УДК 37.378 DOI: 10.30929/1995-0519.2021.3.11-16

ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

В. П. Ляшенко, О. Б. Кобильська, Т. А. Набок

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

ORCID: 0000-0002-4538-631X; 0000-0002-4210-1534; 0000-0002-1501-9009

У статті розглядається використання систем комп'ютерної математики під час моделювання природничих та технологічних процесів у різних галузях промисловості. В роботі розглянуто ряд математичних моделей, які представлені у вигляді задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку. Математичні моделі, що розглядаються в роботі описують хімічні та екологічні процеси. Для розв'язання задач, запропонованих у цих моделях використовується чисельний метод Ейлера. Цей метод реалізовано в системах комп'ютерної математики Mathcad і Matlab. Показано, як за допомогою спеціальних функцій систем комп'ютерної математики розв'язуються задачі Коші, що виникають у математичних моделях. В системах Mathcad і Matlab побудовані графіки, які представляють собою чисельні та аналітичні розв'язки задач, що описують представлені моделі. Розглянуті математичні моделі показують важливість реалізації професійної спрямованості математичної підготовки студентів природничих і інженерних спеціальностей. В роботі зроблено висновок про те, що багато технологічних і фізичних процесів у різних галузях промисловості можуть бути представлені за допомогою задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Саме математичне моделювання дозволяє вивчити і оцінити різні процеси (фізичні, економічні, екологічні), а тому знання основ моделювання та спеціальних математичних пакетів дуже важливе під час підготовки сучасних фахівців з різних спеціальностей.

Ключові слова: математичне та комп'ютерне моделювання, диференціальне рівняння, задача Коші, чисельні методи, Mathcad, Matlab.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. В освітніх програмах (ОП) природничих і інженерних спеціальностей мають бути присутні освітні компоненти в яких викладаються як класичні методи вищої математики, теорії ймовірностей, математичної статистики, так і спеціальні, що тісно пов'язані із особливостями ОП спеціальності. Аналіз сучасного стану підготовки майбутніх фахівців свідчить про те, що професійна математична підготовка є однією з важливих умов успішної адаптації майбутнього фахівця в інформатизованому суспільстві. Математична підготовка формує такі програмні результати навчання як конкурентоспроможність та високу працездатність. Професійна підготовка фахівця значною мірою залежить від фундаментальної математичної підготовки, зорієнтованої на глибокі природничо-наукові і технічні знання, засвоєння глибинних міжпредметних зв'язків. Загальним результатом реалізації професійної спрямованості навчання математики є формування математичних компетентностей (за освітньо-професійною програмою), якими повинен оволодіти здобувач вищої освіти у результаті вивчення освітніх компонентів математичного циклу. Показниками даної сформованості вважаємо наступні: пізнавальна активність студента та його налаштованість на успішне навчання; здатність студента систематизувати математичні знання та вміння їх самостійно застосовувати під час розв'язування професійних задач; наявність відповідного рівня розумових можливостей та технологічних умінь студента; професійна самосвідомість студента, здатність до самооцінки і самовдосконалення. Оволодіння математичними компонентами майбутнього фахівця з інженерних та природничих спеціальностей – необхідна умова формування професійної компетентності у ЗВО [1].

Пізнання будь-якого об'єкта, системи, процесу, явища зводиться, по суті, до розробки та дослідження його фізичної та математичної моделей. Математичне моделювання багатьох задач механіки, фізики, хімії та інших областей науки і техніки приводить до диференціальних рівнянь, звичайних або з частинними похідними. Задачі, що виникають у математичних моделях, настільки складні, що досліджувати їх за допомогою аналітичних методів практично неможливо. Доводиться вдаватися до комп'ютерного моделювання [1–5].

Студентам екологічних і біологічних спеціальностей доводиться мати справу з моделями біологічних систем (Модель Мальтуса, логістичне рівняння, кінетичні рівняння Лотки, кінетична модель іонотропного холінорецептора), які описуються диференціальними рівняннями різного порядку. Студенти металургійних та електротехнічних спеціальностей мають справу з моделями лінійних динамічних систем, які представляють у вигляді диференціального рівняння n-го порядку, системи n диференціальних рівнянь першого порядку, моделями електричних машин постійного струму, моделями теплових процесів у синхронних та асинхронних машинах, моделями систем електроприводу та ін [1]. Студенти економічних спеціальностей вивчають модель демографічного процесу, зростання інвестицій, модель природного росту випуску продукції, модель динамічної рівноваги в економіці.

У різних областях людської діяльності виникає велика кількість задач, які зводяться до розв'язання диференціальних рівнянь. Характер цих задач і методику їх розв'язання можна схематично описати приблизно так. Відбувається певний процес, наприклад фізичний, хімічний, біологічний. Нас цікавить певна функціональна характеристика цього процесу, наприклад закон зміни з часом температури або тиску, маси, положення в просторі.

Якщо є досить повна інформація про перебіг цього процесу, то можна спробувати побудувати його математичну модель. У багатьох випадках такою моделлю служить диференціальне рівняння, одним з розв'язків якого є шукана функціональна характеристика процесу.

Диференціальне рівняння моделює процес в тому сенсі, що воно описує еволюцію процесу, характер змін, що відбуваються з матеріальною системою, можливі варіанти цих змін в залежності від початкового стану системи.

Мета роботи. Показати можливості застосування систем комп'ютерної математики при розв'язанні задач, що виникають у математичних моделях різних природничих та технологічних процесів і, таким чином, розкрити важливість реалізації професійної спрямованості математичної підготовки студентів природничих та інженерних спеціальностей.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Розглянемо математичні моделі, що приводять до диференціальних рівнянь першого порядку.

Найпростіше звичайне диференціальне рівняння має вигляд:

$$y' = f(x, y(x)). \quad (1)$$

Для нього може бути поставлена задача Коші: знайти розв'язок $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, який задовольняє (1) і початковій умові:

$$y(a) = y_0. \quad (2)$$

Іншими словами, потрібно отримати інтегральну криву $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(a, y_0)$.

Така задача може бути розв'язана за допомогою чисельного методу Ейлера [6].

Розглянемо ряд процесів і відповідних математичних моделей [7–10].

Приклад 1. Хімічна інженерія.

Концентрація солі x в домашній миловарні визначається як функція часу:

$$\frac{dx}{dt} = 37.5 - 3.5x.$$

У початковий момент часу $t = 0$, концентрація солі в резервуарі становить 50 г/л. Використовуючи метод Ейлера та розмір кроку за часом $h = 1.5$ *хв* визначити, якою буде концентрація солі через 3 хвилини?

Розв'язання:

$$\frac{dx}{dt} = 37.5 - 3.5x,$$
$$f(t, x) = 37.5 - 3.5x.$$

Метод Ейлера:

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i)h.$$

Для: $i = 0$, $t_0 = 0$, $x_0 = 50$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + f(t_0, x_0)h \\ &= 50 + f(0,50)1.5 \\ &= -156.25 \text{ г/л} \end{aligned}$$

x_1 – наближене значення концентрації солі при: $t = t_1 = t_0 + h = 0 + 1.5 = 1.5$ хв

$$x(1.5) \approx x_1 = -156.25 \text{ г/л}$$

Для: $i = 1$, $t_1 = 1.5$, $x_1 = -156.25$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + f(t_1, x_1)h \\ &= -156.25 + f(1.5, -156.25)1.5 \\ &= 720.31 \text{ г/л} \end{aligned}$$

x_2 – наближене значення концентрації солі при: $t = t_2 = t_1 + h = 1.5 + 1.5 = 3$ *хв*,

$$x(3) \approx x_2 = 720.31 \text{ г/л}$$

На рис. 1 представлене порівняння точного розв'язку з чисельним розв'язком за методом Ейлера з розміром кроку за часом $h = 1.5$.

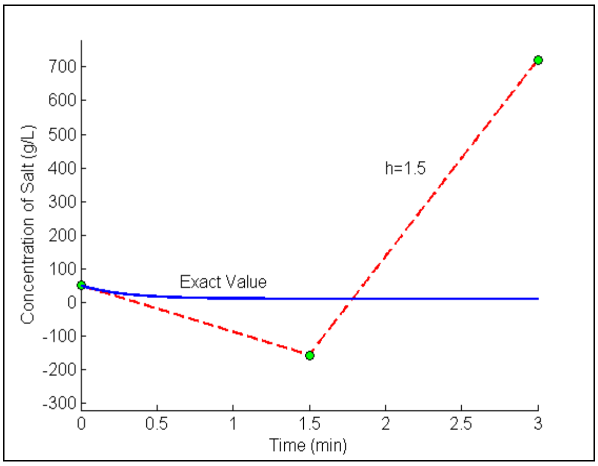

Рисунок 1 – Порівняння результатів точного розв'язку та розв'язку за методом Ейлера

В таблиці 1 наведені результати експеременту з різними величинами розміру кроку.

Таблиця 1 – Концентрація солі впродовж 3 хвилин як функція розміру кроку, h

крок, h	$x(3)$	E_t	$\lvert\epsilon_t\rvert$ %
3	362.5	373.22	3483.0
1.5	720.31	709.60	6622.2
0.75	284.65	273.93	2556.5
0.375	10.718	0.0024912	0.023249
0.1875	10.714	0.0010803	0.010082

На рис. 2 показано, як концентрація солі змінюється залежно від часу для різних розмірів кроків.

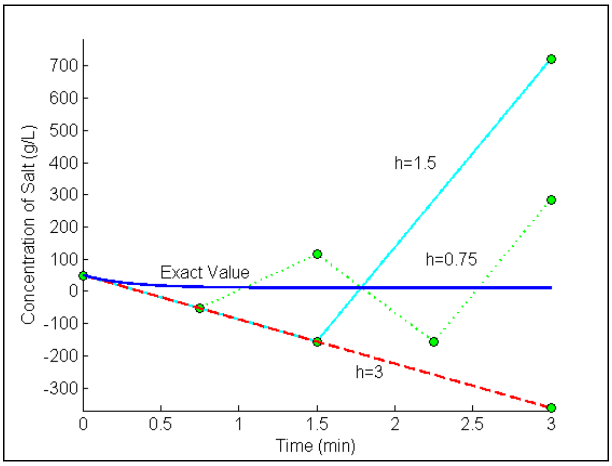

Рисунок 2 – Порівняння результатів точного розв'язку та розв'язку за методом Ейлера з різними кроками

Значення розрахункової концентрації солі при $t = 3$ *хв* як функції величини кроку наведено на рисунку 3.

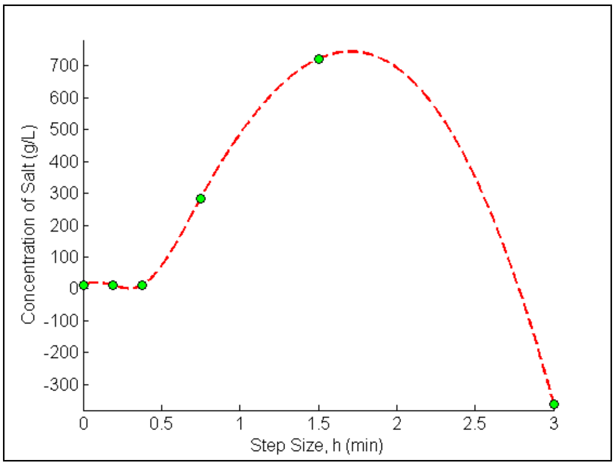

Рисунок 3 – Вплив розміру кроку в методі Ейлера

Точний розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку має вигляд:

$$x(t) = 10.714 + 39.286e^{-3.5t},$$
$$x(3) = 10.715 \text{ г/л.}$$

Приклад 2. Забруднене озеро має початкову концентрацію бактерій 10^7 ч/м^3, тоді як прийнятний рівень – лише 5×10^6 ч/м^3. Концентрація бактерій зменшиться у міру надходження в озеро прісної води. Диференціальне рівняння, яке регулює концентрацію забруднюючої речовини як функцію часу (у тижнях), визначається як:

$$\frac{dC(t)}{dt} + 0.06C(t) = 0, \quad C(0) = 10^7.$$

Використовуючи метод Ейлера та розмір кроку 3,5 тижні, необхідно знайти концентрацію забруднювача через 7 тижнів.

Розв'язок. Розв'язок методом Ейлера має вигляд:

$$\frac{dC}{dt} = -0.06C,$$
$$f(t, C) = -0.06C.$$

$$C_{i+1} = C_i + f(t_i, C_i)h$$

For $i = 0$, $t_0 = 0$, $C_0 = 10^7$

$$C_1 = C_0 + f(t_0, C_0)h$$
$$= 7.9 \times 10^6 \text{ ч/м}^3$$

і визначає наближене значення концентрації бактерій для:

$$t = t_1 = t_0 + h = 0 + 3.5 = 3.5 \textit{ тижнів}$$
$$C(3.5) \approx C_1 = 7.9 \times 10^6 \text{ ч/м}^3$$

For $i = 1$, $t_1 = 3.5$, $C_1 = 7.9 \times 10^6$

$$C_2 = C_1 + f(t_1, C_1)h$$
$$= 6.241 \times 10^6 \text{ ч/м}^3$$

C_2 – наближене значення концентрації бактерій для:

$$t = t_2 = t_1 + h = 3.5 + 3.5 = 7 \text{ тижнів}$$
$$C(7) \approx C_2 = 6.241 \times 10^6 \text{ ч/м}^3.$$

Точний розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку має вигляд:

$$C(t) = 1 \times 10^7 e^{\left(\frac{-3t}{50}\right)}.$$

$$C(7) = 6.5705 \times 10^6 \text{ ч/м}^3.$$

На рис. 4 зображено порівняння точного розв'язку з чисельним розв'язком методом Ейлера для розміру кроку $h = 3.5$.

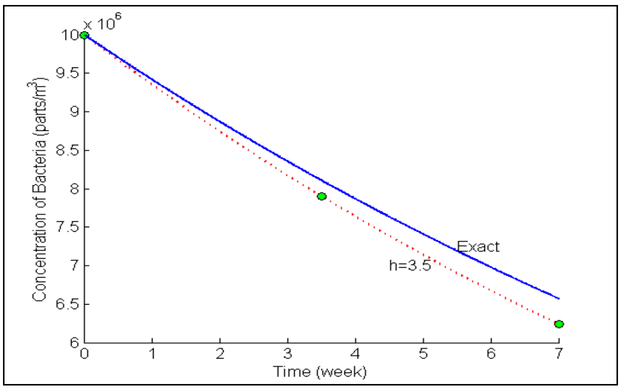

Рисунок 4 – Порівняння точного розв'язку та розв'язку за методом Ейлера

Таблиця 2 – Концентрація бактерій як функція розміру кроку

h	C(7)	E_t	$\lvert\in_t\rvert$ %
7	5.8×10^6	770470	11.726
3.5	6.241×10^6	329470	5.0144
1.75	6.4164×10^6	154060	2.3447
0.875	6.4959×10^6	74652	1.1362
0.4375	6.5337×10^6	36763	0.55952

На рис. 5 показано, як концентрація бактерій змінюється залежно від часу для різних розмірів кроків.

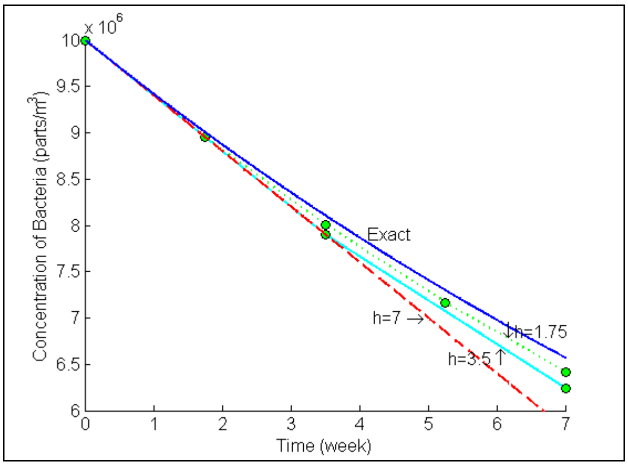

Рисунок 5 – Порівняння розв'язку отриманого методом Ейлера з точним розв'язком для різних розмірів кроків

Значення концентрації бактерій для $t = 7$ тижнів представлено як функція розміру кроку на рис. 6.

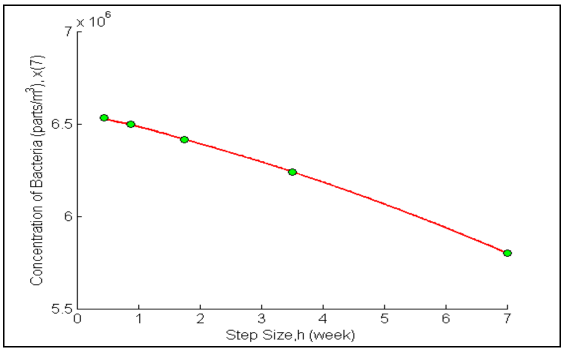

Рисунок 6 – Вплив розміру кроку в методі Ейлера

Розв'язання засобами MathCAD.

Отже, дано рівняння виду $dy/dx = D(x,y)$, інтервал пошуку розв'язку $x \in [a,b]$ з початковою умовою $y(a) = const$. Інтервал $[a,b]$ будемо розбивати з кроком $h = (b-a)/n$, де n – число значень, які приймає змінна x. Спочатку задаємо функцію D(x,y), початкову умову, інтервал пошуку розв'язку і кількість вузлів сітки, наприклад так:

$$D(x,y) := 0.8\cdot y(x)\cdot\left(1 - \frac{y(x)}{800}\right)$$

$$a := 0 \qquad b := 10$$

$$n := 10$$

$$y_0 := 100$$

Метод Ейлера. Для похідної, отримуємо $(y[i+1]-y[i])/(x[i+1]-x[i]) = D(x,y)$, звідки, при постійному кроці вздовж x, рівному $h = x[i+1]-x[i]$, маємо $y[i+1] = y[i] + h * D(x,y)$.

```
Eyler(f,y0,a,b,n) := | x0 ← a
                     | y0 ← y0
                     | h ← (b − a)/n
                     | for i ∈ 0..n − 1
                     |   | y(i+1) ← y(i) + h·f(x(i),y(i))
                     |   | x(i+1) ← x(i) + h
                     | augment(x,y)

Z := Eyler(D,y0,a,b,n − 1)
```

Рисунок 4 – Метод Ейлера в MathCAD

Отримуємо той самий результат, що і стандартна функція для розв'язання диференціального рівняння – матрицю з 2 стовпців, перший з яких – значення аргументу $x[i]$ в вузлах сітки, а другий – обчислені значення функції $y[i]$.

Для перевірки отриманого розв'язку оцінимо норму різниці між обчисленими підпрограмою значеннями $y[i]$ і за допомогою точного розв'язку $f(x)$ в тих же значеннях аргументу $x[i]$. Також побудуємо графік.

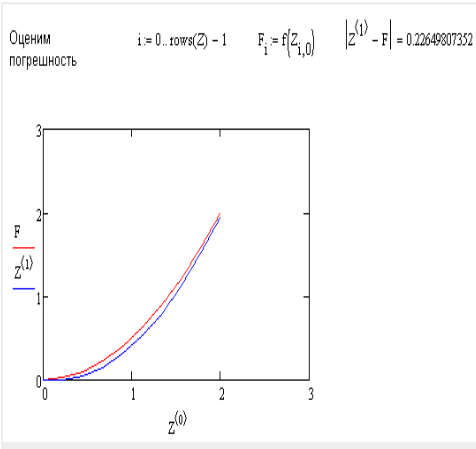

Рисунок 7 – Метод Ейлера в MathCAD

Також в MathCAD є можливості розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння вищих порядків за допомогою вбудованих функцій, зокрема функції Odesolve.

Алгоритм застосування вбудованої функції Odesolve вимагає запису обчислювального блоку, що складається з трьох частин:

1) ключового слова Given (Дано);

2) диференціального рівняння і початкових або граничних умов до нього;

3) функція Odesolve (x, xk, n) (розв'язок ЗДР).

Приклади використання функції Odesolve наведено на рис.8.

Приклад 3. Розглянемо задачу Коші для логістичного рівняння першого порядку Ферхюльста:

$$y'(t) = 0{,}8y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{800}\right) \qquad t \in [0,10] \qquad y(0) = 100,$$

яке описує динаміку зміни чисельності популяції та визначає швидкість приросту населення пропорційно кількості населення, з лімітованою максимальною чисельністю популяції.

Розв'язок задачі Коші в MathCAD зображений на рис.8.

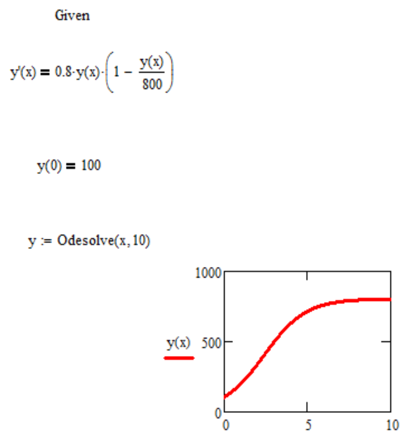

Рисунок 8 – Розв'язання задачі Коші за допомогою функції Odesolve

Розв'язання цієї задачі в Matlab зображено на рис. 9

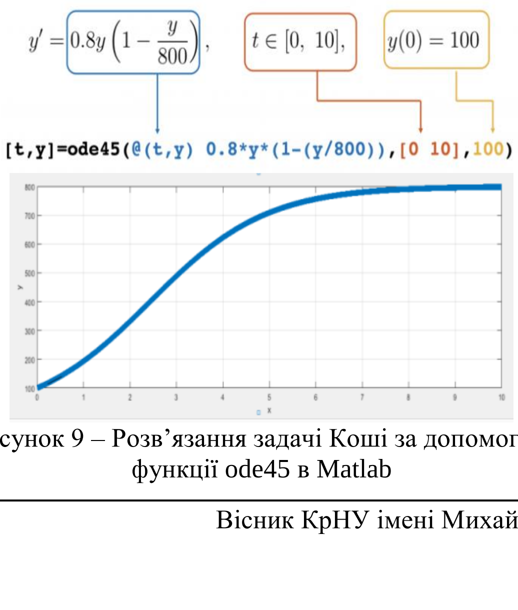

Рисунок 9 – Розв'язання задачі Коші за допомогою функції ode45 в Matlab

У Matlab функція ODE1 реалізує метод Ейлера [2].

Реалізація метода Ейлера:

```
f=@(x,y)0.8*y*(1-y/800);
>> Setka=10:10:10000;
for k=1:length(Setka)
   %определяем параметры сетки
   N=Setka(k); h=1.0/(N-1);
   %задаем начальное условие
   y(1)=1;
   %применяем алгоритм метода ломаных/Эйлера
      for n=1:(N-1)
         y(n+1)=y(n)+ h*((n-1)*h*y(n)); %где (n-1)*h -> x
      end
   %вычисляем величину M(1) в оценке
   %погрешности численного решения
   M(k)=abs(y(N)-exp(0.5))/h;
   step(k)=h;
end
%рисуем зависимость величины M(1) от шага
plot(step,M);
```

ВИСНОВКИ. В роботі розглянуто ряд задач практичного спрямування, що ілюструють можливості систем комп'ютерної математики під час моделювання процесів в різних галузях науки і техніки. Зокрема розглянута задача хімічної інженерії, екології. Моделі представлені у вигляді задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Показано, що такі задачі можуть бути розв'язані за допомогою методу Ейлера, який реалізований в системах комп'ютерної математики Mathcad, Matlab.

На прикладі розглянутих задач професійного спрямування показана важливість реалізації професійної спрямованості математичної підготовки студентів природничих і інженерних спеціальностей, важливість формування вмінь використовувати для розв'язання задач професійного спрямування математичного апарату та інформаційних технологій, інтерпретувати та аналізувати результати досліджень.

Перспективою подальших досліджень даної теми є розробка системи професійно-орієнтованих задач (для розв'язання в системах комп'ютерної математики) для студентів інженерних і природничих спеціальностей, будуть використані під час математичної підготовки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ковальчук М. Б. Змістові аспекти курсу вищої математики у вищих технічних навчальних закладах. *Фізико-математична освіта*. 2017. Вип 3(13). С. 67–72.

2. Demyanchenko O., Kobilskaya E., Lyashenko V., Nabok T. The mathematical model of the thermal process in Spoke-Type Permanent Magnet Synchronous Machines. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна: сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* 2020. Вип. 45. С. 41–49.

3. Поршнев С. В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. Москва : Лань, 2011. 736 с.

4. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. 184 с.

5. Тарасевич Ю. Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Москва : Едиториал УРСС, 2003. 144 с.

6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы : учеб. пособие для вузов. Москва : Бином, 2003. 233 с.

7. C. L. Dym. Principles of Mathematical Modeling. Elsevier, 2004. 303 p.

8. Otto S., Day T. A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.

9. Слесаренко А. П., Дем'янченко О. П., Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Чисельно-аналітичний метод у математичних моделях високотемпературних процесів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2015. Вип. 3(54). С. 467–471.

10. Mathews J. H., Fink, Kurtis K. Numerical Methods Using Matlab. 4 th Edition: New Jersey, Upper Saddle River, 2004. 680 p.

APPLICATION OF MATHEMATICS SOFTWARE FOR SOLVING APPLIED PROBLEMS

Lyashenko V., Kobilskaya E., Nabok T.
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University
ORCID: 0000-0002-4538-631X; 0000-0002-4210-1534; 0000-0002-1501-9009

Purpose. To show the possibilities of using mathematics software in solving problems arising in the construction of mathematical models of various processes and, thus, to reveal the importance of realizing the professional orientation of the mathematical training of students of natural and engineering specialties. **Methodology.** A number of mathematical models that are presented in the form of a Cauchy problem for a common first-order differential equation are considered in this paper. Mathematical models considered in this paper describe chemical and ecological processes. Euler's numerical method is used to solve the problems that describe the proposed models. This method is implemented in special mathematical software (Mathcad, Matlab). **Findings.** It is shown how the use of special functions designed to solve the Cauchy problem solves the problems proposed in mathematical models. Graphs are built in Mathcad and Matlab, including graphs that can be used to compare analytical and numerical solutions of problems obtained by Euler's method. **Originality.** The paper concludes that mathematical models of many technological and physical processes in different industries can be represented by the Cauchy problem for a common differential equation. **Practical value.** The considered mathematical models show the importance of realization of professional orientation of mathematical training of students of natural and engineering specialties. **Conclusions.** Mathematical modeling allows you to study and evaluate various processes (physical, economic, environmental), and therefore knowledge of the basics of modeling and special mathematical software is very important in the training of modern specialists in various specialties. The problems presented in the article are used in teaching the courses of numerical methods and computer mathematics in the study of the topic «Numerical Solution of Differential Equations». References 10, tables 2, figures 9.

Key words: mathematical and computer modeling, differential equation, Cauchy problem, numerical methods, Mathcad, Matlab.

REFERENCES

1. Kovalchuk, M. B. (2017). Zmistovi aspekty kursu vyshchoyi matematyky u vyshchykh tekhnichnykh navchal′nykh zakladakh [Semantic aspects of the course of higher mathematics in higher technical educational institutions]. *Fizyko-matematychna osvita*. 3(13), pp. 67–72. [in Ukrainian].

2. Demyanchenko, O., Kobilskaya, E., Lyashenko, V., Nabok, T. (2020). The mathematical model of the thermal process in Spoke-Type Permanent Magnet Synchronous Machines. *Visnyk Kharkivs'koho natsional'noho universytetu im. V. N. Karazina: ser. Matematychne modelyuvannya. Informatsiyni tekhnolohiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya*. 45. pp. 41–49.

3. Porshnev, S. V. (2011). Komp'yuternoye modelirovaniye fizicheskikh protsessov v pakete MATLAB [Computer simulation of physical processes in the MATLAB package]. Moskva: Lan. [in Russian].

4. Riznichenko, G. Yu. (2003). Matematicheskiye modeli v biofizike i ekologii [Mathematical models in biophysics and ecology]. Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy. [in Russian].

5. Tarasevich, Yu. Yu. (2003). Matematicheskoye i komp'yuternoye modelirovaniye [Mathematical and computer modeling]. Moskva: Yeditorial URSS. [in Russian].

6. Bakhvalov, N., Zhidkov, N. et al. (2003). Chislennye metody [Numerical methods]. Moskva: Binom. [in Russian].

7. C. L. Dym. (2004). Principles of Mathematical Modeling. Elsevier.

8. Otto, S. & Day, T. (2007). A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution. Princeton University Press. Princeton. NJ.

9. Slesarenko, A. P., Demyanchenko, O. P., Lyashenko, V. P., Kobilskaya, E. B. (2015). Chysel′no-analitychnyy metod u matematychnykh modelyakh vysokotemperaturnykh protsesiv [Numerical-analytical method in mathematical models of high-temperature processes]. *Visnyk Khersons'koho natsional'noho tekhnichnoho universytetu*. Kherson, 3(54), pp. 467–471.[In Ukrainian].

10.Mathews, J. H., Fink, Kurtis K. Numerical Methods Using Matlab. 4 th Edition: New Jersey. Upper Saddle River. 2004, 680 p.

Стаття надійшла 10.06.2021.