

ВЛАСНІ ЗГІННІ КОЛИВАННЯ БАЛКИ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМ ЗАКОНОМ ЗМІНИ ШИРИНИ

К. О. Трапезон

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ORCID: 0000-0001-5873-9519

О. Г. Трапезон

Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка Національної академії наук України

ORCID: 0000-0002-8567-9854

Наведено алгоритм побудови замкнутого аналітичного розв'язку задачі про коливання балки, ширина якої змінюється за спеціальним законом. На основі поєднання методів факторизації та симетрій в поєднанні з апроксимацією відповідних функцій визначено підхід, за яким можна отримати розв'язок, а саме знайти частотні рівняння, а отже і власні частоти та побудувати власні форми коливань для балки даної конфігурації. Проведено, як приклад, дослідження коливань симетричної балки зі звуженням до центру конструкції при $\alpha=1$ у випадках двостороннього жорсткого закріплення та у випадку консольного закріплення. З урахуванням відповідних граничних умов, розраховано власні частотні числа та амплітудні коефіцієнти, які необхідні для побудови власних форм коливань. Отримано підтвердження точності та практичної ефективності запропонованої методології пошуку та побудови аналітичного розв'язку задачі про коливання згаданої балки змінної ширини. Зокрема показано, що отримані результати розрахунків власних чисел для жорстко закріпленої та консольної балок з обраним законом зміни ширини майже повністю збігаються з відповідними результатами, які були раніше отримані для цієї балки при $\alpha=1$ на основі традиційного методу рядів. Розходження значень розрахунку власних чисел для перших трьох форм коливань не перевищує 0,6%.

Ключові слова: вигин, балка, ширина, консоль, симетрія, власне число, ефективність.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Резонансні коливання, що виникають при експлуатації промислових та будівельних конструкцій зумовлюють виникнення в їх елементах циклічних напружень. Стрімке зростання рівня цих напружень та їх дія упродовж відповідного відрізка часу може призвести до їх серйозних пошкоджень або навіть до катастрофічного руйнування. Балки змінного перерізу є одними з найбільш розповсюджених складових частин цих конструкцій і тому вивчення їх поведінки при коливаннях завжди було і залишається предметом постійної уваги. Наприклад, балки широко використовуються в різних інженерних спорудах в якості основних або допоміжних елементів таких як мости, аркові переходи, несучі поверхні будівель. Крім цього, балки залучаються як основні елементи в самих різноманітних машинах та механізмах, наприклад, в технологічному прокатному обладнанні, в роботизованих пружних конструкціях, в технологічних лініях гальваніки та в технологічному нанорозмірного друку при створенні електронних приладів [1-5].

Проблеми аналізу коливань балки відображені у багатьох наукових публікаціях. Наприклад, в статті [6] для вивчення вільних коливань балки змінної ширини (трапеціоїдальна форма) автори пропонують використовувати теорію збурень, на основі якої функцію переміщень розкладають у ряд з використанням малого параметру. Слід відмітити, що на основі чисельного методу збурень перша власна частота коливань знайдена наближено і лише для випадку консольної балки трапеціоїдальної форми. Широке застосування на практиці знайшли балки прямокутного поперечного перерізу, жорсткості яких при згині залежить від ширини $b(x)$ та товщини $h(x)$. У випадку змінної товщини балки її власні коливання можна дослідити точними методами (на основі функцій Бесселя) лише в окремих випадках і найчастіше розробники використовують для цього наближені чисельні методи.

Практичне значення мають випадки $b=\text{const}$;

$h=h(x)$ та $b=b(x)$; $h=\text{const}$. Найбільш відомі результати розв'язку задач для випадків (клин, піраміда, конус) пов'язані з відомими іменами -Кіргхофом, Мононобе, Динником. Точний розв'язок задачі про коливання балки зі змінною шириною можна отримати безпосередньо лише у випадку закону зміни ширини $b=e^{\alpha x}$, оскільки при цьому відповідне рівняння не буде містити змінних коефіцієнтів. Набір розв'язків, які отримано аналітичним шляхом, для балок змінної ширини порівняно нещодавно був значно розширений за рахунок результатів статті [7]. В цій роботі містяться результати розв'язання задач про коливання балок з шириною $b=e^{\alpha x}$; $e^{\alpha x^2}$; $x^{\pm 4}$. Аналіз власних коливань балок при $b=e^{\alpha x}$; x^4 ; x^{-4} виконано на основі замкнених розв'язків. Для балки з шириною $b=e^{\alpha x^2}$ на основі розв'язку у формі безкінечних рядів. Переважні функції $b(x)$, для яких знайдено точні розв'язки не симетричні і тому не дають можливості для безпосереднього аналізу коливань симетричних балок. У цьому полягає їх недолік, який можна позбутись через «зшивання» двох розв'язків в перерізі $x=0$. У свою чергу недолік функції $b=e^{\alpha x^2}$ полягає у неможливості застосування до аналізу коливань точних методів, тобто розв'язки на основі методу рядів вирізняються своїми незручностями – громіздкість, технічні ускладнення у розрахунках, відсутність компактних та наочних результатів, наявність значного об'єму розрахункової роботи задля підвищення точності, тощо. Альтернативою методу рядів може стати підхід, який відрізняється спрощеним аналізом та розв'язанням задачі про коливання балки з шириною $b=e^{\alpha x^2}$ на основі методу симетрій.

Викладене дозволяє стверджувати, що доцільно провести дослідження з пошуку та розробки методології замкнутого аналітичного розв'язку задачі про коливання балки змінної ширини за законом симетричної функції $e^{\alpha x^2}$.

Метою роботи є отримання в замкненому вигляді аналітичного розв'язку задачі про власні коливання балки, ширина якої змінюється за законом $e^{\alpha x^2}$. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– перетворити, використовуючи метод факторизації, вихідне диференціальне рівняння IV порядку до виду, що дозволяє розкласти його на систему двох спряжених рівнянь II порядку;

– побудувати, використовуючи метод симетрії і схему його застосування, апроксимуючу функцію, при якій на основі вибору змінних коефіцієнтів можна отримати точні розв'язки цих рівнянь II порядку, а отже і розв'язок вихідного рівняння IV порядку;

– дослідити коливання симетричної балки зі звуженням до центру у випадку двостороннього жорсткого закріплення її торцевих перерізів; розрахувати частотні числа k_i ($i=1...6$) і необхідні для побудови форм коливань числові параметри; порівняти отримані частотні числа з тими значеннями, що розраховані раніше [8] на основі методу рядів;

– виконати в аналогічному об'ємі дослідження коливань консольної балки з заданою шириною, яка закріплена по широкому кінці (при $x=1$) і є вільною на тонкому (при $x=0$).

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. В якості математичної моделі дослідження використано диференціальне рівняння малих коливань для балки з прямолінійною віссю і змінним поперечним перерізом. Рівняння визначається на основі положень технічної теорії стрижнів (теорії балок Ейлера-Бернуллі) за умови дотримання наступних припущень:

– коливання відбуваються в одній з головних площин вигину балки і розміри поперечного перерізу малі у порівнянні з довжиною балки; ширина балки складає не більше 1/5 її довжини;

– поперечні перерізи при деформації залишаються плоскими (гіпотеза плоских перерізів) і є перпендикулярними до деформованої осі балки;

– нормальні напруження на площадках, які паралельні осі вважаються нехтовно малими; не враховується також розтягування вісі.

Для полегшення пошуку аналітичного розв'язку використовується прийом (метод факторизації) розкладання вихідного рівняння IV порядку на два спряжених рівняння II порядку зі змінними коефіцієнтами.

Для отримання розв'язку даної крайової задачі використовується метод апроксимації змінних коефіцієнтів у розв'язувальних рівняннях II порядку.

Для побудови потрібної апроксимуючої функції, при якій рівняння II порядку мають точні розв'язки, використовується метод симетрії. Для розв'язання отриманих частотних рівнянь використовується метод послідовних пробних розрахунків. Матеріали, для яких придатні отримані результати дослідження, повинні відповідати закону Гука.

1. *Вихідне диференціальне рівняння та його перетворення.*

Розглянемо балку, ширина якої змінюється за

законом $b = e^{\alpha x^2}$. Для практики цей випадок геометрії балки викликає особливий інтерес, оскільки є можливість в межах єдиної функції змінювати конфігурацію ширини балки через зміну значення та знаку коефіцієнта α і розміру l_1 (рис. 1).

Вочевидь, що симетрична функція $b = e^{\alpha x^2}$ дозволяє описати одним виразом, отриманим в якості розв'язку відповідного рівняння, коливання балки, яка є симетричною відносно початку координат.

Вихідним диференціальним рівнянням задачі про власні коливання балки змінної ширини $b=b(x)$ є рівняння форм коливань наступного вигляду

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - k^4 b W = 0, \quad (1)$$

де $W=W(x)$ – прогини балки при коливаннях; $x=X/l$; X – відносна і абсолютна змінні; l – незмінна частина загальної довжини балки; $w=2\pi f$ – колова частота; f – частота коливань; E ; $\rho=\gamma/g$ – модуль пружності і щільність матеріалу балки; γ – питома вага; g – прискорення сили тяжіння.

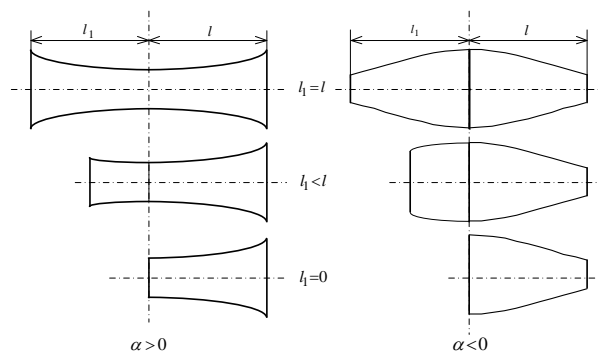


Рисунок 1 – Можлива конфігурація балки шириною $e^{\alpha x^2}$

Рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$W^{(4)} + 2 \frac{b'}{b} W''' + \frac{b''}{b} W'' - k^4 W = 0, \quad (2)$$

або

$$W^{(4)} + 2tW''' + (t' + t^2)W'' + \chi^2 W - D^4 W = 0, \quad (3)$$

де $t=b'/b$; χ – стала; $D^4=k^4+\chi^2$.

Пошук розв'язання рівняння (3) значно спроститься, якщо можна буде представити це рівняння в символічній формі:

$$\left(A \frac{d^2}{dx^2} + B \frac{d}{dx} + C \right)^2 W - D^4 W = 0, \quad (4)$$

де A, B, C – функції, які підлягають визначенню. Якщо представлення (4) можна реалізувати, то відповідно до методу факторизації рівняння IV порядку (4) розкладається на два спряжені рівняння II порядку. Розгорнувши вираз (4) і порівнявши отримане співвідношення з (3) можна отримати

критеріальне рівняння наступного виду:

$$2t''' + 2tt'' - t'^2 + 4\chi^2 = 0.$$

Оскільки за умовою задачі $b = e^{\alpha x^2}$, то підстановка в це рівняння $t=b'/b=2\alpha x$ призводить до рівності $\chi=\alpha$, при якій рівняння для змінної t буде виконуватись. При цьому з співставлень (3) та (4) впливають вирази для функцій A, B, C а саме:

$$A=1; B=2\alpha x; C=-\alpha; D^4=k^4+\alpha^2.$$

Спряжені рівняння II порядку приймають вигляд

$$W_i'' + 2\alpha x W_i' + (\pm D^2 - \alpha) W_i = 0. \quad (i=1,2) \quad (5)$$

Таким чином, розв'язок рівняння (3) можна знайти у вигляді суми розв'язків двох рівнянь (5), тобто $W=W_1+W_2$, де W_1 – розв'язок при знаку «плюс» перед D^2 , а W_2 – при знаку «мінус».

Отримати розв'язок рівнянь (5) у замкненому вигляді важко і тому для досягнення мети використаємо метод симетрії для диференціальних рівнянь II порядку [9].

2. *Схема реалізації методу симетрій.*

Запишемо рівняння (5) у наступній формі

$$W_{1,2}'' + \frac{F'}{F} W_{1,2}' \pm \lambda_{1,2}^2 W_{1,2} = 0, \quad (6)$$

де

$$F = e^{\alpha x^2}; \lambda_1^2 = D^2 - \alpha = \sqrt{k^4 + \alpha^2} - \alpha;$$

$$\lambda_2^2 = D^2 + \alpha = \sqrt{k^4 + \alpha^2} + \alpha.$$

Для того, щоб знайти розв'язок рівнянь (6) можна виконати заміну функції $e^{\alpha x^2}$ деякою функцією апроксимації $F_1(x)$, при якій розв'язок цих рівнянь будуть точними. Вибір апроксимуючої функції при якій для рівняння II порядку виду (6) будуть знайдені розв'язки, можна здійснити на основі методу симетрій. Цей метод дозволяє побудувати цілий ряд таких функцій F_j ($j=1,2,3$), особливістю яких є наявність в їх структурі набору невизначених довільних сталих. Варіювання значеннями цих сталих дозволяє забезпечити задовільну апроксимацію вихідної функції.

Схема пошуку F_j полягає у наступному. Припустимо, що для рівняння типу (6) задана функція $F=\varphi(x)$, при якій це рівняння має очевидний точний розв'язок $W=Z(x)$. Наприклад, можна взяти $\varphi=\text{const}$ або $\varphi=e^{-nx}$. Використовуючи алгоритм переходу від заданого рівняння як моделі з параметрами Z і φ до його симетрії з параметрами Z_1 та φ_1 на основі співвідношень

$$\varphi_1 = F_1 = \varphi \left(C \int \frac{dx}{\varphi} + C_1 \right)^2; Z_1 = Z / \left(C \int \frac{dx}{\varphi} + C_1 \right),$$

де поклавши, наприклад, $\varphi=e^{2mx}$ знайдемо

$$\varphi_1 = (C e^{-mx} + C_1 e^{mx})^2; Z_1 = Z / (C e^{-2mx} + C_1), \quad (7)$$

де

$$Z = e^{-mx} \left(A \sin \sqrt{\lambda^2 - m^2} x + B \cos \sqrt{\lambda^2 - m^2} x \right) \quad (8)$$

– розв'язок рівняння типу (6) при $F=\varphi=e^{2mx}$, $2m=n$. Функція φ_1 , яка побудована за методом симетрії містить три довільні сталі C, C_1, m вибором яких можна суттєво змінювати вигляд функції φ_1 . Виходячи з цього доцільно перевірити придатність φ_1 для апроксимації заданої функції F . У підсумку, за результатами перевірки знайдено, що при $\alpha=1$, $C=C_1=0,5$; $m=1,07$ функція $F_1=\varphi_1=\cosh^2(mx)$ на інтервалі $-1 \leq x \leq 1$ задовільно наближена до функції $F = e^{x^2}$ (рис. 2).

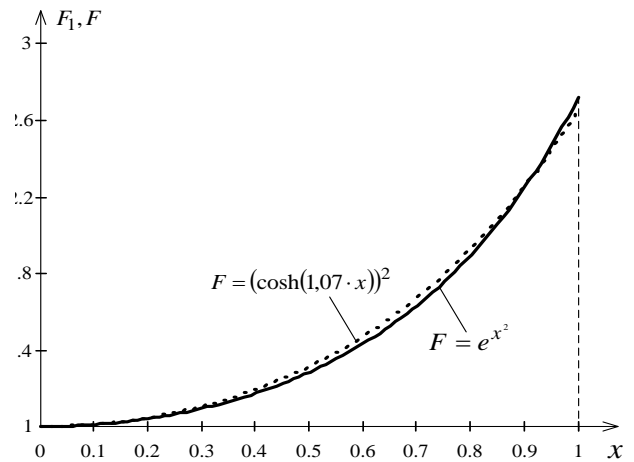


Рисунок 2 – Графіки функцій F та F_1

Враховуючи результати апроксимації, проведемо заміну у (6) $F = e^{x^2}$ на $F_1 = \cosh^2 mx$ і використавши (7) і (8), замінивши Z_1 на W_1 отримаємо розв'язки рівняння (6) у вигляді

$$W_1 = \frac{1}{\cosh mx} \left(A_1 \sin \sqrt{\lambda_1^2 - m^2} x + B_1 \cos \sqrt{\lambda_1^2 - m^2} x \right);$$

$$W_2 = \frac{1}{\cosh mx} \left(A_2 \sinh \sqrt{\lambda_2^2 + m^2} x + B_2 \cosh \sqrt{\lambda_2^2 + m^2} x \right).$$

В табл. 1 для довідки наведено значення цих функцій при $x=0$ ч1. Середнє значення розходження функцій $\delta=(1-F/F_1)\%$ складає 1,06%.

Розкриваючи $\lambda_{1,2}$ згідно з (6) маючи на увазі, що $m=1,07$ і $\alpha=1$ вирази для W_1 та W_2 можна переписати наступним чином

$$W_1 = \frac{1}{\cosh mx} (A_1 \sin px + B_1 \cos px);$$

$$W_2 = \frac{1}{\cosh mx} (A_2 \sinh qx + B_2 \cosh qx),$$

де

$$p^2 = \sqrt{k^4 + 1} - (1 + m^2);$$

$$q^2 = \sqrt{k^4 + 1} + (1 + m^2).$$

Таблиця 1 – Значення функцій $F = e^{x^2}$ та $F_1 = \cosh^2 1,07x$ на інтервалі $x=0 \div 1$

x	F	F_1	$\delta, \%$
0	1	1	0
0,1	1,01	1,011	0,143
0,2	1,041	1,046	0,547
0,3	1,094	1,107	1,138
0,4	1,174	1,195	1,801
0,5	1,284	1,315	2,3
0,6	1,433	1,472	2,69
0,7	1,632	1,674	2,558
0,8	1,896	1,93	1,774
0,9	2,248	2,252	0,179
1	2,718	2,654	-2,35

Загальний розв’язок рівняння (1) можна записати у вигляді суми W_1+W_2 , тобто

$$W = \frac{1}{\cosh mx} (A_1 \sin px + B_1 \cos px + A_2 \sinh qx + B_2 \cosh qx). \quad (9)$$

Врахувавши граничні умови на кінцях балки шириною $F = e^{x^2}$ на основі (9) можна дослідити її коливання, визначивши частоти та форми власних коливань.

3. Розв’язок задачі про коливання балки з жорстко закріпленими кінцями.

Граничні умови для балки з жорстко закріпленими кінцями (рис. 3) мають вигляд

$$W(1) = W'(1) = W(-1) = W'(-1) = 0. \quad (10)$$

Відмітимо, що коливання балки відбуваються у напрямку осі, яка перпендикулярна площині цієї балки.

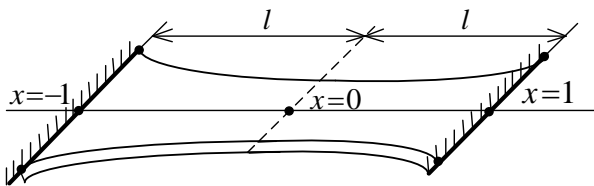


Рисунок 3 – Ескіз балки з жорстко закріпленими кінцями у плані

Враховуючи, що

$$W = \frac{G}{\cosh mx}; \quad W' = -m \frac{\sinh mx}{(\cosh mx)^2} G + \frac{1}{\cosh mx} G',$$

де

$$G = A_1 \sin px + B_1 \cos px + A_2 \sinh qx + B_2 \cosh qx \quad (11)$$

умови (10) можна замінити наступними

$$G(1) = G'(1) = G(-1) = G'(-1) = 0. \quad (12)$$

Оскільки дана коливальна система є симетричною відносно осі ($x=0$), то в ній будуть виникати як симетричні форми коливань, коли $W(x)=W(-x)$, так і антисиметричні, при яких $W(x)=-W(-x)$. З першої рівності $W(x)=W(-x)$ виникає умова $A_1=A_2=0$. Внаслідок цього, симетричні форми власних коливань будуть описуватись через вираз (9), якщо в ньому покласти, що $A_1=A_2=0$, тобто

$$W_I = \frac{B_2}{\cosh mx} \left(\frac{B_1}{B_2} \cos px + \cosh qx \right). \quad (13)$$

З другої рівності $W(x)=-W(-x)$ випливає, що у виразі (9) треба покласти $B_1=B_2=0$. Тоді для побудови та опису антисиметричних форм треба використати вираз

$$W_{II} = \frac{A_2}{\cosh mx} \left(\frac{A_1}{A_2} \sin px + \sinh qx \right). \quad (14)$$

Після підстановки (13) та (14) в (10) отримуємо окремо для двох видів форм коливань частотні рівняння та співвідношення для знаходження амплітудних коефіцієнтів A_1/A_2 ; B_1/B_2 . Так, згідно (13) та граничних умов маємо

$$\frac{B_1}{B_2} = -\frac{\cosh q}{\cos p} = \frac{q \sinh q}{p \sin p},$$

звідки можна записати рівняння власних частот при симетричних коливаннях

$$ptgp + qtghq = 0. \quad (15)$$

Аналогічно, використовуючи (14) знайдемо

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\sinh q}{\sin p} = -\frac{q \cosh q}{p \cos p},$$

і відповідно – рівняння частот при антисиметричних коливаннях

$$pctgp - qctghq = 0. \quad (16)$$

При знаходженні розв’язків рівнянь (15) і (16) доцільно і необхідно замінити в них який-небудь з шуканих параметрів q або p на протилежний по співвідношенню

$$q^2 - p^2 = 2(1 + m^2),$$

зводячи ці рівняння до залежностей лише від однієї шуканої змінної, наприклад, від p . Далі після знаходження значень p_i ($i=1,2,3,\dots$) власні частоти коливань f_i можна знайти з (2) розрахувавши попередньо власні числа k_i за формулою

$$k_i = \sqrt[4]{p_i^2 + (1 + m^2)^2} - 1,$$

де в даному випадку $m=1,07$ і тому

$$k_i = \sqrt[4]{p_i^2 + 2,1449} - 1. \quad (17)$$

Слід зазначити, що непарні номери ($i=1,3,5,\dots$) коренів рівняння p_i і відповідно власні числа k_i відносяться до рівняння (15), а парні ($i=2,4,6,\dots$) – до рівняння (16).

Значення чисел p_i , q_i , k_i а також коефіцієнтів $(A_1/A_2)_i$, $(B_1/B_2)_i$ наведені у табл. 2.

Таблиця 2 – Корені частотних рівнянь, власні числа та коефіцієнти при $i=1, \dots, 6$

i	p_i	q_i	k_i	$(A_1/A_2)_i$	$(B_1/B_2)_i$
1	2,2027	3,0235	2,632	—	17,447
2	3,8639	4,3840	4,129	60,614	—
3	5,4642	5,8436	5,056	—	-252,58
4	7,0479	7,346	7,198	-1,149	—
5	8,6253	8,8705	8,748	—	5106,1
6	10,2001	10,408	10,304	23,67	—

Використовуючи результати з табл. 2 можна легко вивчити коливання реальної балки з жорстко закріпленими кінцями. При аналізі варто звернути увагу на відмінні властивості форм коливань – симетричних і антисиметричних. Перші не мають вузла в центрі балки ($x=0$), тоді як другі обов’язково будуть мати вузол в цьому перерізі.

4. Розв’язок задачі про коливання консольної балки з жорстко закріпленим широким кінцем.

Для розв’язання задачі використаємо функцію прогинів (9) та наступні граничні умови [10]

$$W(1)=0; W'(1)=0; W''(0)=0; W'''(0)=0. \quad (18)$$

Ескіз консольної балки у плані, яка жорстко закріплена широким кінцем наведено на рис. 4.

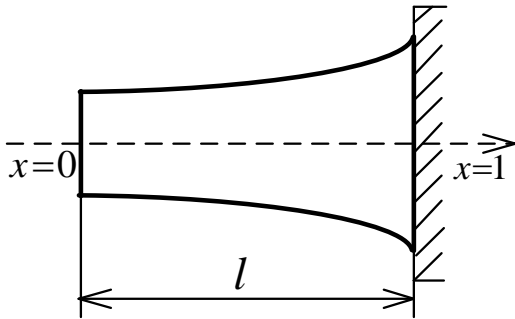


Рисунок 4 – Ескіз консольної балки

Позначивши (9) як $W=G/\cosh mx$, де

$$G = A_1 \left(\frac{A_2}{A_1} \sinh qx + \sin px \right) + B_1 \left(\frac{B_2}{B_1} \cosh qx + \cos px \right), \quad (19)$$

отримаємо після диференціювання

$$W' = -\frac{m \sinh mx}{(\cosh mx)^2} G + \frac{1}{\cosh mx} G'. \quad (20)$$

Оскільки $W(1)=G(1)/\cosh m$, то у випадку $W(1)=0$ необхідно прийняти, що і $G(1)=0$. Через це, відповідно до виразу (20) та умов (18) виявляється, що $G'(1)=0$. Тобто, перші з умов (18) можна замінити умовами

$$G(1)=0; G'(1)=0. \quad (21)$$

Враховуючи, що $W=W_1+W_2$, де W_1, W_2 – розв’язки рівнянь (6), то для зручності та спрощення перетворень, пов’язаних з диференціюванням, третю та четверту умову (18) представимо у формі, яка виражається лише через $W(0)$ та $W'(0)$. Перепишемо диференціальні рівняння (6) у вигляді

$$W_1'' + 2xW_1' + \lambda_1^2 W_1 = 0;$$

$$W_2'' + 2xW_2' - \lambda_2^2 W_2 = 0;$$

і утворивши суму, отримаємо

$$W'' + 2xW' + \lambda_1^2 W_1 - \lambda_2^2 W_2 = 0. \quad (22)$$

Якщо $W''(0)=0$, то відповідно до (22) ця умова буде рівнозначна наступній

$$2xW'(0) + \lambda_1^2 W_1(0) - \lambda_2^2 W_2(0) = 0.$$

Звідси запишемо

$$\lambda_1^2 W_1(0) = \lambda_2^2 W_2(0). \quad (23)$$

З співвідношень

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{\cosh mx} (A_1 \sin px + B_1 \cos px); \\ W_2 &= \frac{1}{\cosh mx} (A_2 \sinh qx + B_2 \cosh qx); \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

можна отримати, $W_1(0)=B_1$; $W_2(0)=B_2$ і тоді з (23) знайдемо, що

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}. \quad (25)$$

Виконавши диференціювання виразу (22), отримаємо результат, який можна представити у вигляді

$$2W' + \lambda_1^2 W_1' - \lambda_2^2 W_2' = -W''' - 2xW''. \quad (26)$$

Враховуючи граничні умови (18), співвідношення (26) при $x=0$ можна переписати у вигляді

$$2W'(0) + \lambda_1^2 W_1'(0) - \lambda_2^2 W_2'(0) = 0. \quad (27)$$

Після внесення у вираз (27) похідних від функцій (24) отримаємо

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{\lambda_1^2 + 2}{\lambda_2^2 - 2}. \quad (28)$$

Забезпечуючи умови (21) при $x=1$ і враховуючи вид функції (19) та її похідної з урахуванням (25) та (28) отримаємо систему двох рівнянь відносно невідомих A_1 та B_1

$$\left\{ \begin{aligned} &A_1 \left(\sin p + \frac{p}{q} \frac{\lambda_1^2 + 2}{\lambda_2^2 - 2} \sinh q \right) + \\ &+ B_1 \left(\cos p + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \cosh q \right) = 0; \\ &A_1 \left(\cos p + \frac{\lambda_1^2 + 2}{\lambda_2^2 - 2} \cosh q \right) + \\ &+ B_1 \left(-\sin p + \frac{q}{p} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \sinh q \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

Прирівнявши визначник цієї системи до нуля, отримаємо частотне рівняння, яке після деяких спрощень і з урахуванням залежності $\lambda_1^2 = p^2 + m^2$;

$\lambda_2^2 = p^2 - m^2$ можна представити у формі

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q}{p} \cdot \frac{p^2 + m^2}{q^2 - m^2} - \frac{p}{q} \cdot \frac{p^2 + m^2 + 2}{q^2 - m^2 - 2} \right) \sin p \sinh q - \\ & - \left(\frac{p^2 + m^2}{q^2 - m^2} + \frac{p^2 + m^2 + 2}{q^2 - m^2 - 2} \right) \cos p \cosh q = \\ & = 1 + \left(\frac{p^2 + m^2}{q^2 - m^2} \right) \cdot \left(\frac{p^2 + m^2 + 2}{q^2 - m^2 - 2} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Якщо знайдено корені рівняння (30) p_i та q_i , то за формулою (17) можна розрахувати значення частотних чисел k_i ($i=1,2,3,\dots$). Форми коливань при цьому можна побудувати розрахувавши прогини $W(x)$ за виразом, який впливає з (9), тобто

$$W = \frac{B_1}{\cosh mx} \left[\frac{A_1}{B_1} \left(\sin px + \frac{A_2}{A_1} \sinh qx \right) + \cos px + \frac{B_2}{B_1} \cosh qx \right].$$

Амплітудні коефіцієнти B_2/B_1 і A_2/A_1 , які входять до цього виразу розраховуються за формулами (25) і (28) відповідно. Значення коефіцієнтів A_1/B_1 можна знайти виходячи з (29) за одним з співвідношень

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} &= - \frac{\left[\cos p + \frac{p^2 + m^2}{q^2 - m^2} \cosh q \right]}{\left[\sin p + \frac{p}{q} \cdot \frac{p^2 + m^2 + 2}{q^2 - m^2 - 2} \sinh q \right]} = \\ &= \frac{\left[-\sin p + \frac{q}{p} \frac{p^2 + m^2}{q^2 - m^2} \sinh q \right]}{\left[\cos p + \frac{p^2 + m^2 + 2}{q^2 - m^2 - 2} \cosh q \right]}. \end{aligned}$$

В табл. 3 наведено отримані значення параметрів p_i ; q_i ; k_i ; $(B_2/B_1)_i$; $(A_2/A_1)_i$; $(A_1/B_1)_i$ при $i=1$ ч6, які необхідні для проведення кількісного аналізу коливань реальної балки розглянутого типу.

Таблиця 3 – Параметри власних коливань консольної балки

i	p_i	q_i	k_i
1	1,6493	2,64764	2,182
2	4,694455	5,13105	4,915
3	7,8522957	8,12086	7,987
4	10,994367	11,18776	11,091
5	14,136451	14,28737	14,212
6	17,278277	17,40197	17,34
i	$(A_1/B_1)_i$	$(A_2/A_1)_i$	$(B_2/B_1)_i$
1	-0,602	0,94527	0,659
2	-0,93728	0,9938	0,92058
3	-0,97077	0,99772	0,96914
4	-0,98506	0,99882	0,98387
5	-0,99086	0,99928	0,99015
6	-0,99385	0,99952	0,99337

На основі даних табл. 3 легко побудувати форми коливань, починаючи від основної ($i=1$) до шостої.

5. Обговорення результатів дослідження.

Обрана в якості об'єкту дослідження балка шириною $b = e^{\alpha x^2}$ дозволяє при розв'язанні поставленої задачі про її коливання замінити рівняння четвертого порядку (1) двома спряженими рівняннями другого порядку (5). Критеріальне рівняння для функції $t=b''/b$ визначає обмежену кількість випадків подібної заміни, а саме лише при $t = e^x$; e^{x^2} ; e^{x^3} ; $4/x$. Як впливає з рисунку 1, залежно від знаку та величини коефіцієнта α функція $b = e^{\alpha x^2}$ дозволяє по-перше, розглянути симетричну балку, для якої $b(0) \neq 0$ і по-друге, постає можливість для проведення аналізу ввігнутої або опуклої балки за її шириною. Ця функція з точки зору поставленої мети має проте суттєвий недолік, який полягає у тому, що розв'язки рівнянь, побудованих на основі цієї функції є невідомими. В статті запропоновано вихід з цієї ситуації шляхом апроксимації - заданої функції такою функцією, при якій розв'язки рівнянь будуть точними. Для вибору апроксимуючої функції запропоновано метод симетрій, особливість якого полягає у можливості побудови функцій, при яких розв'язки рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами будуть точними. Такі функції, які будуються за спеціальним алгоритмом можуть містити довільне (теоретично до нескінченності) число незалежних сталих. Шляхом доцільного вибору їх величини та кількості можна підібрати потрібну функцію апроксимації. На практиці для досягнення задовільного результату апроксимації достатньо, як в нашому випадку, функції з однією-трьома сталими.

Методи, які використовуються в даній статті маючи окремі особливості тим не менш накладають певні обмеження на прикладні можливості та цілі дослідження. Обмеженість метода факторизації визначено вище. Метод симетрій, що використовується як інструмент для побудови апроксимуючої функції, має обмеженість, оскільки апроксимація функцією F_1 виконується на певному обмеженому інтервалі. За необхідності розширення цього інтервалу зі збереженням припустимої похибки апроксимації необхідно замінити F_1 іншою функцією, що є можливим внаслідок широких можливостей методу симетрій. Зазначимо, що задача про коливання балки з шириною $b = e^{x^2}$ раніше була розв'язана методом рядів [8]. В цій роботі для балки, що жорстко закріплена торцевими перерізами, розраховано перші два власних числа $k_1=2,616$; $k_2=4,130$. Натомість, для консольної балки, яка закріплена широким кінцем отримано значення лише першого власного числа $k_1=2,187$. Порівняння цих результатів з даними, які отримано в нашому дослідженні (табл.3 та табл.4), а саме: $k_1=2,632$; $k_2=4,29$ і відповідно для випадку консольної балки $k_1=2,182$ дозволяє стверджувати практично повну їх збіжність. Так, відмінність між ними у порядку слідування складає (0,61; 0,02; 0,22)%.

Таким чином, результати проведеного дослідження підтверджують ефективність запропонованої методики, яка у свою чергу відрізняється зручністю та простотою при її використанні на практиці.

ВИСНОВКИ. 1. Вихідне диференціальне рівняння IV порядку, яким описуються форми коливань балки змінної ширини $b = e^{\alpha x^2}$, за допомогою методу факторизації розкладено на два спряжені рівняння II порядку. Розкладення дозволяє замінити безпосередній пошук розв'язку доволі складного рівняння IV порядку зі змінними коефіцієнтами на пошук розв'язку значно простіших спряжених рівнянь II порядку. Показано, що при ширині $b = e^{\alpha x^2}$, де α – коефіцієнт, який визначає конфігурацію балки, така процедура розкладення є можливою. 2. Для пошуку розв'язків отриманих рівнянь II порядку використано метод симетрій та схему його застосування. Знайдена функція апроксимації, при якій отримано точний розв'язок цих рівнянь. В даному випадку функція $F = e^{\alpha x^2}$ апроксимується функцією $F_1 = (\cosh mt)^2$, де $\alpha = 1$; $m = 1,07$. 3. Розв'язано задачу про коливання симетричної балки шириною $b = e^{x^2}$ з жорстким закріпленням торцевих перерізів. Отримано частотні рівняння – для симетричних і антисиметричних форм коливань. Знайдено частотні числа $k_i (i=1\text{ч}6)$ і розраховано коефіцієнти для побудови форм власних коливань. Порівняння перших двох чисел $k_1 = 2,616$; $k_2 = 4,130$, отриманих раніше на основі методу рядів, з тими, які знайдено в даній роботі $-k_1 = 2,632$; $k_2 = 4,29$ свідчить про мінімальну між ними різницю, а саме 0,61% і 0,02% відповідно. Такі результати свідчать про ефективність викладеного підходу та методу проведеного дослідження. 4. Отримано розв'язок задачі про коливання консольної балки шириною $b = e^{x^2}$, яка жорстко закріплена широким кінцем (при $x=1$) і вільна на тонкому кінці (при $x=0$). Отримано результати, які у повному об'ємі аналогічні тим, які викладено у п.3. Порівняння розрахованого на основі методу рядів власного числа $k_1 = 2,187$ з відповідним отриманим в роботі числом $k_1 = 2,182$ дає розходження в 0,22%. Таке незначне розходження додатково підтверджує висновок про ефективність методу дослідження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Pham P.T., Hong K.S. Dynamic models of axially moving systems: A review. *Nonlinear Dyn.* 2020. No 100. P. 315–349. doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05491-z>
2. Yang X., Wu H., Qian Y. Nonlinear vibration analysis of axially moving strings based on gyroscopic modes decoupling. *J. Sound Vib.* 2017. Vol. 393. P. 308–320. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.01.035>
3. Sharma K., Talukdar S., Kalita K. “An exact method to determine natural frequencies and mode shapes in coupled bending-torsion vibration of non-uniform thin walled section beams considering the effect of warping. *J. Vib. Eng. Technol.* 2016. Vol. 6, No 4. P. 539–554.
4. Moreno-Garcia, P., Araujo dos Santos, J., Lopes H. (2018). A Review and Study on Ritz Method Admissible Functions with Emphasis on Buckling and Free Vibration of Isotropic and Anisotropic Beams and Plates. *Arch Computat Methods Eng*, 25, 785–815. doi: <https://doi.org/10.1007/s11831-017-9214-7>
5. Kaynardag, K., Battaglia, G., Ebrahimkhanlou A. et al. (2020). Identification of Bending Modes of Vibration in Rails by a Laser Doppler Vibrometer on a Moving Platform. *Experimental Techniques*, 45, 13–24. doi: <https://doi.org/10.1007/s40799-020-00401-9>
6. Cao D., Wang J., Gao Y. Free Vibration of Variable Width Beam: Asymptotic Analysis with FEM Simulation and Experiment Confirmation. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2019. Vol. 7. P. 235–240. doi: <https://doi.org/10.1007/s42417-019-00116-1>
7. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. Москва: Наука, 1971. 288 с.
8. Трапезон А. Г. О собственных колебаниях и напряженном состоянии балки переменной ширины, изменяющейся по закону $\exp(\alpha x^2)$. *Проблемы прочности*. Киев, 1980. № 1. С. 91–94.
9. Трапезон К. О. Узагальнений метод симетрій для задачі про позовжні чи крутильні коливання-стрижні в змінній жорсткості. *Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського*. 2021. Вип. 2. С. 94–99. doi: <https://doi.org/10.30929/1995-0519.2021.2.94-99>
10. Foong F., Ket T., Lee O. Stress and damping of wide cantilever beams under free vibrations. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2019. Vol. 33. 21–27. doi: <https://doi.org/10.1007/s12206-018-1203-8>

NATURAL BENDING VIBRATIONS OF THE BEAM WITH THE SPECIAL LAW OF CHANGE OF WIDTH

K. Trapezon

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

ORCID: 0000-0001-5873-9519

A. Trapezon

G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength of the National Academy of Sciences of Ukraine

ORCID: 0000-0002-8567-9854

Purpose. The aim of the work is to construct a closed analytical solution of the problem of natural vibrations of the beam, the width of which varies according to the law $\exp(\alpha x^2)$. **Methodology.** The approach is based on the provisions of symmetric analysis of differential equations with variable coefficients. This approach allows you to find a way to obtain an analytical solution of the corresponding differential equation and, ultimately, the boundary value problem. **Findings.** The main result is the construction of the algorithm and obtaining the solution of the differential equation of the IV order, which describes the transverse bending vibrations of the beam with a special law of change of width (the thickness of the beam is a constant value). Two examples of the analysis of oscillations of such beam in case of its bilateral rigid fastening and cantilever fastening are resulted. For these cases, the frequency equations are obtained, the natural frequencies and amplitude coefficients are found, which are necessary for the construction of natural forms of oscillations. **Originality.** The

approach presented in this paper is based on the idea of symmetries of differential equations and is characterized by a simplified analysis of the solution of the problem of bending oscillations of the beam with a special law of width. The method proposed for solving the boundary value problem is convenient and simple, because the results are found without the use of numerical research methods. **Practical value.** Examples of the exact analysis of fluctuations which allow to assert about real possibility of expansion of an existing number of configurations of a beam, both on width, and on ways of fastening are resulted. Such beams can, for example, be used as prototype samples for resonant tests of materials for fatigue strength. **Conclusions.** The given algorithm for constructing the solution of the problem on eigenvalues for a beam with the given special law of change of width is universal and can be extended to other constructions of beams. Since in this case the question arises only about the choice of the approximation function, which allows to use the method of symmetries and obtain an exact solution of the corresponding differential equation of the IV order, which in turn describes the transverse oscillations of the beams.

Key words: bend, beam, width, console, symmetry, eigenvalue, efficiency.

REFERENCES

1. Pham PT., Hong KS. (2020), Dynamic models of axially moving systems: A review. *Nonlinear Dyn*, 100, 315–349. doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05491-z>
2. Yang X., Wu H., Qian Y. (2017), Nonlinear vibration analysis of axially moving strings based on gyroscopic modes decoupling. *J. Sound Vib*, 393, 308–320. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.01.035>
3. Sharma K., Talukdar S., Kalita K. (2016), An exact method to determine natural frequencies and mode shapes in coupled bending-torsion vibration of non-uniform thin walled section beams considering the effect of warping. *J. Vib. Eng. Technol*, 6(4), 539–554.
4. Moreno-García, P., Araújo dos Santos, J., Lopes H. (2018), A Review and Study on Ritz Method Admissible Functions with Emphasis on Buckling and Free Vibration of Isotropic and Anisotropic Beams and Plates. *Arch Computat Methods Eng*, 25, 785–815. doi: <https://doi.org/10.1007/s11831-017-9214-7>
5. Kaynardag, K., Battaglia, G., Ebrahimkhanlou A. et al. (2020), Identification of Bending Modes of Vibration in Rails by a Laser Doppler Vibrometer on a Moving Platform. *Experimental Techniques*, 45, 13–24. doi: <https://doi.org/10.1007/s40799-020-00401-9>
6. Cao D., Wang J., Gao Y. (2019), Free Vibration of Variable Width Beam: Asymptotic Analysis with FEM Simulation and Experiment Confirmation. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 7, 235–240. doi: <https://doi.org/10.1007/s42417-019-00116-1>
7. Korenev B. (1971), *Vvedeniye v teoriyu besselevykh funktsiy*. Moscow: Nauka. [In Russian]
8. Trapezon, A. (1980), O sobstvennykh kolebaniyakh i napryazhenom sostoyanii balki peremennoy shiriny, izmenyayushcheyasya p ozakonu $\exp(\alpha x^2)$. *Problemy prochnosti*. No. 1, pp. 91–94. [In Russian]
9. Trapezon, K. (2021), Uzahal nennyi metod symetriy dlya zadachi pro pozdovzhni chy krutylni kolyvannya stryzhni v zminnoyi zhorstkosti. *Visnyk KrNU imeni Mykhayla Ostrohrads'koho*, Issue 2, pp. 94–99. [In Ukrainian]
10. Foong F., Ket T., Lee O. (2019), Stress and damping of wide cantilever beams under free vibrations. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 33, 21–27. doi: <https://doi.org/10.1007/s12206-018-1203-8>

Стаття надійшла 19.07.2021