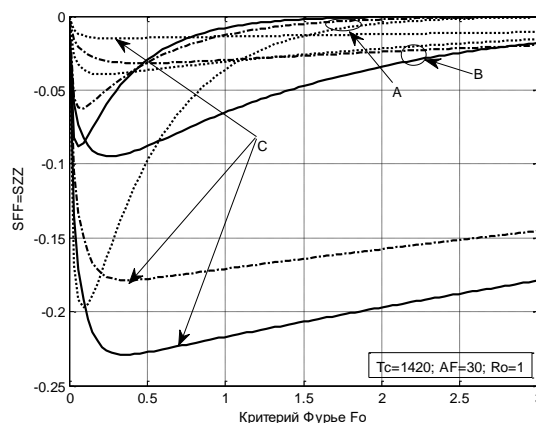


Рисунок 12 – Зависимость  $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$  и  $\bar{\sigma}_{zz}$  ( $\rho = 1$ ) от  $Fo$  при фиксированных значениях  $T_c = 1420$ ,  $\alpha = 30$

**ВЫВОДЫ.** 1. При нагревании цилиндра, когда конвективный теплообмен превалирует над лучистым, коэффициент теплопроводности алюминиево-

го сплава имеет большое значение и критерий Старка почти не оказывает влияния на нагрев цилиндра. При уменьшении коэффициент теплопроводности до титанового сплава А, происходит качественное изменение расположения графиков температурных полей и напряжений, так как критерий Старка уже имеет существенное значение, которое значительно влияет на процесс теплообмена.

2. При уменьшении коэффициента теплопроводности и переходе к низкоуглеродистой стали, картина распределения графиков качественно меняется как на поверхности, так и в центре цилиндра (2 – 3 – 1). Дальнейшее уменьшение коэффициента теплопроводности и переходе к титановому сплаву, вызывает снова качественный переход в расположении графиков на (1 – 2 – 3). При увеличении критерия Фурье происходит сближение, а затем и совпадение графиков линейного решения и нелинейности первого рода как на поверхности, так и центре цилиндра. Такая же картина наблюдается и для случая двойной нелинейности.

3. Для сжимающих напряжений поверхности цилиндра в сплаве В распределение графиков (1 – 2 – 3) начинается с  $Fo = 0,05$  (график 10), с  $Fo = 0,23$  (график 11), с  $Fo = 1,4$  (график 12). При возрастании  $Fo$ , графики 1, 2 и 3 сближаются. Для сплава А распределение графиков качественно изменяется на (2 – 3 – 1) во всем рассматриваемом диапазоне  $Fo$ . При увеличении критерия Фурье, графики 1, 2 и 3 совпадают. Для сплава С имеет место существенный разброс графиков, причем расположение их во всем диапазоне критерия Фурье будет (1 – 2 – 3).

Дальнейшие исследования будут направлены на сравнения влияния нелинейностей и анизотропии для трансверсально-изотропного цилиндра в широком диапазоне изменения коэффициента теплопроводности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев Е. П. Суперпозиция основных уравнений квазистатической термоупругости анизотропных термочувствительных тел. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2017. Вип. 1 (102) С. 22–31.

2. Белецкий В. М. Алюминиевые сплавы: Справочник / под ред. И. И. Фридлянда. К.: Коминтех, 2005. 365 с.

3. Зайцев Е. П. Влияние термочувствительности и зонального высокотемпературного теплообмена на температурное поле бесконечного цилиндра. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2016. Вип. 3 (98), част. 1. С. 33–40.

4. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: Термопружність термочувствительних тіл. Львів: СПОЛОМ, 2009. 409 с.

5. Термопружний стан безмежного кругового термочувствительного цилиндра за умови конвективно – променевого теплообміну з довкіллям. В. Попович, Г. Гарматій, Р. Кушнір. *Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки*. 2008. Вип. 1. С. 113–120.

6. Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б., Немировський Ю. В. Моделювання і дослідження термомеханічної поведінки термочувствительних тіл за врахування впливу теплового випромінювання. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2013. Вип. 56, № 2. С. 212–224.

7. Аналитические решения квазистатических задач термоупругости с переменными физическими свойствами среды. В. А. Кудинов, А. Э. Кузнецова, А. В. Еремін. *Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2014. № 2(35). С. 130–135.

8. Карташов Э. М., Кудинов В. А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: «Либроком», 2012. 656 с.

9. Noda, N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties. In: *Thermal Stresses I*. Amsterdam: Elsevier, 1986. P. 391–483.

10. Noda N., Hetnarski R. B., Tanigawa Y. (2003), *Thermal Stresses*, 2<sup>nd</sup> edition. Taylor and Francis, New York.

11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Изд. МГУ, 1999. 799 с.

12. MATLAB 7: программирование, численные методы. Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М. М. Шульц. СПб.: БХВ. Петербург, 2005. 752 с.

### COMPARISON OF INFLUENCE OF THERMOSENSITIVITY AND HIGH-TEMPERATURE HEAT EXCHANGE ON THERMOELASTICITY OF THE CYLINDER FROM ALLOYS OF ALUMINIUM, TITANIUM AND STEEL

Y. Zaytsev

Flight Academy of National Aviation University

vul. Dobrovolskogo, 1, Kropyvnytsky, 25005, Ukraine. E-mail: zaytsev.ep.klanau@gmail.com

**Purpose.** At the present stage of development of technology, new invented alloys of aluminum and titanium are used for the structure of spaceship and aircraft, steam and gas turbines, jet and rocket engines. A research objective is the application of a new approach to the thermoelasticity problems solution, for impact assessment of nonlinearities of the first sort and double nonlinearity on distribution of temperature fields and voltage in the aluminum and titanium alloys which have essential distinctions of coefficients of heat conductivity. **Methodology.** The developed new approach to the solution of nonlinear non-stationary heat conductivity of anisotropic thermosensitive bodies is applied to superposition of the corresponding problem of quasistatic thermoelasticity. To accomplish this purpose, we decompose the stress-related characteristics depending on temperature and unit in the 1<sup>st</sup> Fourier-Bessel series on the received interval of change of relative temperature, we introduce them in each equation system by applying the generalized superposition principle; then, we will receive the set of boundary value problems of linear thermoelasticity with the constant given thermoelastic characteristics of material. Defining  $k - e$  components of solutions of a system, and then, summing them up according to  $k$ , we will receive approximate analytical solution of an objective. **Findings.** The solution prob-

lems method of nonlinear heat conductivity and quasistatic thermoelasticity is developed and approved. **Originality.** The development of an approximate analytical method and receiving qualitative and quantitative numerical results for impact assessment of nonlinearities on distribution of the temperature fields in structural elements made from aluminum and titanium alloys, allows considering the properties of the material and high-temperature heat exchange with the environment. **Practical value.** The received results can be used in estimated practice of heat-technical laboratories for the assessment of the experimental material studies while being subjected to the impact of high-temperature heat exchange, and they may also serve as a criterion for the evaluation of the appropriate numerical solutions. **Conclusions.** Further researches will be directed to comparisons of influence of nonlinearities and anisotropy for a transversal and isotropic cylinder with a broad range of change of coefficient of heat conductivity.

**Key words:** heat conductivity, superimposition, thermal sensitivity, radiant-convective heat exchange, Goodman's and Kirchhoff's transformations, Fourier series.

## REFERENCES

1. Zaytsev, Y. P. (2017), "Superposition of the basic equations of quasi-static thermoelasticity of anisotropic thermosensitive bodies", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskiy National University*, iss. 1 (102), pp. 22 – 31.
2. Beletsky, V. M. (2005), *Aluminum alloys: Reference*. K.: Comintech, 365 p.
3. Zaytsev, Y. P. (2016), "Influence of the double nonlinearity on the infinite cylinder temperature field at zonal high-temperature heat exchange", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskiy National University*, iss 3 (98), part 1, pp. 33 – 40.
4. Kushnir, R. M., Popovych, V. S. (2009), *Modelyuvannya ta optymizatsiya v termomehanitsi elektroprovodnyh neodnorodnyh til. Termoprujnits termoshytluvuh til* [Modelling and optimization in thermomechanics of electrically conductive heterogeneous bodies. Thermoelasticity of temperature-dependent bodies], Lviv, Ukraine.
5. Terletsky, R. F., Bruhal, M. B., Nemirovsky, Y. V. (2013), "Simulation and research of thermomechanical behavior of thermosensitive bodies in terms of influence of thermal radiation", *Mathematical methods and physico-mechanical fields*, Iss. 2(56), pp. 212-224.
6. Popovych, V., Harmatiy, H., Kushnir, R. (2008), "Thermoelastic state of infinite thermosensitive circular cylinder conditioned upon the convective-radial heat exchange with surrounding air", *Bulletin of Donetsk university. Natural sciences*, Iss. 1, pp. 113-120.
7. Kudinov, V., Kuznetsova, A., Eremin, A. (2014), "Analytical decisions of quasistatic tasks of thermoelasticity with variable physical properties of the environment", *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, iss. 2(35), pp. 130–135.
8. Kartashov, E. M. (2012), *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in solid bodies thermal conduction theory], Higher school, Moscow, Russia.
9. Noda, N. (1986), "Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties", *In: Thermal Stresses I. – Amsterdam: Elsevier*, pp. 391 – 483.
10. Noda, N., Hetnarski, R. B., Tanigawa, Y. (2003), *Thermal Stresses*, 2<sup>nd</sup> edition. Taylor and Francis, New York.
11. Tikhonov, A. N., Samarskiy, A. A. (1999), *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics], Publ. house MGU, Moscow, Russia.
12. Ketkov, Y. L., Ketkov, A. Y., Shults, M. M. (2005), *MATLAB 7: programmirovaniye, chislennyye metody* [MATLAB 7: programming, numerical methods], Science, Sankt-Petersburg, Russia.

Стаття надійшла 30.04.2019.