

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЗАЛЕЖНОСТІ КОЕФІЦІЄНТА ФІЛЬТРАЦІЇ ТОНКОГО ГЛИНИСТОГО ВКЛЮЧЕННЯ ВІД КОНЦЕНТРАЦІЇ ХІМІЧНИХ РЕЧОВИН НА ВЕЛИЧИНУ СТРИБКА НАПОРІВ

Ю. В. Чуй, П. М. Мартинюк

Національний університет водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, Україна. E-mail: yurachuy@gmail.com

Вдосконалено та чисельно досліджено математична модель процесів фільтраційної консолідації ґрунтів, встановлено ступінь залежності стрибка надлишкових напорів від коефіцієнта фільтрації включення, який в свою чергу залежить від концентрації солей порового розчину. Раніше розглядалися неоднорідні шари ґрунту, тонкі напівпроникні включення яких не залежали від концентрації сольових розчинів порової рідини. Для розв'язання задачі використовувалася метод скінчених елементів, для дискретизації в часі використано схему Кранка-Ніколсона. Задача розглядалася в одновимірному випадку. Встановлено, що відносна зміна стрибка напорів лежить в межах від -4% (стрибок зменшується) до +76% (стрибок напорів збільшується) у випадку урахування залежності коефіцієнта фільтрації включення від концентрації хімічних речовин та модифікованої умови спряження. Дані, отримані в результаті дослідження можуть бути використані при проектуванні та будівництві різного роду гідротехнічних споруд, в основі фундаменту яких лежать неоднорідні шари ґрунту. Отримані результати підтверджують необхідність врахування хімічного складу порової рідини при розгляді параметрів тонких напівпроникних включень.

Ключові слова: напівпроникне включення, метод скінчених елементів, фільтраційна консолідація, умови спряження.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ ТОНКОГО ГЛИНИСТОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ОТ КОНЦЕНТРАЦИИ ХИМИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ НА ВЕЛИЧИНУ СКАЧКА НАПОРОВ

Ю. В. Чуй, П. М. Мартынюк

Национальный университет водного хозяйства и природопользования
ул. Соборная, 20, г. Ровно, 33000, Украина. E-mail: yurachuy@gmail.com

Усовершенствована и численно исследована математическая модель процессов фильтрационной консолидации ґрунтов, установлена степень зависимости скачка избыточных напорів от коэффициента фильтрации включения, который в свою очередь зависит от концентрации солей порового раствора. Ранее рассматривались неоднородные слои почвы, тонкие полупроницаемые включения которых не зависели от концентрации солевых растворов поровой жидкости. Для решения задачи использовался метод конечных элементов, для дискретизации во времени использована схема Кранка-Николсона. Задача рассматривалась в одномерном случае. Установлено, что относительное изменение скачка напорів лежит в пределах от -4% (прыжок уменьшается) до +76% (прыжок напорів увеличивается) в случае взятия во внимание зависимости коэффициента фильтрации включения от концентрации химических веществ и модифицированной условия сопряжения. Данные, полученные в результате исследования могут быть использованы при проектировании и строительстве различного рода гидротехнических сооружений, в основе фундамента которых лежат неоднородные слои почвы. Полученные результаты подтверждают необходимость учета химического состава поровой жидкости при рассмотрении параметров тонких полупроницаемых включений.

Ключевые слова: полупроницаемое включение, метод конечных элементов, фильтрационная консолидация, условия сопряжения.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Тонкі глинисті включення часто використовуються при будівництві сховищ промислових та побутових відходів. Основна їх (включень) функція – обмеження поширення забруднюючих речовин у підземні та поверхневі води. Промислові відходи як правило пов'язані з безпекою поширення забруднень неорганічного походження. Побутові відходи мають особливість в тому, що містять як неорганічні, так і органічні забруднювачі підземних вод. При наявності сховищ радіоактивних відходів актуальним є дослідження властивостей глинистих включень в ненасичених неізотермічних умовах. Також глинисті включення зустрічаються і в природних геологічних формаціях.

Збільшення об'єму полігонів відходів та їх потужності призводить до додаткового тиску на ґрунтові основи. Звідси – до консолідації (ущільнення) як ґрунтових основ, так і наявних глинистих включень. Тобто, є актуальною задача дослідження взаємопов'язаних консолідаційних процесів та поширення забруднюючих речовин при наявності тонких включень.

В роботі [1] досліджено явище ультрафільтрації (зворотного осмосу) в природних пористих середовищах, яке пов'язане з напівпроникними властивостями глин. Як відмічають автори, хоча вказане явище для глин було встановлене ще на початку 20-го століття, воно залишається до кінця не вивченим. Особливо це стосується природних геологічних формувань та потоків підземних вод.

В роботі [2] побудовано нову математичну модель перенесення іонів та води через пористі середовища. Враховано взаємовпливи руху іонів, зворотного осмосу та дифузії солей. Випадок зворотного осмосу і коефіцієнт дифузії детально проаналізовані для випадку насиченого та частково насиченого пористого середовища. Проведені порівняння з відомими експериментальними даними для бентонітів.

В [3] побудована та досліджена одновимірна математична модель поширення забруднюючих речовин в системі шаруватого пористого середовища з урахуванням взаємозв'язаних ефектів консолідації, дифузії та деградації. Враховано властивості напівпроникності

для тонких глинистих включень. Відмічено, що ущільнені глини використовуються як геомембрани і обов'язково входять як конструктивні елементи для основ сміттєзвалищ твердих відходів. Стандартно така геомембрана (стосовно будівництва сміттєзвалищ в Китаї) складається із 2-х міліметрової геотекстильної мембрани та 75-ти сантиметрової шару ущільненої глини з напівпроникними властивостями.

В роботі [4] відмічено, що в якості матеріалу для геомембран часто використовуються бентоніти. Проте хімікати можуть негативно впливати на продуктивність бентоніту. Тому в роботі запропоновані модифіковані бентоніти для поліпшення хімічної стійкості. Дослідження в [4] зосереджені на дифузії хлориду калію (KCl) через бентонітно-полімерний композит, який поводить себе як напівпроникна мембрана. Аналогічні дослідження наведені в [5]. Зокрема висвітлено результати авторського дослідження про вплив трьох неорганічних солей NaCl, CaCl₂ та MgCl₂ на деякі геотехнічні властивості природної глини у нижньому бар'єрі на полігоні-сховищі відходів. Також досліджено ефект від вмісту бентоніту (шляхом додавання цього спеціального глинистого мінералу в кількості 10 і 20 відсотків) на ці властивості. З цієї метою проведені лабораторні випробування, які показали, що всі ці солі можуть суттєво вплинути на геотехнічні властивості сумішей.

В роботі [6] відмічено, що важливим етапом при будівництві полігону для відходів є його проектування таким чином, щоб антиградієнт напорів підземних вод був спрямований всередину полігону. Тоді основним джерелом поширення забруднень в підземні води є лише їх дифузія. Для мінімізації дифузійного ефекту полігон огорожують геомембранами зі штучних (геотекстиль) та природних (глини) матеріалів, які мають напівпроникні властивості. Однак, як відмічають автори статті, в процесі експлуатації сховища відходів та вилуговування природних напівпроникних пористих матеріалів фільтраційний та дифузійний потоки можуть змінити напрямок та величину. Це призведе до інтенсивного забруднення підземних вод. Теоретичному дослідженню вказаних ефектів і присвячено роботу [6].

У статті [7] висвітлено результати проведених серії мембранних/дифузійних випробувань на зразках композитів геосинтетика-глина з урахуванням впливу розчинів KCl. Визначено коефіцієнти ефективності мембран та коефіцієнти дифузії солей. Подібні дослідження наведені і в роботі [8]. Основна їх мета – визначення концентрації KCl при яких бентонітові геосинтетичні глинисті включення втрачають властивості напівпроникних мембран.

У статті [9] наведено дослідження впливу консолідації на поширення забруднюючих речовин через глину та складні шаруваті системи, що включають геомембрани. В чисельному моделюванні розглянуто взаємопов'язані консолідацію ґрунтів та транспортування забруднюючих речовин. Результати моделювання показали, що, залежно від умов, консолідація може мати важливий вплив на поширення забруднень і такий вплив може зберігатися довго після завершення процесу ущільнення. Загалом, ефект впливу консолідації збільшується зі збільшенням товщини, збільшенням величини прикладеного навантаження, зменшенням часу завантаження.

В статті [10] відмічено, що переважна більшість досліджень, проведених на сьогоднішній день для напівпроникних глин стосуються в основному повного насичення. Проте, деякі глинисті бар'єри насправді експлуатуються у ненасичених умовах. Як приклад – бентонітові буфери у глибоких геологічних формаціях для утилізації високоактивних радіоактивних відходів. Дослідження, які висвітлені в [10], проведені для визначення ступеня та характеру поведінки На-бентоніту в ненасичених умовах. В роботі [11] наведено математичну модель, яку можна використати для дослідження вологоперенесення в умовах змінної пористості та хімічної суфозії стосовно пористих середовищ з напівпроникними включеннями.

У статті [12] досліджено ефект впливу розчинів неорганічних солей на деградацію властивостей глинистих включень. Два типи неорганічної солі MnSO₄ і FeCl₃ використовувалися при концентрації 2%, 5%, 10%. В якості глинистого матеріалу для дослідів використовувався каолінит.

При побудові математичних моделей геоміграційних процесів в середовищах з включеннями відповідні крайові задачі повинні бути коректними. Тому вони (моделі) повинні доповнюватись умовами спряження для невідомих функцій на таких включеннях. У роботі [13] побудовано математичну модель руху рідини на основі рівнянь Нав'є-Стокса в області, яка розділена напівпроникною мембраною. В точці наявної мембрани ($x=0$) для концентрації розчинених солей c запропоновано наступні умови спряження:

$$-D_c \frac{dc^-}{dx}(0) + \sigma uc^-(0) = 0,$$

$$-D_c \frac{dc^+}{dx}(0) + uc^+(0) = u(1-\sigma)c^-(0),$$

де $\sigma \in [0;1]$ коефіцієнт, який відображає собою ступінь ідеальності мембрани (мембрана є абсолютно ідеальною, якщо $\sigma=1$). Тут D_c - коефіцієнт дифузії, u - швидкість руху рідини.

У статті [14] розглянуто параболічні рівняння, які описують процес тепломасоперенесення в області з тонким слабопроникним включенням з умовами спряження типу «зосереджене власне джерело». Запропонована нова постановка таких задач, в яких основне параболічне рівняння трансформується в систему диференціальних рівнянь першого порядку з коефіцієнтами з класів узагальнених функцій. Доведені теореми існування та єдиності узагальненого розв'язку.

Однак, у відомих математичних моделях взаємозв'язаних процесів консолідації та поширення забруднень фільтраційні властивості тонких включень покладались сталими і незалежними від концентрації хімічних речовин. Як показано в [15] такі залежності для коефіцієнта фільтрації можуть мати значний вплив на фільтраційні процеси в ґрунтових гідротехнічних спорудах.

Ціллю цієї статті є урахування таких залежностей для фільтраційних параметрів тонких включень.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Розглянемо масив ґрунту товщиною l . На глибині $x = \xi$, $0 < \xi < l$ знаходиться тонке включення з ґрунту з власними фізико-механічними та хімічними характеристиками. Процес фільтраційної консолідації шару ґрунту із врахуванням солеперенесення описується наступ-

ними рівняннями [16, 17]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1+\bar{e}}{\gamma a} \left(\frac{\partial}{\partial x} (k(c) \frac{\partial h}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (v(c) \frac{\partial h}{\partial x}) \right),$$

$$x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, \quad (1)$$

$$\sigma \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (D \frac{\partial c}{\partial x}) - u \frac{\partial c}{\partial x}, x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, \quad (2)$$

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x} + v(c) \frac{\partial c}{\partial x}, q_c = uc - D \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (3)$$

де $h(x, t)$ – надлишковий напір, \bar{e} – коефіцієнт пористості ґрунту, γ – питома вага порового розчину, a – коефіцієнт стискуваності ґрунту, c – концентрація порового розчину, σ – пористість ґрунту, D – коефіцієнт дифузії, $u(x, t)$ – швидкість фільтрації, v – коефіцієнт хімічного осмосу; k – коефіцієнт фільтрації; $\Omega_1 = (0; \xi)$, $\Omega_2 = (\xi; l)$, $0 < \xi < l$.

Відмітимо, що в (1)-(3)

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, x \in \Omega_1 = (0; \xi); \\ \sigma_2, x \in \Omega_2 = (\xi; l); \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} k_1, x \in \Omega_1 = (0; \xi); \\ k_2, x \in \Omega_2 = (\xi; l); \end{cases}$$

$$D(x) = \begin{cases} D_1, x \in \Omega_1 = (0; \xi); \\ D_2, x \in \Omega_2 = (\xi; l); \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} v_1, x \in \Omega_1 = (0; \xi); \\ v_2, x \in \Omega_2 = (\xi; l). \end{cases}$$

В роботі [18] виведено наступну умову спряження для напорів на тонкому включенні в точці $x = \xi$

$$u|_{x=\xi+0} = u|_{x=\xi-0} = \frac{[h]}{d} \frac{dx}{k^*(c)}, \quad (4)$$

де $[h] = h^+ - h^-$ - стрибок напору на включенні; d – товщина включення; k^* - коефіцієнт фільтрації включення, який залежить від концентрації хімічних речовин; $h^+ = h|_{x=\xi+0}$, $h^- = h|_{x=\xi-0}$.

Нехай також задано початкові та граничні умови, а також умови спряження [15] для напору і концентрації однокомпонентного хімічного розчину в поровій рідині

$$h(x, 0) = h_0(x), c(x, 0) = c_0(x), x \in [0, l],$$

$$u|_{x=l} = 0, t > 0, h(0, t) = h_1(t), t > 0,$$

$$q_c|_{x=l} = 0, t > 0,$$

$$c(0, t) = c_1(t), t > 0, \quad (5)$$

$$q_c^\pm = u^\pm \frac{c^+ - c^-}{2} - \frac{D^*}{d} (c^+ - c^-),$$

де $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, $c_0(x)$, $c_1(x)$, $c_2(x)$, – відомі функції; D^* , v^* - коефіцієнт дифузії та осмосу для тонкого включення.

Таким чином сформовано крайову задачу (1)-(5) для відшукування надлишкових напорів при фільтраційній консолідації ґрунту з тонким включенням із врахуванням солеперенесення.

Розв'язання задачі методом скінченних елементів. Аналогічно [15] введемо ряд означень та просторів.

Означення 1. Класичним розв'язком, який допускає розрив в точці $x = \xi$ крайової задачі (1)-(5) називається пара функцій $h(x, t)$, $c(x, t)$, які неперервні ра-

зом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial(\bullet)}{\partial x}$ на $[0, \xi) \cup (\xi, l] \times (0, t_0]$, мають неперервні обмежені частинні похідні $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2}$ на $[0, \xi) \cup (\xi, l] \times (0, t_0]$ і задовольняють співвідношення (1)-(5).

Нехай H_0 - простір вектор-функцій $\mathbf{s}(x) = (s_1(x), s_2(x))$, кожна із компонент $s_1(x)$, $s_2(x)$ яких на відрізку $[0, l]$ належить простору Соболева $W_2^1(\Omega)$, причому $s_1(x)$, $s_2(x)$ набувають нульових значень на кінцях відрізка $[0, l]$, де відповідно для функцій $h(x, t)$, $c(x, t)$ задані граничні умови першого роду.

Нехай H - простір вектор-функцій $\mathbf{f}(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t))$, кожна із компонент $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$ яких інтегрована з квадратом разом зі своїми першими похідними $\frac{\partial f_1}{\partial t}$, $\frac{\partial f_2}{\partial t}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ на відрізку $[0, l]$, $\forall t \in (0, t_0]$, причому $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$ задовольняють, відповідно, граничні умови першого роду, що і функції $h(x, t)$, $c(x, t)$.

Домножимо рівності (1), (2) та кожен з початкових умов в (5), відповідно, на довільні функції $s_1(x)$, $s_2(x)$ такі, що $(s_1(x); s_2(x)) \in H_0$, інтегруючи їх на відрізку $[0, l]$ та враховуючи умови спряження (4), (5) отримаємо

$$\int_0^l \frac{\partial h}{\partial t} s_1 dx + \frac{(1+\bar{e})}{\gamma a} \int_0^l ((k(c) \nabla h, \nabla s_1) - (v(c) \nabla c, \nabla s_1)) dx + \frac{[h]}{d} \frac{dx}{k^*(c)} = 0, \forall t \in (0; t_0]; \quad (6)$$

$$\int_0^l h(x, 0) s_1(x) dx = \int_0^l h_0(x) s_1(x) dx, \forall t \in (0; t_0]; \quad (7)$$

$$\sigma \int_0^l \frac{\partial c}{\partial t} s_2(x) dx + \int_0^l (D(c) \nabla h, \nabla s_2) dx + \int_0^l (u, \nabla c) s_2(x) dx + \frac{D^*}{d} [c] = 0, \forall t \in (0; t_0]; \quad (8)$$

$$\int_0^l c(x, 0) s_2(x) dx = \int_0^l c_0(x) s_2(x) dx, \forall t \in (0; t_0]. \quad (9)$$

Означення 2. Вектор-функція

$(h(x, t); c(x, t)) \in H$, котра $\forall (s_1(x); s_2(x)) \in H_0$ задовольняє інтегральним співвідношенням (6)-(9), називається узагальненим розв'язком крайової задачі (1)-(5).

Наближений узагальнений розв'язок крайової задачі (1)-(5) шукаємо у вигляді

$$(h(x, t); c(x, t)) = \left(\sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_i^{(1)}(x); \sum_{j=1}^n b_j(t) \varphi_j^{(2)}(x) \right), \quad (10)$$

де $\varphi_i = (\varphi_i^{(1)}; 0)$, $i = \overline{2, n}$, $\varphi_j = (0; \varphi_j^{(2)})$, $j = \overline{n+2, 2n}$ - базисні вектор-функції скінченновимірного підпростору $M_0 \in H_0$, а функції $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_{n+1}^{(2)}$ викори-

стовуються для апроксмації неоднорідних граничних умов першого роду в (5).

Сукупність вектор-функцій, які можна подати у вигляді (10), породжуючи множину $M \subset H$.

Означення 3. Наближенням узагальненим розв'язком крайової задачі (1)-(5) називається вектор-функція $(\hat{h}(x,t); \hat{c}(x,t)) \in M$, яка $\forall t \in (0, t_0)$ та довільної вектор-функції $(S_1(x); S_2(x)) \in M_0$ задовольняє інтегральним співвідношенням

$$\int_0^l \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} S_1 dx + \frac{(1+\bar{e})}{\gamma a} \int_0^l ((k(\hat{c}) \nabla \hat{h}, \nabla S_1) - (v(\hat{c}) \nabla \hat{c}, \nabla S_1)) dx + \frac{[\hat{h}]}{\int_0^d \frac{dx}{k^*(\hat{c})}} = 0, \forall t \in (0; t_0);$$

$$\int_0^l \hat{h}(x,0) S_1(x) dx = \int_0^l \hat{h}_0(x) S_1(x) dx, \forall t \in (0; t_0);$$

$$\sigma \int_0^l \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} S_2(x) dx + \int_0^l (D(\hat{c}) \nabla \hat{h}, \nabla S_2) dx + \int_0^l (u, \nabla \hat{c}) S_2(x) dx + \frac{D^*}{d} [\hat{c}] = 0, \forall t \in (0; t_0);$$

$$\int_0^l \hat{c}(x,0) S_2(x) dx = \int_0^l \hat{c}_0(x) S_2(x) dx, \forall t \in (0; t_0);$$

$$\forall (S_1(x); S_2(x)) \in M_0, (\hat{h}(x,t); \hat{c}(x,t)) \in M.$$

Розв'язуючи задачу (1)-(5) методом скінченних елементів із слабкого формулювання (6)-(9) задачі, враховуючи (10), отримаємо задачу Коші

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)} \cdot \mathbf{B}(t) = \mathbf{F}^{(2)}, \quad (11)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)} \cdot \mathbf{A}(t) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{F}^{(1)}, \quad (12)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{A}(0) = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{B}(0) = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad (13)$$

де

$$\mathbf{A} = (a_i(t))_{i=1}^n, \quad \mathbf{B} = (b_i(t))_{i=1}^n, \quad \mathbf{F}^{(1)} = (f_i^{(1)}(t))_{i=1}^n,$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = (f_i^{(2)}(t))_{i=1}^n, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(1)} = (\tilde{f}_i^{(1)}(t))_{i=1}^n,$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{(2)} = (\tilde{f}_i^{(2)}(t))_{i=1}^n, \quad \mathbf{M}^{(1)} = (m_{ij}^{(1)}(t))_{i,j=1}^n,$$

$$\mathbf{M}^{(2)} = (m_{ij}^{(2)}(t))_{i,j=1}^n, \quad \mathbf{L}^{(1)} = (l_{ij}^{(1)}(t))_{i,j=1}^n,$$

$$\mathbf{L}^{(2)} = (l_{ij}^{(2)}(t))_{i,j=1}^n, \quad \mathbf{G} = (g_{ij}(t))_{i,j=1}^n,$$

$$m_{ij}^{(2)} = \sigma \int_0^l \varphi_i^{(2)} \varphi_j^{(2)} dx, \quad m_{ij}^{(1)} = \sigma \int_0^l \varphi_i^{(1)} \varphi_j^{(1)} dx,$$

$$l_{ij}^{(2)} = \frac{1+\bar{e}}{\gamma a} \int_0^l D \frac{\partial \varphi_i^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^{(2)}}{\partial x} + \varphi_i^{(2)} (u, \nabla \varphi_j^{(2)}) dx + \frac{D^*}{d} [\varphi_j^{(2)}] [\varphi_i^{(2)}],$$

$$l_{ij}^{(1)} = \frac{1+\bar{e}}{\gamma a} \int_0^l k(c) \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x} dx + \frac{1}{\int_0^d \frac{dx}{k^*(c)}} [\varphi_i^{(1)}] [\varphi_j^{(1)}],$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(2)} = \int_0^l \varphi_i^{(2)} \varphi_j^{(2)} dx,$$

$$g_{ij} = \frac{1+\bar{e}}{\gamma a} \int_0^l v \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x} dx + \int_0^d v^* [\varphi_i^{(1)}] [\varphi_j^{(1)}] d\Gamma,$$

Після дискретизації в часі з використанням схеми Кранка-Ніколсона [19] із системи (11)-(13) маємо

$$\left(\frac{\mathbf{M}^{(2)(s)}}{\tau} + \frac{\mathbf{L}^{(2)(s)}}{2} \right) \mathbf{B}^{(s+1)} = \frac{\mathbf{M}^{(2)(s)}}{\tau} - \frac{\mathbf{L}^{(2)(s)}}{2} \mathbf{B}^{(s)} + \mathbf{F}^{(2)(s)},$$

$$\left(\frac{\mathbf{M}^{(1)(s)}}{\tau} + \frac{\mathbf{L}^{(1)(s)}}{2} \right) \mathbf{A}^{(s+1)} = \frac{\mathbf{M}^{(1)(s)}}{\tau} - \frac{\mathbf{L}^{(1)(s)}}{2} \mathbf{A}^{(s)} + \mathbf{G}^{(s)} \mathbf{B}^{(s+1)} + \mathbf{F}^{(1)(s)},$$

де τ – часовий крок, $\mathbf{A}^{(s)} = \mathbf{A}(t_s), t_s = s \cdot \tau$.

Результати числових експериментів. Проведемо числові експерименти і порівняємо значення напорів у випадках, коли коефіцієнт фільтрації тонкого включення залежить від концентрації солей та коли коефіцієнт фільтрації – сталий.

Для модельної задачі візьмемо наступні значення параметрів: $v_1 = v_2 = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$, $\bar{e} = 0.7$, $D_1 = D_2 = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}$, $v^* = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$, $D^* = 0.0002 \text{ м}^2 / \text{доба}$, $l = 25 \text{ м}$.

Граничні та початкові умови наступні: $h_0(x) = 10 \text{ м}$, $c_0(x) = 10 \text{ г} / \text{літр}$, $h_1(t) = 0 \text{ м}$, $c_1(t) = 350 \text{ г} / \text{літр}$.

В табл. 1 наведено результати числових експериментів, коли коефіцієнт фільтрації чистої води ґрунту в обох підобластях – знизу і зверху (включення) дорівнює $0.01 \text{ м} / \text{доба}$. В табл. 2 значення коефіцієнта фільтрації в обох підобластях дорівнюють $0.1 \text{ м} / \text{доба}$. Коефіцієнт фільтрації чистої води для глинистого включення покладался рівним $0.0001 \text{ м} / \text{доба}$ та $0.001 \text{ м} / \text{доба}$ відповідно для таблиць 1 та 2. Коефіцієнт фільтрації ґрунту в підобластях Ω_1, Ω_2 та самого включення покладалися залежними від концентрації солей згідно даних, наведених в [7].

Таблиця 1 – Значення напорів (м) та відносна зміна стрибка напорів при $k = 0,0001 \text{ м} / \text{доба}$

Глибина залягання включення та його товщина	$\xi=13$ $d=0,2$	$\xi=8$ $d=0,2$	$\xi=13$ $d=0,5$	$\xi=8$ $d=0,2$	
$k^* = 0,0001 \text{ м} / \text{доба}$	h^-	2,17	2,20	2,41	2,48
	h^+	2,74	3,07	4,07	4,75
	[h]	0,57	0,87	1,66	2,27
$k^* = k^*(c)$	h^-	1,98	1,90	2,09	2,03
	h^+	2,71	3,43	4,04	5,39
	[h]	0,73	1,53	1,95	3,36
$([h]^* - [h]) / [h] \cdot 100\%$	28%	76%	18%	48%	

Таблиця 2 – Значення напорів (м) та відносна зміна стрибка напорів при $k = 0,001 \text{ м} / \text{доба}$

Глибина залягання включення та його товщина	$\xi=13$ $d=0,2$	$\xi=8$ $d=0,2$	$\xi=13$ $d=0,5$	$\xi=8$ $d=0,2$	
$k^* = 0,001 \text{ м} / \text{доба}$	h^-	0,05	0,12	0,20	0,25
	h^+	0,21	0,57	1,73	2,82
	[h]	0,16	0,45	1,53	2,57
$k^* = k^*(c)$	h^-	0,03	0,09	0,12	0,20
	h^+	0,19	0,84	1,59	3,65
	[h]	0,16	0,75	1,47	3,45
$([h]^* - [h]) / [h] \cdot 100\%$	0%	67%	-4%	34%	

Як видно з результатів, наведених в табл. 1 та табл. 2, відносна зміна стрибка напорів лежить в межах від -4% (стрибок зменшується) до +76% (стрибок напорів збільшується) у випадку урахування залежності коефіцієнта фільтрації включення від концентрації хімічних речовин та модифікованої умови спряження. Відносна зміна стрибка напорів залежить як від глибини залягання напівпроникного включення, так і від його товщини, а також від фільтраційних параметрів ґрунту і самого включення. Результати розв'язання модельних задач показують, що залежністю параметрів напівпроникних включень від концентрації хімічних речовин нехтувати не можна. Для проведення оцінки в реальних геологічних формаціях, мають бути відомими всі параметри ґрунту в підобластях, а також самого включення.

ВИСНОВКИ. Отже, чисельно досліджено вдосконалену математичну модель процесів фільтраційної консолідації ґрунтів із метою встановлення ступеня залежності стрибка надлишкових напорів від коефіцієнта фільтрації включення, який, в свою чергу, залежить від концентрації порового хімічного розчину. Проведено числові експерименти. Наближені узагальнені розв'язки знайдено методом скінченних елементів. В подальшому планується розширення постановки та розгляд двовимірної, а також проведення теоретичних досліджень якісних характеристик знайдених наближених розв'язків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Neuzil C. E. (2017), "Reexamining ultrafiltration and solute transport in groundwater", vol. 53, iss. 6, pp. 4922–4941.
2. Revil A. (2017), "Transport of water and ions in partially water-saturated porous media. Part 2. Filtration effects", *Advances in Water Resources*, no. 103, pp. 139–152.
3. Xie H., Yan H., Feng S., Wang Q., Chen P. (2016), "An analytical model for contaminant transport in landfill composite liners considering coupled effect of consolidation, diffusion, and degradation", *Environmental Science and Pollution Research*, vol. 23, is. 19, pp. 19362–19375.
4. Bohnhoff G. L., Shackelford C. D. Slt diffusion through a bentonite-polymer. *Clays and Clay Minerals*. 2015. Vol. 63, No. 3. Pp. 145–162.
5. Shariatmadari N., Salami M. (2011), "Effect of inorganic salt solutions on some geotechnical properties of soil-bentonite mixtures as barriers", *International Journal of Civil Engineering*, vol. 9, no. 2, pp. 103–110.
6. Whitworth T. M., Ghazifard A. (2009) "Membrane effects in clay-lined inward gradient landfills", *Applied Clay Science*, no. 43, pp. 248–252.
7. Malusis M. A., Daniyarov A. S. (2016), "Membrane efficiency and diffusive tortuosity of a dense prehydrated geosynthetic clay liner", *Geotextiles and Geomembranes*. 44(5), pp. 719–730.
8. Shackelford Ch. D., Meier A., Sample-Lord K. (2016), "Limiting membrane and diffusion behavior of a geosynthetic clay liner", *Geotextiles and Geomembranes*, no. 44(5), pp. 707–718.
9. Pu H., Fox P. J., Shackelford C. D. (2016), "Assessment of Consolidation-Induced Contaminant Transport for Compacted Clay Liner Systems", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 142, is. 3. 14 p.
10. Sample-Lord K. M., Shackelford Ch. D. (2018), "Membrane Behavior of Unsaturated Sodium Bentonite", *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, no. 144(1), 13 p.
11. Martyniuk P. M., Kuzlo M. T., Matus S. K., Tsvietkova T. P. (2017), "Mathematical model of nonisothermal moisture transference in the form of water and vapor in soils in the case of chemical internal erosion", *Far East J. of Mathematical Sciences*, vol. 102, iss. 12, pp. 3211–3221.
12. Al-Janabi K. M., Abdullah B. M. Effects of Inorganic Salt Solution on Some Properties of Compacted Clay Liners. *Journal of Engineering Science and Technology*. 2017. Vol. 12, No. 12. Pp. 3188–3202.
13. Hron J., Neuss-Radu M., Pustejovsk P. (2010), "Mathematical Modeling and Simulation of Flow in Domains Separated by Leaky Semipermeable Membrane Including Osmotic Effect", *Mathematical Institute of the Charles University, Prague, Czech Republic*, preprint no. 2010-35, 16 p.
14. Nomirovskii D. A., Vostrikov O. I. (2016), "Generalized formulations and properties of models of transmission processes in domains with cuts", *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 52, n 6, pp. 931–942.
15. Ivanchuk N., Martyniuk P., Tsvetkova T., Michuta O. (2017), "Mathematical modeling and computer simulation of the filtration processes in earth dams", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, №2/6 (86), pp. 63–69.
16. Herus V., Martyniuk P., Stepanchenko O., Tsvetkova T. (2017), "Numerical modeling of a system of interrelated consolidation and mechanical-chemical suffusion processes in heterogenic porous media", *Int. J. of Pure and Applied Mathematics*, vol. 116, iss. 4, pp. 1043–1056.
17. Herus V., Stepanchenko O., Martyniuk P., Michuta O. (2017), "Two-dimensional problem concerning contact suffusion interplay on the filtration consolidation processes of heterogeneous soils", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 11, № 2, pp. 407–418.
18. Про умову спряження неідеального контакту і задачі фільтрації із напівпроникним включенням при змінному коефіцієнті фільтрації. Чуй Ю. В., Мартинюк П. М. *Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: зб.пр. IV-ї наук.-техн. конф. (Львів, 28-30 вересня 2016 р.)*. Львів: ФМІ НАНУ, 2016. С. 56–57.
19. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах, Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С., К., Наук. Думка, Киев, 432 с.

RESEARCH THE EFFECT OF THE FILTRATION COEFFICIENT'S DEPOSIT OF THIN CLAY INCLUSION FROM THE CONCENTRATION OF CHEMICAL SUBSTANCES ON VALUE OF JUMP PRESSURES

Y. Chui, P. Martyniuk

National University of Water and Environmental Engineering
vul. Soborna, 11, Rivne, 33028, Ukraine. E-mail: yurachuy@gmail.com

Purpose. The article deals with improvement the mathematical model of the processes of filtration consolidation of soils with thin semi-permeable inclusions, taking into account the filtration parameters of thin inclusions, which depend on the concentration of chemical substances. Thin clay inclusions are often used in the construction of industrial and

domestic waste storage facilities. Their main function is the limitation of the spread of pollutants in underground and surface water. Industrial wastes are generally associated with the danger of the spread of pollution of non-natural origin. **Methodology.** The problem is considered in one-dimensional case. To solve, the method of finite elements with elements of the second kind is used. The Crank-Nicholson scheme is used to sample in time. Since there is a thin semi-permeable inclusion in the considered region, it takes into account the conjugation conditions, which resulted in the introduction of double numbering of the nodes. **Results.** An improved mathematical model of soil filtration consolidation processes has been numerically investigated, and the degree of dependence of the jump of excess pressure on the inclusion coefficient of filtration, which in turn depends on the concentration of the pore solution salts, is established. It is established that the relative change in the jump of heads lies in the range from -4% (jump decreases) to + 76% (the jump of heads increases) in the case of taking into account the dependence of the inclusion filtering factor on the concentration of chemicals and the modified conjugation condition. These phenomena are partly explained by the effect of osmosis. **Originality.** For the first time the problem of filtration consolidation of inhomogeneous soils was considered, where the filtration coefficient for inclusion depended on the concentration of saline solution. **Practical value.** The results obtained in the study can be used in the design and construction of various types of hydraulic structures, underlying foundations of which are heterogeneous layers of soil. **Conclusions.** The obtained results confirm the necessity of taking into account the chemical composition of porous liquid when considering the parameters. thin semi-permeable inclusions. References 19, tables 2.

Key words: semi-permeable inclusion, finite element method, filtration consolidation, matching conditions.

REFERENCES

1. Neuzil, C. E. (2017), "Reexamining ultrafiltration and solute transport in groundwater", vol. 53, iss. 6, pp. 4922–4941.
2. Revil, A. (2017), "Transport of water and ions in partially water-saturated porous media. Part 2. Filtration effects", *Advances in Water Resources*, no. 103, pp. 139–152.
3. Xie, H., Yan, H., Feng, S., Wang, Q., Chen, P. (2016), "An analytical model for contaminant transport in landfill composite liners considering coupled effect of consolidation, diffusion, and degradation", *Environmental Science and Pollution Research*, vol. 23, is. 19, pp. 19362–19375.
4. Bohnhoff, G. L., Shackelford, C. D. (2015), "Slt diffusion through a bentonite-polymer", *Clays and Clay Minerals*, vol. 63, no. 3, pp. 145–162.
5. Shariatmadari, N., Salami, M. (2011), "Effect of inorganic salt solutions on some geotechnical properties of soil-bentonite mixtures as barriers", *International Journal of Civil Engineering*, vol. 9, no. 2, pp. 103–110.
6. Whitworth, T. M., Ghazifard, A. (2009) "Membrane effects in clay-lined inward gradient landfills", *Applied Clay Science*, no. 43, pp. 248–252.
7. Malusis, M. A., Daniyarov, A. S. (2016), "Membrane efficiency and diffusive tortuosity of a dense prehydrated geosynthetic clay liner", *Geotextiles and Geomembranes*. 44(5), pp. 719–730.
8. Shackelford, Ch. D., Meier, A., Sample-Lord, K. (2016), "Limiting membrane and diffusion behavior of a geosynthetic clay liner", *Geotextiles and Geomembranes*, no. 44(5), pp. 707–718.
9. Pu, H., Fox, P. J., Shackelford, C. D. (2016), "Assessment of Consolidation-Induced Contaminant Transport for Compacted Clay Liner Systems", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 142, is. 3. 14 p.
10. Sample-Lord, K. M., Shackelford, Ch. D. (2018), "Membrane Behavior of Unsaturated Sodium Bentonite", *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, no. 144(1), 13 p.
11. Martyniuk, P. M., Kuzlo, M. T., Matus, S. K., Tsvietkova, T. P. (2017), "Mathematical model of nonisothermal moisture transference in the form of water and vapor in soils in the case of chemical internal erosion", *Far East J. of Mathematical Sciences*, vol. 102, iss. 12, pp. 3211–3221.
12. Al-Janabi, K. M., Abdullah, B. M. (2017), "Effects of Inorganic Salt Solution on Some Properties of Compacted Clay Liners", *Journal of Engineering Science and Technology*, vol. 12, no. 12, pp. 3188 – 3202.
13. Hron, J., Neuss-Radu, M., Pustejovsk, P. (2010), "Mathematical Modeling and Simulation of Flow in Domains Separated by Leaky Semipermeable Membrane Including Osmotic Effect", *Mathematical Institute of the Charles University, Prague, Czech Republic*, preprint no. 2010-35, 16 p.
14. Nomirovskii, D. A., Vostrikov, O. I. (2016), "Generalized formulations and properties of models of transmission processes in domains with cuts", *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 52, n 6, pp. 931–942.
15. Ivanchuk, N., Martyniuk, P., Tsvetkova, T., Michuta, O. (2017), "Mathematical modeling and computer simulation of the filtration processes in earth dams", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, №2/6 (86), pp. 63–69.
16. Herus, V., Martyniuk, P., Stepanchenko, O., Tsvetkova, T. (2017), "Numerical modeling of a system of interrelated consolidation and mechanical-chemical suffusion processes in heterogenic porous media", *Int. J. of Pure and Applied Mathematics*, vol. 116, iss. 4, pp. 1043–1056.
17. Herus, V., Stepanchenko, O., Martyniuk, P., Michuta, O. (2017), "Two-dimensional problem concerning contact suffusion interplay on the filtration consolidation processes of heterogeneous soils", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 11, № 2, pp. 407–418.
18. Chui, Y. V., Martyniuk, P. M. (2016), *Pro umovu spriazhnnia neidealnoho kontaktu v zadachi filtratsii iz napivpronyknym vkluchenniam pry zminnomu koefitsienti filtratsii* [On the condition of conjugation of nonideal contact and the problem of filtering with a semi-permeable inclusion with variable coefficient of filtration], *Computational methods and information transformation systems: IV conf, Lviv: FMI NANU; Declared: 28-30 Septemer 2016; Published 2016*, pp. 56–57.
19. Sergienko, I., Skopetsky, V., Deineka, B. (1991) *Matematycheskoe modelyrovanye y yssledovanye protsessov v neodnorodnyh sredakh* [The mathematical modelling and research of process in no regular medias], Kyiv, Naukova Dumka (Academic Publishers) 432.

Стаття надійшла 13.06.2019.