УДК 534.8 DOI: 10.30929/1995-0519.2021.2.94-99

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД СИМЕТРІЙ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО ПОЗДОВЖНІ ЧИ КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ СТРИЖНІВ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

К. О. Трапезон

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ORCID: 0000-0001-5873-9519

Наведено новий метод побудови аналітичного розв’язку однієї з задач механіки пружних тіл – про коливання стрижня змінного перерізу в режимі поздовжніх або крутильних переміщень. Метод базується на принципі симетрій диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Метод та його положення, що пропонуються, дозволяє побудувати для винайдених нових конфігурацій стрижнів як пружних тіл зі змінними характеристиками частотні рівняння, знайти власні частоти та побудувати власні форми коливань. Аналітичні співвідношення, що знайдені, дозволяють побудувати розподіл механічних переміщень та напружень при усталених резонансних станах стрижня змінного перерізу. Теоретичні результати, що отримано, дозволяють в перспективі розширити наявну математичну базу для технічних розрахунків коливань стрижневих елементів змінного перерізу як об’єкта зі змінною жорсткістю. Наведені принципіальні положення та схеми втілення методу для розрахунків можна розповсюдити і на інші класи задач на власні значення, де об’єктом дослідження є лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами.

Ключові слова: коливання, переміщення, стрижень, симетрія, модель, метод, ультразвук.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Звукові та ультразвукові коливальні системи знаходять широке розповсюдження в різних галузях промисловості, зокрема у машинобудуванні, приладобудуванні та будівництві [1–7]. Окремим важливим напрямом застосування таких систем може бути їх використання в медицині, де вони в якості цільового електроакустичного обладнання залучені для виведення каменів з нирок, пломбування зубів в стоматології, тощо [8–11].

Серед найбільш відомих прикладів їх практичного впровадження у науково-технічних галузях варто відзначити їх застосування при обробці деталей машин, їх очищення а також у наукових дослідах, що пов'язані з експериментальною перевіркою матеріалів та деталей технологічного обладнання на міцність та втому [4–6]. У наведених прикладах основним конструктивним вузлом силової ультразвукової коливальної системи є перехідний стрижень змінного перерізу [12–14]. Його головне призначення – підсилення рівня поздовжніх коливань робочого інструменту ультразвукової системи. Відомі різні конфігурації таких систем зі змінними характеристиками [15–19], але їх ефективність з точки зору отримання необхідного технічного ресурсу, підвищеного коефіцієнта підсилення коливань, допустимих габаритних розмірів найчастіше є вкрай недостатньою. Наприклад, найбільш поширений і найкращий серед відомих зразків перехідний стрижень ступінчастої форми має один суттєвий недолік – втомне руйнування конструкції в області зміни перерізів через наявну концентрацію механічних напружень. Вочевидь обмежений набір конфігурацій стрижнів змінного перерізу може бути пов'язаний з труднощами розрахунку власних коливань таких елементів отож і коливань в умовах резонансу. Проблема розрахунку власних коливань пружних тіл і систем нерозривно пов'язана з розробкою чи розвитком аналітичних методів розв’язання відповідних диференціальних рівнянь в замкненому вигляді. Сучасні розрахункові методи, як правило є числовими (метод послідовних наближень, метод кінцевих різниць чи кінцевих елементів та інші) [20–27] і це пов'язано з тим, що дані задачі математичної фізики стикаються з обмеженнями існуючої математичної теорії і нові аналітичні чи точні методи розрахунку винайти майже неможливо. Зрозуміло, що числові методи характеризуються насамперед невизначеною точністю і не наочністю отриманих результатів. В рамках даного дослідження пропонується до розгляду метод розв’язання задачі на власні коливання для стрижня змінного перерізу, який ґрунтується на принципі симетрій диференціальних рівнянь 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами. В основу запропонованого методу закладена ідея побудови належних груп перетворень, завдяки яким диференціальне рівняння задачі повинно залишатись інваріантним по відношенню до цих груп. Таку властивість рівнянь називають симетрією і в межах цього постає питання знаходження точного (замкненого) розв’язку. Цей розв'язок дозволяє визначити поведінку відповідних елементів зі змінною жорсткістю при тих або інших видах силового навантаження. В рамках сформульованої постановки слід підкреслити, що диференціальне рівняння визначає математичну модель деякого фізичного процесу, в якому змінні коефіцієнти моделюють реальні фізичні змінні характеристики об’єкту дослідження.

Метою роботи є наведення узагальненого методу симетрії для аналізу задачі про поздовжні коливання стрижневих елементів змінної жорсткості зі схемою його застосування для розв’язання задач технічної акустики.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Знаходження власних частот та розрахунок форм поздовжніх або крутильних коливань стрижнів змінного поперечного перерізу пов’язано з пошуком розв’язку диференціального рівняння зі змінним параметром $F(x)$.

$$W'' + \frac{F'}{F}W' + k^2 W = 0 \ , \qquad (1)$$

яке випливає з хвильового рівняння після відокремлення часового множника за методом Фур’є [28], і яке наведено в низці праць та наукових джерел відомих вчених – Релея, Тимошенко, Пановко та інших. У рівнянні (1) наведено позначення: $W=W(x)$ - переміщення будь-якого перерізу стрижня при коливаннях; $F=F(x)$ - площа поперечного перерізу; k - хвильове число, яке визначається за формулою:

$$k^2 = l^2 \omega^2 \frac{\gamma}{gE};$$

де l – довжина стрижня; $w=2\pi f$ – колова частота власних коливань стрижня; f – власна частота коливань; γ – питома вага матеріалу стрижня; E – модуль пружності (модуль Юнга) матеріалу стрижня; g – прискорення сили тяжіння.

Штрихи в рівнянні (1) визначають похідні по змінній *x*, яка віднесена до довжини стрижня. Вільні на кінцях стрижні зі змінною площею використовують на практиці як концентратори переміщень (рис. 1).

Ефективність роботи концентратора переміщень в режимі резонансних коливань обумовлена видом функції $F(x)$, яка характеризує геометричний профіль стрижня.

Рисунок 1 – Концентратори переміщень

Проблема раціонального проектування пружних систем даного типу полягає в обмеженому наявному наборі функцій $F(x)$, при яких можна знайти замкнений розв'язок рівняння (1). Для розширення низки розв'язків рівняння (1) в замкненому вигляді використаємо ідею симетрії диференціальних рівнянь другого порядку.

1. Математична модель узагальненого методу симетрій.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} W = LW_1; \\ W_1 = L_1 W, \end{cases}$$

де L, L_1 – оператори, які представлені у формі:

$$L = A(x)\frac{d}{dx} + B(x); \quad L_1 = \alpha(x)\frac{d}{dx} + \beta(x).$$

Запровадимо наступні позначення:

$$\alpha = 1/b; \quad \beta = -a/b; \quad A = 1/c; \quad B = -d/c,$$

тобто вважаємо, що:

$$bW_1 = W' - aW; \quad cW = W_1' - dW_1. \tag{2}$$

Співвідношення (2) можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\left.\begin{aligned} W'' - W'\left(a + d + \frac{b'}{b}\right) - W\left(a' - a\frac{b'}{b} - ad + bc\right) = 0; \\ W_1'' - W_1'\left(a + d + \frac{c'}{c}\right) - W_1\left(d' - d\frac{c'}{c} - ad + bc\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Провівши зіставлення першого рівняння системи (3) з рівнянням (1) та другого рівняння системи (3) з рівнянням:

$$W_1'' + \frac{F_1'}{F_1}W_1' + k_1^2 W_1 = 0, \tag{4}$$

можна отримати наступні співвідношення:

$$\frac{F'}{F} = -\left(a + d + \frac{b'}{b}\right);$$

$$\frac{F_1'}{F_1} = -\left(a + d + \frac{c'}{c}\right);$$

$$-bc = const = \lambda^2;$$

$$a' - a\frac{b'}{b} - ad = const = -\mu^2;$$

$$d' - d\frac{c'}{c} - ad = const = -\nu^2.$$

Звідси, приймаючи, що $a = U'/U; \; d = V'/V$, отримаємо

$$b = \frac{1}{FUV}; \; c = -\lambda^2 FUV; \; F_1 = \frac{1}{FU^2V^2}.$$

Параметри U та V можна визначити з рівнянь

$$U'' + \frac{F'}{F}U' + \mu^2 U = 0; \tag{5}$$

$$V'' + \frac{F_1'}{F_1}V' + \nu^2 V = 0. \tag{6}$$

Таким чином, якщо відомий розв'язок W рівняння (1) при законі $F(x)$, то розв'язок рівняння (4) при законі

$$F_1 = \frac{1}{FU^2V^2}, \tag{7}$$

буде знайдено за формулою

$$W_1 = \frac{W' - aW}{b} = FU^2V\left(\frac{W}{U}\right)'. \tag{8}$$

І навпаки, якщо задана конфігурація через функцію F_1 і відомий розв'язок W_1, то розв'язок рівняння (1) визначається через співвідношення

$$-\lambda^2 W = \frac{W_1' - dW_1}{c} = F_1 V^2 U\left(\frac{W_1}{V}\right)'.$$

2. Алгоритм застосування методу.

Наведемо послідовність дій, за якими можна реалізувати наведений вище узагальнений метод симетрії для задачі про поздовжні коливання елементів змінної жорсткості. Таким елементом будемо вважати стрижень змінного перерізу, який працює в режимі власних поздовжніх чи крутильних коливань.

1. Нехай знайдено чи заздалегідь відомий розв'язок вихідного рівняння форм коливань (1) для функції $F(x)$. При цьому функцію $F(x)$ можна взяти з набору функцій, які отримано на основі, наприклад, методу факторизації.

2. Виходячи з співвідношення (7) будуємо функцію F_1, де параметр V залежить від невідомої функції F_1. Через це, рівняння (6) доцільно перетворити залежно від функції F та параметра U.

Після підстановки співвідношення (7) в (6) отримуємо

$$\left(\frac{V'}{FU^2V^2}\right)' + \nu^2\frac{V}{FU^2V^2} = 0,$$

тобто

$$\left[\left(\frac{1}{V}\right)'\frac{1}{FU^2}\right]' - \nu^2\left(\frac{1}{V}\right)\frac{1}{FU^2} = 0$$

або

$$T'' + \frac{\left(1/FU^2\right)'}{1/FU^2}T' - \nu^2 T = 0, \tag{9}$$

де

$$T = \frac{1}{V}.$$

Якщо прийняти, що $\nu^2 = 0$, то

$$T = \int U^2 F dx + C,$$

тобто

$$V = 1/\int U^2 F dx + C.$$

Якщо ж $\nu^2 \neq 0$, то необхідно провести інтегрування рівняння (9) залежно від вигляду функції FU^2.

3. Знаходимо розв'язок W_1 для побудованої функції F_1, виходячи з граничних умов та першого рівняння (2)

$$W_1 = \left(\frac{1}{b}\right)W' - \left(\frac{a}{b}\right)W = FUVW' - (FV)\cdot(U')W$$

3. *Обговорення отриманих результатів та наслідки*.

Враховуючи наведені положення методу симетрій сформулюємо деякі особливості, які слід дотримуватись при практичному його застосуванні.

В системі симетричних рівнянь (1), (4-6), коефіцієнти k, k_1 – власні числа відповідної задачі математичної фізики; μ, ν – довільні сталі, які можуть дорівнювати нулю, а також можуть бути як від'ємні так і додатні.

Якщо вважати розв'язок W відомим, то функція U з (5) знаходиться елементарно, оскільки рівняння для W та U є ідентичними. Тому знаючи W відразу можна записати вираз і для функції U, провівши при цьому лише заміну в виразі функції W коефіцієнта k^2 на μ^2. Крім цього, необхідно записати дві довільні сталі інтегрування для U, які відрізняються або співпадають з відповідними сталими у загальному виразі для W.

Якщо в (5) та (6) прийняти, що коефіцієнти $\nu=\mu=0$ то можна переконатись, що

$$U = \int \frac{dx}{F} + C_1,$$

і тоді з виразу (7) випливає

$$F_1 = \frac{1}{F} = \frac{\left[C + \int F\left(\int \frac{dx}{F} + C_1\right)^2 dx\right]^2}{\left(C_1 + \int \frac{dx}{F}\right)^2}$$

або

$$\frac{1}{F_1} = \left[\frac{1}{C + \int F\left(\int \frac{dx}{F} + C_1\right)^2 dx}\right]'.$$

Для випадку, коли $\nu=0$ та V=const можна знайти, що

$$F_1 = \frac{1}{FU^2};$$

$$W_1 = FU^2\left(\frac{W}{U}\right)', \qquad (10)$$

де функція U визначається безпосередньо з формули (5) без операції інтегрування, якщо лише $\mu^2 \neq 0$.

4. Приклади практичної реалізації методу.

Метод побудови симетрій диференціального рівняння виду (1) покажемо на наступних прикладах. Необхідно показати, яким чином можливе оптимальне проектування стрижневих елементів зі змінною площею кругового перерізу, експлуатація котрих передбачається в умовах поздовжніх змінних навантажень. Завдання в даному випадку полягає у тому, що маючи задані параметри $F(x)$, $W(x)$ при яких рівняння (1) тотожно задовольняється, необхідно побудувати нові параметри $F_1(x)$ та $W_1(x)$, при яких нове рівняння типу (1) також тотожно буде дорівнювати нулю.

Приклад 1. Стрижень постійного перерізу F=const. Форми коливань $W(x)$, як відомо, відповідають виразу

$$W = A\sin kx + B\cos kx, \qquad (*)$$

де A,B – коефіцієнти які визначаються з граничних умов. Вважаючи, що $\nu=\mu=0$; V=const=1, побудуємо функції $F_1(x)$ та $W_1(x)$ за виразами (7) і (10) відповідно. Оскільки в даному випадку

$$U = \int \frac{1}{F} dx + C = x + C,$$

то відповідно до співвідношень

$$F_1 = \frac{1}{FU^2};\ \ W_1 = FU^2\left(\frac{W}{U}\right)',$$

отримаємо наступні результати

$$F_1 = \frac{1}{(x+C)^2};\ \ W_1 = (x+C)^2\left(\frac{W}{x+C}\right)'.$$

Якщо покласти $x+C=t$, то

$$F_1 = \frac{1}{t^2};$$

$$W_1 = t^2\left(\frac{W}{t}\right)' = tW' - W. \qquad (**)$$

Таким чином, якщо стрижень виконано по закону $F_1=1/(x+C)^2$, то форми його поздовжніх коливань будуть описані точним виразом (**) для $W_1(x)$.

Приклад 2. Стрижень змінного перерізу у вигляді $F=1/(x+C)^2=1/t^2$, тобто вважаємо, що F_1 з прикладу 1, означено як параметр F, при якому розв'язок рівняння для $W(x)$ буде точним і відповідатиме виразу (**). Таким чином, приймаємо

$$F = 1/t^2; W = tZ' - Z \quad (Z = A\sin kx + B\cos kx).$$

Дотримуючись такого самого алгоритму дій, що і в прикладі 1 знайдемо

$$U = \int \frac{dx}{F} + C_1 =$$

$$= \int (x+C)^2 dx + C_1 = \frac{(x+C)^3}{3} + C_1 = \frac{t^3 + 3C_1}{3}.$$

Побудуємо функцію F_1 за умови, що $\nu=\mu=0$; V=const=1

$$F_1 = \frac{1}{FU^2} = \frac{9t^2}{(t^3+3C_1)^2} = \frac{9t^2}{t^6 + 6C_1t^3 + 9C_1}.$$

Тоді, на основі (10) можемо записати вираз для розрахунку форм коливань стрижня з законом F_1

$$W_1 = FU^2\left(\frac{W}{U}\right)' =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^3+3C_1}{3}\right)^2\left(\frac{W'U - WU'}{U^2}\right);$$

підставивши функцію U і провівши математичні спрощення знайдемо

$$W_1 = \frac{1}{t^2}\left[W'\left(\frac{t^3+3C_1}{3}\right) - Wt^2\right] =$$

$$=W'\left(\frac{t}{3}+\frac{C_1}{t^2}\right)-W.$$

Враховуючи, що відповідно до рівняння (1) $Z''=-k^2Z$, дещо спростимо вираз для W_1

$$W_1=tZ''\left(\frac{t}{3}+\frac{C_1}{t^2}\right)-tZ'+Z=$$
$$=Z\left[1-k^2\left(\frac{t^3+3C_1}{3t}\right)\right]-tZ',$$

де $t=x+C$; $Z=A\sin kx+B\cos kx$.

Приклад 3. Нехай задано стрижень круглого перерізу, геометричний профіль якого по довжині описується функцією $F(x)=x^2$. Точний розв'язок рівняння (1) для даної конфігурації стрижня отримано на основі методу факторизації. У такий спосіб отримано

$$W(x)=\frac{1}{x}[A\sin kx+B\cos kx].$$

Виходячи з наведеного вище алгоритму застосування методу приймаючи, що довільні сталі $\nu=\mu=0$ та $V=\mathrm{const}$ за виразом (7) побудуємо функцію $F_1(x)$

$$F_1=\frac{1}{FU^2}=\frac{1}{x^2\left(\int\frac{dx}{x^2}+C\right)^2}=\frac{1}{(Cx-1)^1}.$$

Далі знайдемо розв'язок рівняння (1) для W_1 та F_1, який відповідає співвідношенню (10)

$$W_1=x^2\left(\int\frac{dx}{x^2}+C\right)^2\left[\frac{A\sin kx+B\cos kx}{x\left(\int\frac{dx}{x^2}+C\right)}\right]'=$$
$$=G^2\left(\frac{Z}{G}\right)',$$

де

$$G=x\left(\int\frac{dx}{x^2}+C\right)=Cx-1;$$
$$Z=A\sin kx+B\cos kx.$$

Звідси знайдемо

$$W_1=A[k(Cx-1)\cos kx-C\sin kx]-$$
$$-B[k(Cx-1)\sin kx+C\cos kx],$$

де $k=k_1$ за умови, що $\nu=\mu=0$ та $V=\mathrm{const}$.

Якщо розкрити вираз (**) прикладу 1, який отримано для $F_1=1/(x+C)^2$, то можна переконатись в їх збіжності з точністю до незалежних сталих, оскільки функції F_1 у двох випадках співпадають, проте отримані, виходячи з різних наслідкових рівнянь.

Забезпечивши граничні умови на кінцях стрижня механічних коливань, наприклад, для вільного стрижня вони будуть $W_1'(x=0)=W_1'(x=1)$, отримаємо відповідне частотне рівняння, з якого розраховуються власні частоти (хвильові числа). Далі, знаючи хвильові числа k_i ($i=1,2,3,\ldots$) можна побудувати функції переміщень W_i (форми власних коливань) і за необхідності побудувати функції розподілу механічних напружень уздовж стрижня з законом зміни площі поперечного перерізу F_1.

ВИСНОВКИ.

1. Наведено основні положення узагальненого аналітичного методу, який дозволяє в замкненому вигляді отримати цілу низку нових розв'язків однієї з задач на власні значення, які стосуються аналізу власних поздовжніх коливань прямих стрижнів зі змінним законом площі поперечного перерізу. Положення методу дозволяють, зокрема, на основі підходів та принципів симетрії диференціальних рівнянь розширити для практичних застосунків математичну базу технічних розрахунків на основі рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Узагальнений метод фактично відкриває шлях до точного визначення власних частот, побудови власних форм коливань та відповідного розподілу механічних напружень при усталених резонансних станах системи.

2. Сформульовано основні етапи використання методу на основі розробленого математичного апарату аналізу диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами, як однієї з важливих задач математичної фізики. Так, на основі розробленого алгоритму у проектувальників з'являється можливість розробити новий клас активних стрижнів змінного перерізу для трансформації переміщень, де на основі варіації змінних характеристик, зокрема, моделюванні геометричного профілю (закону зміни площі поперечного перерізу), можна забезпечити потрібну зміну рівня коливань (підсилення чи послаблення), допустимі габаритні розміри та головне, досягти підвищений технічний ресурс при експлуатації стрижня в складі ультразвукової коливальної системи.

3. В якості практичного застосування методу наведено приклади побудови аналітичних розв'язків задачі на власні значення для стрижня змінного перерізу з побудованим спеціальним чином новим законом профілю. Наведені співвідношення дозволяють проаналізувати переміщення в режимі поздовжніх або крутильних коливань. А з урахуванням граничних умов, на основі отриманих замкнених розв'язків, можна побудувати частотне рівняння, розрахувати власні частоти та за необхідності промоделювати розподіл механічних напружень уздовж осі стрижня.

4. Визначено особливості методу, які необхідно враховувати при проектуванні нових акустичних елементів в складі ультразвукових коливальних систем. Зокрема, наведені варіанти дозволяють при розв'язанні задачі на власні значення – про коливання стрижня змінного перерізу, оминути процедуру інтегрування проміжних функцій, результат якої обумовлює вигляд пошукової конфігурації стрижня.

ЛІТЕРАТУРА

1. Балдаев Р. Применения ультразвука : монографія. Москва : Техносфера, 2006. 576 с.

2. Полищук О. Ф., Аврамов К. В., Мягкохлеб К. Б. Экспериментальный анализ вынужденных нелинейных колебаний стержней с поперечными дышащими трещинами. *Проблеми машинобудування*. 2017. Т. 20, No 2. С. 36–42.

3. Dong S. Review on piezoelectric, ultrasonic, and magnetoelectric actuators. *Journal of Advanced Dielectrics*. 2012. Vol. 2, No 1. P. 1230001–1230019.

4. Киселев Е. С. Интенсификация процессов механической обработки использованием энергии ультразвукового поля : навч. посіб. Ул'янівськ : УлГТУ, 2003. 186 с.

5. Асташев В. К., Крупенин В. Л. О моделировании волноводов для ультразвуковых технологических машин. *Вестник научно-технического развития. Москва*. 2020. № 1(149). С. 3–10.

6. Захаров О. В., Бржозовский Б. М. Ультразвуковая обработка нежестко закрепленными инструментами : навч. посіб. Саратов : Видавництво Саратовського державного технічного університету, 2002. 101 с.

7. Шевченко О. В., Бальченко М. Ю. Використання різцетримача з пружними елементами для ультразвукового точіння. *Вісник ЖДТУ*. Житомир, 2015. № 2(73). С. 111–116.

8. Кісіль Т. Ю., Куницька Л. Г., Туз В. В. Про доцільність використання ультразвукових концентраторів в п'єзоелектричних віскозиметрах для контролю стану пломбувального матеріалу в стоматології. *Перспективні технології та прилади*. Луцьк, 2018. Вип. 13. С. 74–78.

9. Скалиух А. С., Герасименко Т. Е., Оганесян П. А. Влияние геометрических и физических параметров на резонансные частоты ультразвуковых колебаний системы упругих и пьезоэлектрических элементов. *Вестник Донского государственного технического университета*. Ростов-на-Дону, 2017. № 4(91). С. 5–13.

10. Акопян В. Б. Ультразвук в медицине, ветеринарии и биологии : монографія. Москва : Юрайт, 2017. 223 с.

11. Carovac A., Smajlovic F., Junuzovic D. Application of ultrasound in medicine. *Acta Informatica Medica*. 2011. Vol. 19, No 3. P. 168–171.

12. Ган О. В., Вапнічна В. В., Шайдецька Л. В. Зміна пористості та утримуючої здатності аміачної селітри під впливом ультразвукового опромінення. *Вісник Кременчуцькогго національного університету імені Михайла Остроградського.* 2019. Вип. 6. С. 99–105.

13. Хмелев В. Н., Цыганок С. Н., Лебедев А. Н. Исследование и разработка полуволновых пьезоэлектрических ультразвуковых колебательных систем. *Ползуновский вестник*. Барнаул, 2006. № 2. С. 170–176.

14. Негров Д. А., Еремин Е. Н., Новиков А. А. Ультразвуковые колебательные системы для синтеза полимерных композиционных материалов : монографія. Омск : ОмГТУ, 2012. 128 с.

15. Трубачев С. І. Теорія коливань та стійкості руху : навч. посіб. Київ : НТУУ "КПІ", 2010. 172 с.

16. Темис Ю. М., Федоров И. М. Оптимизация формы стержней при неконсервативном нагружении по критерию потери устойчивости. *Проблемы прочности и пластичности*. Нижній Новгород, 2007. Вип. 69. С. 15–34.

17. Ярошевич Е., Жур К. Частотные уравнения продольных и поперечных колебаний ступенчатых стержнем и валов. *Механика машин, механизмов и материалов*. Мінськ, 2013. № 1(22). С. 36–40.

18. Жилин П. А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней : навч. посіб. СПб. : Видавництво Політехнічного університету, 2007. 101 с.

19. Каган-Розенцвейг Л. М. Метод вычисления частот собственных колебаний упругих стержней прямым интегрированием дифференциального уравнения изгиба. *Вестник гражданских инженеров*. СПб, 2019. № 1(72). С. 61–66.

20.Трубачев С. І., Колодежний В. А. Визначення власних частот і форм коливань стрижнів. *Young Scientist*. Херсон, 2017. № 2(42). С. 213–215.

21.Кузьмин А. А., Павлова Э. А. Расчет стержня переменного сечения : навч. посіб. СПб. : СПб ГТИ, 2016. 26 с.

22. Федоров И. М. Численный анализ математических моделей динамической устойчивости и оптимизация лопаток турбомашин : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 01.02.06. Москва, 2008. 18 с.

23. Сыч Т. В. Совершенствование технологии акустико-эмиссионного контроля на основе конечно-элементного анализа акустического тракта : дис. ... канд. техн. наук : 05.11.13. Новосибирск, 2016. 149 с.

24. Алокова М. Х., Культербаев Х. П. Изгибные колебания вертикального стержня переменного сечения с сосредоточенной массой. *Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки*. 2015. № 4(39). С. 77–86.

25. Улитин Г. М., Царенко С. Н. Поперечные колебания упругого стержня переменного сечения, моделирующего конструкции несущих опор. Труды ИПММ. 2016. Т. 30. С. 140–146.

26. Лавриненков А. Д. Расчет амплитудно-частотных характеристик ультразвуковых преобразователей продольных и продольно-крутильных колебаний с помощью пакета Abaqus. *Компьютерные исследования и моделирование.* 2014. Т. 6, No 6. С. 957–968.

27. Карташов Э. М. Новые модельные представления в теории колебаний. *Тонкие химические технологии*. 2017. Т. 12, No 1. С. 83–88.

28.Павлов В. П. Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов. *Вестник УГАТУ*. 2017. Т. 21, No 2. С. 3–16.

GENERALIZED SYMMETRY METHOD FOR THE PROBLEM ABOUT LONGITUDINAL OR TORSIONAL VIBRATIONS OF VARIABLE RIGID RODS

K. Trapezon
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"
ORCID: 0000-0001-5873-9519

Purpose. The aim of the work is to develop a generalized method of accurate analytical calculation of natural longitudinal or torsional oscillations of rods of variable stiffness, in particular with a variable cross section. Solving this problem, which involves solving second-order differential equations with variable coefficients, is fundamental to a number of eigenvalues. **Methodology**. The approach is based on the implementation of the ideas of symmetries of differential equations in a real physico-mathematical medium. The symmetry of the differential equation is another equation in a form similar to the original. If a way is found to convert the original equation into its symmetry, then the solution of the new equation will follow directly from the solution of the original equation through the relations used for the transformation. **Findings**. The main result is the method found for the construction of symmetries of second-order differential equations, which are the basis of many problems of mathematical physics, in particular, problems on eigenvalues. Three examples of construction of symmetries of equations from the theory of oscillations of cores are resulted, solutions of the corresponding problems for a case of variable rigidity of cores are received. **Originality**. The method of constructing symmetries of equations of the declared class, namely equations for problems on eigenvalues is new, analogues of which, in the statement presented in work are not found. Especially valuable is a variant of the method in which the target transformations in the construction of symmetries do not require an integration operation, which is not possible for every sub integral function. The greatest interest may be aroused by such a feature of the method, according to which it is possible to construct a theoretically infinite number of symmetries of the original equation. This means that it is quite possible to construct an infinite number of cases of rods of variable stiffness, the oscillations of which can be studied on the basis of exact solutions. **Practical value.** The method and the given practical examples, which confirm the universality and efficiency of this method, allow to expand the existing known rather narrow range of configurations of rods of variable cross-section, which can be used as working elements in power ultrasonic oscillatory systems. **Conclusions.** The formulated mathematical model of the method can be used after formulating the statement of the corresponding problem not only for oscillations, but also for other problems of a similar class, for example, in the case of studying the stability of rods of variable stiffness under external forces.

Key words: oscillation, displacement, rod, symmetry, model, method, ultrasound.

REFERENCES

1. Baldaev, R. (2006). *Primeneniya ul'trazvuka*. Moscow: Tekhnosfera. [In Russian]

2. Polishchuk, O., Avramov, K., Myagkokhleb, K. (2017). Eksperimental'nyy analiz vynuzhdennykh nelineynykh kolebaniy sterzhney s poperechnymi dyshashchimi treshchinami. *Problemi mashinobuduvannya*. Vol. 20(2), pp. 36–42. [In Russian]

3. Dong, S., (2012). Review on piezoelectric, ultrasonic, and magnetoelectric actuators. *Journal of Advanced Dielectrics*. Vol. 2(1), 1230001–1230019.

4. Kiselev, Ye. (2003). Intensifikatsiya protsessov mekhanicheskoy obrabotki ispol'zovaniyem energii ultrazvukovogo polya. Ul’yanívs'k, *UlGTU*. [In Russian]

5. Astashev, V., Krupenin, V. (2020). O modelirovanii volnovodov dlya ul'trazvukovykh tekhnologicheskikh mashin. *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya*. Vol. 1(149), pp. 3–10. [In Russian]

6. Zakharov, O., Brzhozovskyy B. (2002). Ulʹtrazvukovaya obrabotka nezhestko zakrep-lennymy ynstrumentamy. Saratov, *Vydavnytstvo Saratovs'koho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu*. [In Russian]

7. Shevchenko, O., Balʹchenko, M. (2015). Vykorystannya riztsetrymacha z pruzhnymy elementamy dlya ulʹtrazvukovoho tochinnya. *Visnyk ZHDTU*. Vol. 2(73), pp. 111–116. [In Ukranian]

8. Kisil, T., Kunytska, L., Tuz, V. (2018). Pro dotsilʹnistʹ vykorystannya ulʹtrazvukovykh kontsentratoriv v pʺyezoelektrychnykh viskozymetrakh dlya kontrolyu stanu plombuvalʹnoho materialu v stomatolohiyi. *Perspektyvni tekhnolohiyi ta prylady*. No. 13, pp. 74–78. [In Ukranian]

9. Skaliukh, A., Gerasimenko, T., Oganesyan, P. (2017). Vliyaniye geometricheskikh i fizicheskikh parametrov na rezonansnyye chastoty ul'trazvukovykh kolebaniy sistemy uprugikh i p'yezoelektricheskikh elementov. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. Vol. 4(91), pp. 5–13. [In Russian]

10. Akopyan, V. (2017). Ul'trazvuk v meditsine, veterinarii i biologii. Moscow, *Yurayt*. [In Russian]

11. Carovac, A., Smajlovic, F., Junuzovic, D., (2011). Application of ultrasound in medicine. *Acta Informatica Medica*. Vol. 19(3), pp. 168–171.

12. Han, O., Vapnichna, V., Shaydetsʹka, L. (2019). Zmina porystosti ta utrymuyuchoyi zdatnosti amiachnoyi selitry pid vplyvom ulʹtrazvukovoho oprominennya. *Visnyk KrNU imeni Mykhayla Ostrohrads'koho*, Issue 6, pp. 99–105. [In Ukranian]

13. Khmelev, V., Tsyganok, S., Lebedev, A. (2006). Issledovaniye i razrabotka poluvolnovykh p'yezoelektricheskikh ul'trazvukovykh kolebatel'nykh sistem. *Polzunovskiy vestnik*. No. 2, pp. 170–176. [In Russian]

14. Negrov, D., Yeremin, Ye., Novikov, A. (2012). Ul'trazvukovyye kolebatel'nyye sistemy dlya sinteza polimernykh kompozitsionnykh materialov. Omsk, *OmGTU*. [In Russian]

15. Trubachev, S. (2010). Teoriya kolyvanʹ ta stiykosti rukhu. Kiev, *NTUU “KPI”*. [In Ukranian]

16. Temis, Y. U., Fedorov, I. (2007). Optimizatsiya formy sterzhney pri nekonservativnom nagruzhenii po kriteriyu poteri ustoychivosti. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. No. 69, pp. 15–34. [In Russian]

17. Yaroshevich, Ye., Zhur, K. (2013). Chastotnyye uravneniya prodol'nykh i poperechnykh kolebaniy stupenchatykh sterzhnem i valov. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov*. Vol. 1(22), pp. 36–40. [In Russian]

18. Zhylyn, P. (2007). Prykladnaya mekhanyka. Teoryya tonkykh upruhykh sterzhney. SPb., *Vydavnytstvo Politekhnichnoho universytetu.* [In Russian]

19. Kagan-Rozentsveyg, L. (2019). Metod vychisleniya chastot sobstvennykh kolebaniy uprugikh sterzhney pryamym integrirovaniyem differentsial'nogo uravneniya izgib. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. Vol. 1(72), pp. 61–66. [In Russian]

20. Trubachev, S., Kolodezhnyy, V. (2017). Vyznachennya vlasnykh chastot i form kolyvanʹ stryzhniv. *Young Scientist*. Vol. 2(42), pp. 213–215. [In Ukranian]

21. Kuzmin, A., Pavlova, E. (2016). Raschet sterzhnya peremennogo secheniya. SPb., *SPb GTI*. [In Russian]

22. Fedorov, I. M., (2008). Chislennyy analiz matematicheskikh modeley dinamicheskoy ustoychivosti i optimizatsiya lopatok turbomashin. *Extended abstract of Candidate’s thesis (Tech. Sci.).* Moscow. (In Russian).

23. Sych, T. V., (2016). Sovershenstvovaniye techno-logii akustiko-emissionnogo kontrolya na osnove konechno-elementnogo analiza akusticheskogo trakta. *Candidate’s thesis* (*Tech. Sci*.). Novosibirsk. (In Russian).

24. Alokova, M., Kul'terbayev, KH. (2015). Izgibnyye kolebaniya vertikal'nogo sterzhnya peremennogo se-cheniya s sosredotochennoy massoy. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki*. Vol. 4(39), pp. 77–86. [In Russian]

25. Ulitin, G., Tsarenko, S. (2016). Poperechnyye kolebaniya uprugogo sterzhnya peremennogo secheniya, modeliruyushchego konstruktsii nesushchikh opor. *Trudy IPMM*. No. 30, pp. 140–146. [In Russian]

26. Lavrinenkov, A. (2014). Raschet amplitudno-chastotnykh kharakteristik ul'trazvukovykh preobrazovateley prodol'nykh i prodol'no-krutil'nykh kolebaniy s pomoshch'yu paketa Abaqus. *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye*. Vol. 6(6), pp. 957–968. [In Russian]

27. Kartashov, E. (2017). Novyye model'nyye predstavleniya v teorii kolebaniy. *Tonkiye khimicheskiye tekhnologii*. Vol. 12(1), pp. 83–88. [In Russian]

28. Pavlov, V. (2017). Poperechnyye kolebaniya sterzhnya s peremennym poperechnym secheniyem i vychisleniye yego sobstvennykh chastot metodom splaynov. *Vestnik UGATU*. Vol. 21(2), pp. 3–16. [In Russian]

Стаття надійшла 15.03.2021.