

ОБҐРУНТУВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ПАРАМЕТРІВ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РУЙНУВАННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

Р. М. Ігнатюк, О. П. Рижий, Л. С. Серілко, О. С. Стадник, Д. Л. Серілко

Національний університет водного господарства та природокористування

ORCID:0000-0002-1004-1469; 0000-0002-8592-1217; 0000-0002-2396-561X, 0000-0001-5881-2413; 0000-0002-9066-3806

Розроблена математична модель дозволяє визначати виникаючі напруження, що в свою чергу визначає межу руйнування пружно-пластичного матеріалу. Під час проектування розпушувальних агрегатів доцільно приймати радіус вихідного перерізу $R=0,18$ м і більше. Математичні та теоретичні дослідження базувались на фундаментальній теорії механіки суцільного середовища та загальних положеннях інженерної механіки. Аналітично-графічний аналіз математичних моделей здійснений на ПК на спеціалізованому програмному комплексі. Отримано математичні моделі для моделювання процесу руйнування пружно-пластичного матеріалу та прогнозування оптимальних транспортних параметрів для проектування розпушувальних агрегатів. Розроблена математична модель забезпечить покращення процесу розпушування пружно-пластичного матеріалу, а інженерні розрахунки при проектуванні розпушувача дозволяють запобігти необґрунтованому збільшенню опору, при переміщенні матеріали по ріжучій поверхні.

Ключові слова: агрегат, матеріал, напруження, деформація, ґрунт, руйнування.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. У сучасних умовах розвитку економіки країни значну увагу слід приділяти розвитку та модернізації окремих галузей народного господарства. Не достатньо досліджені значні обсяги робіт, які супроводжуються розробкою ґрунту різних властивостей, які умовно визначимо як пружно-пластичний матеріал. Дані дослідження дозволять вирішити ряд завдань, які гостро стоять не тільки в сільському господарстві, а і в будівництві, при відкритій розробці корисних копалин, меліорації одне з яких недосконалий процес розпушення ґрунту (пружно-пластичного матеріалу) при його обробці [1, 2]. Тому актуальною проблемою є встановлення раціональних параметрів транспортувальної поверхні агрегату для розпушення пружно-пластичного матеріалу.

Розпушення проводять на пружно-пластичному матеріалі різних характеристик, наприклад мала проникність (коефіцієнт фільтрації не перевищує 0.1...0.01 м/добу) та велика щільність. Для території України типовими є ґрунти II ... III категорії, супіски, суглинки та глини з числом ударів щільноміра $C_{уд} = 5...12$ [3]. Тому при моделюванні процесу розпушування та визначенні схеми його багаторівневого різання розглядаємо суцільне однорідне ізотропне середовище, що характеризується деяким механічним складом, пластичністю, пружністю, кутом внутрішнього і зовнішнього тертя та щільністю [4]. Процес різання відбувається завдяки силам деформацій зрізу та зсуву після зміни рівноважних сил, які діють на елемент, що розглядається як тверде тіло, при чому опір різанню не залежить від швидкості ріжучого елемента. Слід відмітити, що процес транспортування відокремленого шару забезпечує умову вільного виходу зрізаного шару матеріалу з будь-якої внутрішньої частини в напрямку до поверхні, або штучно підготовленого простору [5]. Основним завданням статті є розробка теоретичних основ робочого процесу двоплощинного деформування пластичного матеріалу та створення математичної моделі встановлення раціональних параметрів

транспортувальної поверхні, що забезпечуватиме процес розпушення за рахунок змінного радіуса поперечного перерізу.

Метою даної статті є обґрунтування математичної моделі механічного деформування пружно-пластичного середовища та моделювання транспортного процесу розпушувальних агрегатів.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Зміна напружено-деформованого стану відокремленої від масиву пластичного шару проводилась під час її переміщення у напрямку криволінійної поверхні, поперечні перерізи якої є дугами кіл радіуса $R_x=R_x(x)$ (рис. 1). Відомо, що рухома полярна система координат рухається вздовж осі x зі сталою швидкістю $V_{СК}$, а вздовж осі z – за законом $z_1 = R_0 - R_x$ [6]. Рівняння умовної рівноваги пластичного матеріалу з урахуванням переносної сили інерції $F_i = m\ddot{z}_1$, що діє на елементарний об'єм матеріалу у вибраній системі координат, має такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varepsilon}}{\partial \varepsilon} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varepsilon}{r} + \rho_{zp} F_r = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varepsilon}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{2\tau_{r\varepsilon}}{r} + \rho_{zp} F_\varepsilon = 0 \end{cases} \quad (1)$$

де r – біжуче значення радіуса в межах товщини пластичного матеріалу, м; ε – біжуче значення кута ($-\beta \leq \varepsilon \leq \beta$), рад; β – граничний кут дуги перерізу розпушувального елемента, рад; σ_r , σ_ε , $\tau_{r\varepsilon}$ – компоненти тензора напружень в полярних координатах, Па; ρ_{zp} – щільність матеріалу, кг/м³; F_r та F_ε – проекції масових сил на осі r та ε , які визначаються залежностями:

$$\begin{cases} F_r = g \cos \alpha_p \cos \varepsilon - \ddot{z}_1 \cos \varepsilon \\ F_\varepsilon = -g \cos \alpha_p \sin \varepsilon + \ddot{z}_1 \sin \varepsilon \end{cases} \quad (2)$$

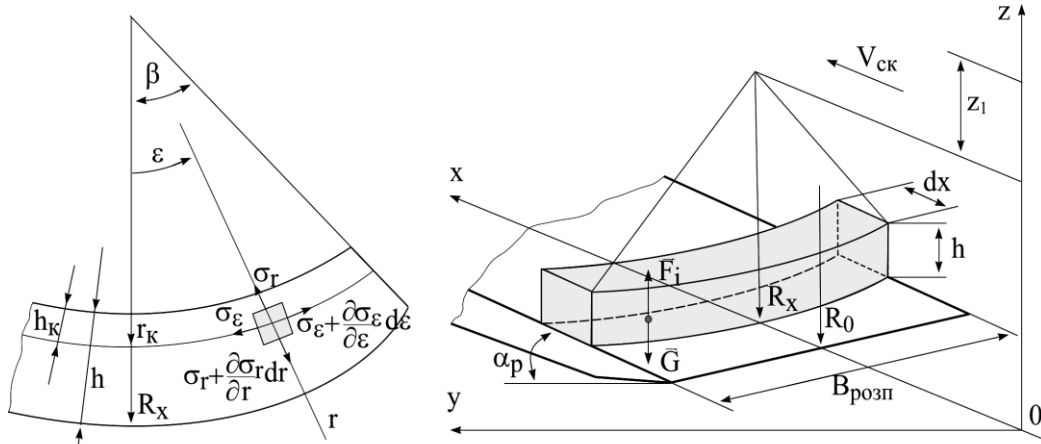


Рисунок 1 – Схема визначення напружено-деформованого стану пластичного матеріалу

Дана задача є статично невизначеною оскільки рівняння системи (1) містять три складових напруження. Тому розв'язок можливий тільки в одному частковому випадку, коли суцільне середовище перебуває в граничному стані, для якого виконується така умова:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\epsilon}{2}\right)^2 + \tau_{r\epsilon}^2} = -\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \frac{\sigma_r + \sigma_\epsilon}{2}, \quad (3)$$

де f – коефіцієнт внутрішнього тертя матеріалу.

У загальному випадку розв'язання рівнянь (1) та (3) пов'язане зі значними математичними труднощами. Уважаємо, що у даному випадку справедливою буде така рівність:

$$\tau_{r\epsilon} = f \sigma_r + C, \quad (4)$$

де C – зчеплення матеріалу, Па.

Аналітичне розв'язання системи (1) проводимо, застосовуючи метод прямих [7], на підставі якого проведена заміна часткових похідних розділеними різницями:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_r^\kappa - \sigma_r^{\kappa-1}}{h_\kappa}; \quad \frac{\partial \sigma_\epsilon}{\partial r} = \frac{\sigma_\epsilon^\kappa - \sigma_\epsilon^{\kappa-1}}{h_\kappa} \quad (5)$$

Враховуючи (5), система (1) набере вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_r^\kappa - \sigma_r^{\kappa-1}}{h_\kappa} + \frac{f}{r_\kappa} \frac{d\sigma_r^\kappa}{d\epsilon} + \frac{\sigma_r^\kappa - \sigma_\epsilon^\kappa}{r_\kappa} + \rho_{2p} F_r = 0, \\ f \left(\frac{\sigma_r^\kappa - \sigma_r^{\kappa-1}}{h_\kappa} \right) + \frac{1}{r_\kappa} \frac{d\sigma_\epsilon^\kappa}{d\epsilon} + \frac{2(f\sigma_r^\kappa + C)}{r_\kappa} + \rho_{2p} F_\epsilon = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

де $h_\kappa = \frac{h}{N}$ – крок зміни радіуса r_κ , м; ($\kappa=1, 2, \dots, N$);

h – товщина ґрунтової скиби, м.

Помноживши перше рівняння системи (6) на r/f , а друге на r , отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_r^\kappa}{d\epsilon} + \frac{\sigma_r^\kappa}{f} \left(\frac{r_\kappa + 1}{h_\kappa} \right) - \frac{r_\kappa}{f} \frac{\sigma_r^{\kappa-1}}{h_\kappa} - \frac{\sigma_\epsilon^\kappa}{f} + \frac{r_\kappa \rho_{2p} F_r}{f} = 0, \\ \frac{d\sigma_\epsilon^\kappa}{d\epsilon} + f \sigma_r^\kappa \left(\frac{r_\kappa + 2}{h_\kappa} \right) - \frac{f r_\kappa \sigma_r^{\kappa-1}}{h_\kappa} + 2C + r_\kappa \rho_{2p} F_\epsilon = 0 \end{cases}. \quad (7)$$

З першого рівняння системи (7) знаходимо $d\sigma_r^\kappa/d\epsilon$:

$$\frac{d\sigma_r^\kappa}{d\epsilon} = \frac{r_\kappa}{f} \frac{\sigma_r^{\kappa-1}}{h_\kappa} - \frac{\sigma_r^\kappa}{f} \left(\frac{r_\kappa + 1}{h_\kappa} \right) + \frac{\sigma_\epsilon^\kappa}{f} - \frac{r_\kappa \rho_{2p} F_r}{f}. \quad (8)$$

Результатом диференціювання за ϵ другого рівняння системи (7) є:

$$\frac{d^2 \sigma_\epsilon^\kappa}{d\epsilon^2} + \frac{d\sigma_r^\kappa}{d\epsilon} f \left(\frac{r_\kappa + 2}{h_\kappa} \right) - \frac{d\sigma_r^{\kappa-1}}{d\epsilon} \frac{f r_\kappa}{h_\kappa} + \frac{r_\kappa \rho_{2p} F_\epsilon}{d\epsilon} = 0. \quad (9)$$

Підставляючи рівняння (8) в (9), отримаємо:

$$\frac{d^2 \sigma_\epsilon^\kappa}{d\epsilon^2} + \left[\frac{r}{f} \frac{\sigma_r^{\kappa-1}}{h_\kappa} - \frac{\sigma_r^\kappa}{f} \left(\frac{r}{h_\kappa} + 1 \right) + \frac{\sigma_\epsilon^\kappa}{f} - \frac{r_\kappa \rho_{2p} F_r}{f} \right] * \quad (10)$$

$$* f \left(\frac{r_\kappa + 2}{h_\kappa} \right) - \frac{d\sigma_r^{\kappa-1}}{d\epsilon} \frac{f r_\kappa}{h_\kappa} + r_\kappa \rho_{2p} \frac{dF_\epsilon}{d\epsilon} = 0.$$

З другого рівняння системи (7) визначимо σ_r^κ :

$$\sigma_r^\kappa = \frac{\frac{f r_\kappa \sigma_r^{\kappa-1}}{h_\kappa} - r_\kappa \rho_{2p} F_\epsilon - \frac{d\sigma_\epsilon^\kappa}{d\epsilon} - 2C}{f \left(\frac{r_\kappa + 2}{h_\kappa} \right)}. \quad (11)$$

Вираз (10), з урахуванням (11), набере такого вигляду:

$$\frac{d^2 \sigma_\epsilon^\kappa}{d\epsilon^2} + \left[\frac{r_\kappa}{f} \frac{\sigma_r^{\kappa-1}}{h_\kappa} - \frac{1}{f^2} \left(\frac{f r_\kappa \sigma_r^{\kappa-1}}{h_\kappa} - r_\kappa \rho_{2p} F_\epsilon - \frac{d\sigma_\epsilon^\kappa}{d\epsilon} - 2C \right) \right] * \quad (12)$$

$$* \left(\frac{r_\kappa + 1}{h_\kappa} \right) + \frac{\sigma_\epsilon^\kappa}{f} - \frac{r_\kappa \rho_{2p} F_r}{f} \times f \left(\frac{r_\kappa + 2}{h_\kappa} \right) - \frac{d\sigma_r^{\kappa-1}}{d\epsilon} \frac{f r_\kappa}{h_\kappa} + r_\kappa \rho_{2p} \frac{dF_\epsilon}{d\epsilon} = 0.$$

Відповідно до другого рівняння системи (2) запишемо, що:

$$\frac{dF_\epsilon}{d\epsilon} = -g \cos \alpha_p \cos \epsilon + \ddot{z}_1 \cos \epsilon = \cos \epsilon (\ddot{z}_1 - g \cos \alpha_p). \quad (13)$$

Після проведених перетворень виразу (12) та з урахуванням (13), отримаємо систему диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\frac{d^2\sigma_\varepsilon^K}{d\varepsilon^2} + p \frac{d\sigma_\varepsilon^K}{d\varepsilon} + q\sigma_\varepsilon^K = A \sin \varepsilon + B \cos \varepsilon + D, \quad (14)$$

$$\text{де } p = \frac{1}{f} \left(\frac{r_K}{h_K} + 1 \right); \quad q = \left(\frac{r_K}{h_K} + 2 \right);$$

$$A = -\frac{1}{f} \left(\frac{r_K}{h_K} + 1 \right) \rho_{2p} r_K (\ddot{z}_1 - g \cos \alpha_p);$$

$$B = -\left(\frac{r_K}{h_K} + 3 \right) \rho_{2p} r_K (\ddot{z}_1 - g \cos \alpha_p);$$

$$D = f \frac{r_K}{h_K} \frac{d\sigma_r^{K-1}}{d\varepsilon} - \frac{r_K}{h_K} \sigma_r^{K-1} - 2C \left(\frac{r_K}{h_K} + 1 \right).$$

Розв'язок рівняння (14) включає загальний та частковий, а саме:

$$\sigma_\varepsilon^K = \left(\overline{\sigma}_\varepsilon^K \right) + \left(\tilde{\sigma}_\varepsilon^K \right). \quad (15)$$

Загальний розв'язок (14) отримуємо розв'язуючи однорідне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2\overline{\sigma}_\varepsilon^K}{d\varepsilon^2} + p \frac{d\overline{\sigma}_\varepsilon^K}{d\varepsilon} + q\overline{\sigma}_\varepsilon^K = 0. \quad (16)$$

Запишемо характеристичне рівняння $\kappa^2 + p\kappa + q = 0$, корені якого дорівнюють:

$$\kappa_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Проаналізувавши вирази для p і q , прийшли до висновку, що корені дійсні та різні. Тоді загальний розв'язок матиме вигляд:

$$\overline{\sigma}_\varepsilon^K = C_1 e^{\kappa_1 \varepsilon} + C_2 e^{\kappa_2 \varepsilon}. \quad (17)$$

Окремий розв'язок шукаємо методом варіації довільних сталих [8], як:

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon^K = C_1(\varepsilon) e^{\kappa_1 \varepsilon} + C_2(\varepsilon) e^{\kappa_2 \varepsilon}, \quad (18)$$

де $C_1(\varepsilon)$ і $C_2(\varepsilon)$ є деякі функції від ε .

Диференціюючи рівняння (18), отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_\varepsilon^K}{d\varepsilon} &= \frac{dC_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} e^{\kappa_1 \varepsilon} + C_1(\varepsilon) \kappa_1 e^{\kappa_1 \varepsilon} + \\ &+ \frac{dC_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} e^{\kappa_2 \varepsilon} + C_2(\varepsilon) \kappa_2 e^{\kappa_2 \varepsilon} \end{aligned}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{\sigma}_\varepsilon^K}{d\varepsilon^2} &= \frac{d^2C_1(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} e^{\kappa_1 \varepsilon} + \frac{dC_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} \kappa_1 e^{\kappa_1 \varepsilon} + \\ &+ \frac{dC_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} \kappa_1 e^{\kappa_1 \varepsilon} + C_1(\varepsilon) \kappa_1^2 e^{\kappa_1 \varepsilon} + \frac{dC_2(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} e^{\kappa_2 \varepsilon} + \\ &+ \frac{dC_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} \kappa_2 e^{\kappa_2 \varepsilon} + \frac{dC_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} \kappa_2 e^{\kappa_2 \varepsilon} + C_2(\varepsilon) \kappa_2^2 e^{\kappa_2 \varepsilon}. \end{aligned} \quad (20)$$

Підставляючи отримані значення (19) і (20) в диференціальне рівняння (14) та провівши деякі перетворення, отримуємо:

$$\frac{dC_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} \kappa_1 e^{\kappa_1 \varepsilon} + \frac{dC_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} \kappa_2 e^{\kappa_2 \varepsilon} = A \sin \varepsilon + B \cos \varepsilon + D. \quad (21)$$

Крім того, підберемо функції $C_1(\varepsilon)$ і $C_2(\varepsilon)$ таким чином, щоб виконувалась умова:

$$\frac{dC_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} e^{\kappa_1 \varepsilon} + \frac{dC_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} e^{\kappa_2 \varepsilon} = 0. \quad (22)$$

Знаходимо $C_1(\varepsilon)$ і $C_2(\varepsilon)$, розв'язуючи рівняння (21) та (22). В результаті проведених математичних перетворень отримаємо:

$$\frac{dC_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{A \sin \varepsilon + B \cos \varepsilon + D}{e^{\kappa_2 \varepsilon} (\kappa_2 - \kappa_1)}. \quad (23)$$

Інтегруючи останнє, отримуємо:

$$C_2(\varepsilon) = \frac{e^{-\kappa_2 \varepsilon}}{\kappa_2 - \kappa_1} \left[\frac{A}{\kappa_2^2 + 1} (-\kappa_2 \sin \varepsilon - \cos \varepsilon) + \frac{B}{\kappa_2^2 + 1} (-\kappa_2 \cos \varepsilon + \sin \varepsilon) - \frac{D}{\kappa_2} \right]. \quad (24)$$

Аналогічним чином знаходимо $C_1(\varepsilon)$:

$$C_1(\varepsilon) = \frac{e^{-\kappa_1 \varepsilon}}{\kappa_1 - \kappa_2} \left[\frac{A}{\kappa_1^2 + 1} (-\kappa_1 \sin \varepsilon - \cos \varepsilon) + \frac{B}{\kappa_1^2 + 1} (-\kappa_1 \cos \varepsilon + \sin \varepsilon) - \frac{D}{\kappa_1} \right]. \quad (25)$$

Внаслідок того, що радіальні напруження на поверхні матеріалу відсутні, то для першого шару $\sigma_r^{K-1} = 0$ та $d\sigma_r^{K-1}/d\varepsilon = 0$. Враховуючи останнє та підставляючи $C_1(\varepsilon)$ і $C_2(\varepsilon)$ в рівняння (18), отримуємо остаточний вираз для визначення напружень σ_ε^K :

$$\sigma_\varepsilon^K = C_1 e^{\kappa_1 \varepsilon} + C_2 e^{\kappa_2 \varepsilon} + A_1 \sin \varepsilon + B_1 \cos \varepsilon + D_1, \quad (26)$$

$$\text{де } A_1 = \frac{B - \kappa_1 A}{(\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_1^2 + 1)} + \frac{B - \kappa_2 A}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\kappa_2^2 + 1)};$$

$$B_1 = \frac{A + \kappa_1 B}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\kappa_1^2 + 1)} + \frac{A + \kappa_2 B}{(\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_2^2 + 1)};$$

$$D_1 = \frac{D}{\kappa_1 \kappa_2}.$$

Сталі інтегрування визначаємо з граничних умов

$\sigma_\varepsilon^K \Big|_{\varepsilon=\pm\beta} = 0$, підставляючи їх у вираз (26), а саме:

$$\begin{cases} C_1 e^{\kappa_1 \beta} + C_2 e^{\kappa_2 \beta} + A_1 \sin \beta + B_1 \cos \beta + D_1 = 0, \\ C_1 e^{-\kappa_1 \beta} + C_2 e^{-\kappa_2 \beta} + A_1 \sin(-\beta) + B_1 \cos(-\beta) + D_1 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Помноживши друге рівняння системи (27) на $e^{2\kappa_1 \beta}$ та віднімаючи від першого друге, отримуємо:

$$C_2 = \frac{\left[(A_1 \sin \beta - B_1 \cos \beta - D_1) e^{2\kappa_1 \beta} \right] e^{\kappa_2 \beta}}{e^{2\kappa_2 \beta} - e^{2\kappa_1 \beta}} - \frac{(A_1 \sin \beta + B_1 \cos \beta + D_1) e^{\kappa_2 \beta}}{e^{2\kappa_2 \beta} - e^{2\kappa_1 \beta}} \quad (28)$$

Аналогічно знаходимо C_1 :

$$C_1 = \frac{\left[(A_1 \sin \beta - B_1 \cos \beta - D_1) e^{2\kappa_2 \beta} \right] e^{\kappa_1 \beta}}{e^{2\kappa_1 \beta} - e^{2\kappa_2 \beta}} - \frac{(A_1 \sin \beta + B_1 \cos \beta + D_1) e^{\kappa_1 \beta}}{e^{2\kappa_1 \beta} - e^{2\kappa_2 \beta}} \quad (29)$$

Тоді, враховуючи (26), рівняння (11) матиме вигляд:

$$\sigma_r^k = \frac{f \frac{r_k}{h_k} \sigma_r^{k-1} - (\ddot{z}_1 - g \cos \alpha_p) \rho_{zp} \frac{r_k}{f} \cos \varepsilon - \frac{2C - C_1 k_1 e^{k_1 \varepsilon} - C_2 k_2 e^{k_2 \varepsilon} - A_1 \cos \varepsilon - B_1 \sin \varepsilon}{f \left(\frac{r_k}{h_k} + 2 \right)}}{f \left(\frac{r_k}{h_k} + 2 \right)} \quad (30)$$

Аналізуючи значення коефіцієнта D у виразі (14), для даних умов розпушення пластичного матеріалу отримуємо:

$$\frac{f \frac{r_k}{h_k} \frac{d\sigma_r^{k-1}}{d\varepsilon} - \frac{r_k}{h_k} \sigma_r^{k-1}}{f \frac{r_k}{h_k} \frac{d\sigma_r^{k-1}}{d\varepsilon} - \frac{r_k}{h_k} \sigma_r^{k-1} - 2C \left(\frac{r_k}{h_k} + 1 \right)} 100\% = 6...11\% \quad (31)$$

Враховуючи це, вважаємо, що коефіцієнт D практично не залежить від координати ε . Тому вирази (26) і (30) справедливі не тільки для першого, а й для другого та наступних шарів матеріалу. В іншому випадку формули розрахунку σ_ε^k і σ_r^k ($k=2...N$) набирають громіздкого вигляду, що веде до неможливості їх практичного застосування.

Задаючись певним кроком h_k зміни r_k , шар за шаром, проводимо розрахунки напружень σ_ε^k і σ_r^k ($k=1...N$). Очевидно, що при деякому значенні r_k , за умови $\sigma_\varepsilon^k > [\sigma_{роз}]$ відбудеться процес руйнування.

Характер зміни $\sigma_\varepsilon^k = f(x)$ для напівтвердого шару ($C=0,04\text{МПа}$, $\rho_{zp}=1700\text{кг/м}^3$) товщиною $h=0,16$ м наведений на рис. 2.

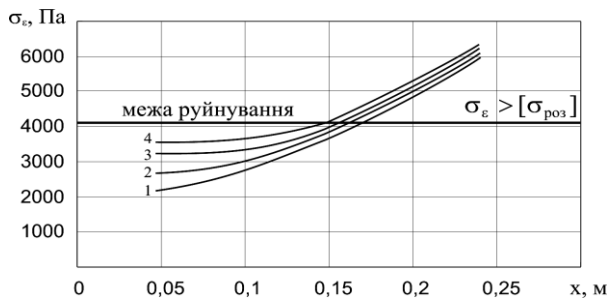


Рисунок 2 – Залежність напружень розтягу нижнього шару ґрунтової скиби від зміни R_x вздовж осі x : 1 – $V_{ск}=0,05$ м/с; 2 – $V_{ск}=0,1$ м/с; 3 – $V_{ск}=0,15$ м/с; 4 – $V_{ск}=0,2$ м/с

З рис. 2 видно, що для заданих геометричних параметрів пластичного матеріалу суттєвий вплив на напруження розтягу здійснює зміна радіуса R_x вздовж осі x , за яким вона деформується. Руйнування шару пластичного матеріалу відбувається при $x=0,14...0,17$ м, коли напруження розтягу її нижнього шару досягають гранично допустимих значень, за радіуса $R_x=0,4...0,3$ м. Очевидно, що наступне зменшення радіуса R_x призведе до подальшого руйнування.

Оскільки аналітичний опис напруженого стану

зруйнованих навпіл елементів досить складний, то раціональне значення радіуса вихідного перерізу транспортувальної поверхні, яке забезпечуватиме необхідні розміри ріжучих агрегатів, буде встановлено експериментально.

З метою встановлення раціональних параметрів транспортувальної поверхні, що забезпечуватиме процес розпушення шару пластичного матеріалу за рахунок змінного радіуса поперечних перерізів, розроблялась її математична модель. Позначимо довжину розпушувального елемента через величину L , ширину різальної частини через b , в межах якої знаходиться змінний параметр t , та будемо вважати, що функції $y = \varphi_R(u)$ і $z = \psi_R(u)$ параметрично описують криву на тильній частині досліджуваної поверхні.

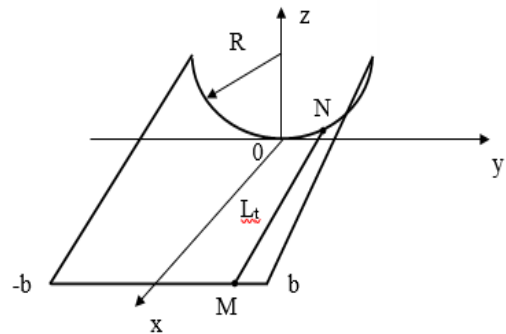


Рисунок 3 – Схема транспортувальної поверхні розпушувального елемента

Розглянемо довільне положення твірної в деякому проміжному значенні t . Тоді, $M(L; t; 0)$ і $N(0; \varphi_R(u); \psi_R(u))$ – дві точки з відповідними координатами, які лежать на ній. Закон відповідності між даними точками виразимо через довільну функцію, а саме:

$$u = f(t), \quad (32)$$

де $f(t)$ – неперервна та монотонно зростаюча на відрізку $(0; b)$ функція (рис. 3), $f(0)=0$.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки із заданими координатами, має вигляд:

$$\frac{x-L}{-L} = \frac{y-t}{\varphi_R(u)-t} = \frac{z}{\psi_R(u)}, \quad \text{для } 0 \leq t \leq b. \quad (33)$$

Оскільки досліджувана поверхня є об'єднанням твірних, то буде справедливим наступне рівняння:

$$\begin{cases} \frac{x-L}{-L} = \frac{y-t}{\varphi_R(u)-t}, \\ \frac{x-L}{-L} = \frac{z}{\psi_R(u)} \end{cases} \quad (34)$$

Тоді:

$$\frac{x-L}{-L} = \frac{L-x}{L} = X, \quad (35)$$

де $0 \leq x \leq L$, або

$$0 \leq X \leq 1. \quad (36)$$

Таким чином:

$$\begin{cases} X = \frac{y-t}{\varphi_R(u)-t}, \\ X = \frac{z}{\psi_R(u)} \end{cases} \quad (37)$$

Виразимо із системи (37) параметр t . Для цього запишемо, що $\psi_R(u) = \frac{z}{X}$, де $\psi_R(u)$, функція монотонно зростаюча на $[0, f(b)]$. Оскільки, вказана функція є такою, то існує обернена їй функція $\psi_R^{-1}(u)$, тобто: $\psi_R^{-1}(\psi_R(u)) = \psi_R^{-1}(\frac{z}{X})$, звідки:

$$u = \psi_R^{-1}(\frac{z}{X}) \quad (38)$$

Якщо взяти до уваги вираз (15), то останнє рівняння набере вигляду:

$$f(t) = \psi_R^{-1}(\frac{z}{X}) \quad (39)$$

$$t = f^{-1}(\psi_R^{-1}(\frac{z}{X})) \quad (40)$$

Підставивши значення (40) в перше рівняння системи (37), отримаємо рівняння правої половини досліджуваної поверхні:

$$X = \frac{y - f^{-1}(\psi_R^{-1}(\frac{z}{X}))}{\varphi_R(\psi_R^{-1}(\frac{z}{X})) - f^{-1}(\psi_R^{-1}(\frac{z}{X}))} \quad (41)$$

Рівномірне деформування шару пластичного матеріалу в межах поперечного перерізу транспортальної поверхні буде забезпечуватись за умови:

$$\begin{cases} y = R \sin u, \\ z = R - R \cos u \end{cases} \quad (42)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \varphi_R(u) &= R \sin u, \\ \psi_R(u) &= R - R \cos u \end{aligned} \quad (43)$$

В силу висловленого вище припущення щодо функції $\psi_R(u)$, маємо умову

$$0 \leq f(b) \leq \pi \quad (44)$$

Поклавши, що $\tau_R = \psi_R(u)$, отримаємо: $\tau_R = R - R \cos u$, звідки

$$u = \arccos(1 - \frac{\tau_R}{R}) \quad (45)$$

Отже, обернена функція запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} u &= \arccos(1 - \frac{\tau_R}{R}); \\ \psi_R^{-1}(\frac{z}{X}) &= \arccos(1 - \frac{z}{RX}) \end{aligned} \quad (46)$$

Запишемо на основі ще одного припущення функцію відповідності між точками M та N у вигляді:

$$f(t) = \omega_1 t \quad (47)$$

де ω_1 – коефіцієнт пропорційності.

Враховуючи (47), умову (44) можна записати у вигляді:

$$0 \leq \omega_1 b \leq \frac{\pi}{2}, \text{ звідки } 0 \leq \omega_1 \leq \frac{\pi}{2b} \quad (48)$$

На підставі вище наведених викладок отримаємо рівняння шуканої поверхні:

$$\begin{aligned} X &= \frac{y - \frac{1}{\omega_1} \psi_R^{-1}(\frac{z}{X})}{R \sin(\psi_R^{-1}(\frac{z}{X})) - \frac{1}{\omega_1} (\psi_R^{-1}(\frac{z}{X}))}, \text{ або} \\ X &= \frac{\omega_1 y - \arccos(1 - \frac{z}{RX})}{\omega_1 R \sin(\arccos(1 - \frac{z}{RX})) - \arccos(1 - \frac{z}{RX})} \end{aligned} \quad (49)$$

Оскільки $\sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}$, то

$$\sin(\arccos(1 - \frac{z}{RX})) = \sqrt{\frac{2z}{RX} - \frac{z^2}{R^2 X^2}}$$

Тоді рівняння (48) запишемо, як:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\omega_1 y - \arccos(1 - \frac{z}{RX})}{\omega_1 \sqrt{2RXz - z^2} - X \arccos(1 - \frac{z}{RX})} X, \text{ або} \\ y &= \sqrt{2RXz - z^2} + \frac{1-X}{\omega_1} \arccos(1 - \frac{z}{RX}) \end{aligned} \quad (50)$$

Враховуючи спрощення (50), маємо остаточне рівняння шуканої поверхні:

$$y = \sqrt{\frac{2Rz(L-x)}{L} - z^2} + \frac{x}{L \omega_1} \arccos(1 - \frac{Lz}{R(L-x)}) \quad (51)$$

Розглянемо переріз цієї поверхні площиною $x = const$. Рівняння зазначеного перерізу буде аналогічним рівнянню площини (51) при підстановці в нього сталої величини X . Кривизна в точці (x, y, z) цього перерізу ($x \equiv const$) дорівнює:

$$K = \frac{\omega_1^2 \left[R^2 X^2 \omega_1 + R X (1-X) - (1-X) z \right]}{\left[(R X \omega_1 + 1 - X)^2 - 2(1-X) \omega_1 z \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (52)$$

Враховуючи (35), можна записати, що:

$$1 - X = 1 - 1 + \frac{x}{L} = \frac{x}{L} \quad (53)$$

Тоді вираз для кривизни перерізу набере вигляду:

$$K = \frac{L \omega_1^2 \left[R^2 (L-x)^2 \omega_1 + R x (L-x) - L x z \right]}{\left[(R(L-x) \omega_1 + x)^2 - 2 L x \omega_1 z \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (54)$$

З метою подальшого вивчення кривизни введемо позначення:

$$A_2 = L \omega_1^2 \left[R^2 (L-x)^2 \omega_1 + R x (L-x) \right];$$

$$B_2 = L^2 x \omega_1^2;$$

$$Q_2 = R(L-x)\omega_1 + x; D_2 = 2Lx\omega_1. \quad (55)$$

Розглянемо функцію $F(z) = \frac{A_2 - B_2 z}{[Q_2^2 - D_2 z]^2}$,

де $z \geq 0$.

Тоді кривизна запишеться у вигляді: $K = |F(z)|$.

Знайдемо верхню межу зміни z при фіксованому x . Маємо:

$$z = X \psi(u) = X \psi(f(t)) \leq X \psi(f(b)) = X \psi(\omega_1 b) = 2X R \sin^2 \frac{\omega_1 b}{2} = 2R \frac{L-x}{L} \sin^2 \frac{\omega_1 b}{2} = \alpha_x \quad (56)$$

Таким чином, для перерізу $x = x \equiv const$:

$$0 \leq z \leq \alpha_x = 2R \frac{L-x}{L} \sin^2 \frac{\omega_1 b}{2}. \quad (57)$$

Розкладемо функцію $F(z)$ за формулою Тейлора [9, 10] в околі точки $z_0 = 0$ при $n = 1$:

$$F(z) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} z + \frac{F''(\theta)}{2!} z^2, \quad (58)$$

де $0 < \theta < z$.

Складові виразу (58) приймуть наступний ви-

гляд: $F(0) = \frac{A_2}{C_2^3};$

$$F'(z) = \frac{\frac{3}{2} A_2 D_2 - B_2 Q_2^2 - \frac{1}{2} B_2 D_2}{[Q_2^2 - D_2 z]^2};$$

$$F''(z) = \frac{-3B_2 D_2 Q_2^2 + \frac{15}{4} A_2 D_2^2 - \frac{3}{4} B_2 D_2^2 z}{[Q_2^2 - D_2 z]^7}. \quad (59)$$

Таким чином, підставляючи значення складових (59) у вираз (58) та враховуючи заміну (55), отримаємо значення шуканої функції:

$$F(z) = \frac{R L \omega_1^2 (L-x)}{[R(L-x)\omega_1 + x]^2} + \frac{L^2 \omega_1^2 x [2R(L-x)\omega_1 - x]}{[R(L-x)\omega_1 + x]^4} z + \eta_1(z). \quad (60)$$

Оскільки вираз (60) показує, що кривизна поперечних перерізів досліджуваної поверхні має змінне значення за висотою розпушувального елемента.

Найбільший вплив z на зміну кривизни визначає коефіцієнт другого члена ряду (60), який позначимо через k_z . Третій член цього ряду впливає на зміну кривизни не значно і тому ним можна знехтувати.

Для мінімізації зміни кривизни необхідно було визначити вплив інших параметрів транспортувальної поверхні на коефіцієнт k_z . Задача вирішувалася на ПК завдяки визначенню k_z для поперечних пере-

різів $x=5; 10; 15; 20; 25; 30; 40; 50$ мм. Результати досліджень наведені на рисунках 4–7 у вигляді графічних залежностей.

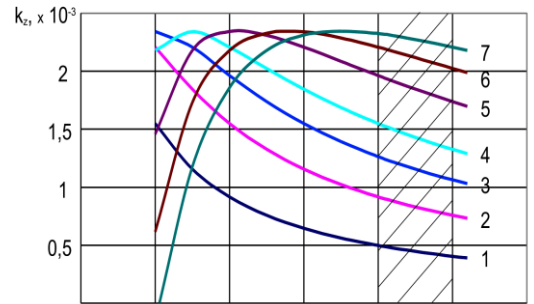


Рисунок 4 – Залежність коефіцієнта k_z від довжини транспортувальної поверхні ($R=0,1$ м; $\omega_1=0,046$ рад/см): 1 – $x=5$ мм; 2 – $x=10$ мм; 3 – $x=15$ мм; 4 – $x=20$ мм; 5 – $x=30$ мм; 6 – $x=40$ мм; 7 – $x=50$ мм



Рисунок 5 – Залежність коефіцієнта k_z від довжини транспортувальної поверхні ($R=0,1$ м; $\omega_1=0,008$ рад/см): 1 – $x=5$ мм; 2 – $x=10$ мм; 3 – $x=15$ мм; 4 – $x=20$ мм; 5 – $x=30$ мм; 6 – $x=40$ мм; 7 – $x=50$ мм

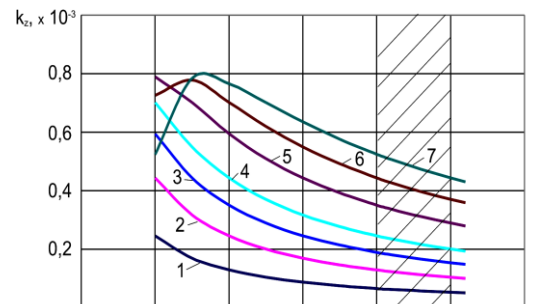


Рисунок 6 – Залежність коефіцієнта k_z від довжини транспортувальної поверхні ($R=0,2$ м; $\omega_1=0,046$ рад/см): 1 – $x=5$ мм; 2 – $x=10$ мм; 3 – $x=15$ мм; 4 – $x=20$ мм; 5 – $x=30$ мм; 6 – $x=40$ мм; 7 – $x=50$ мм

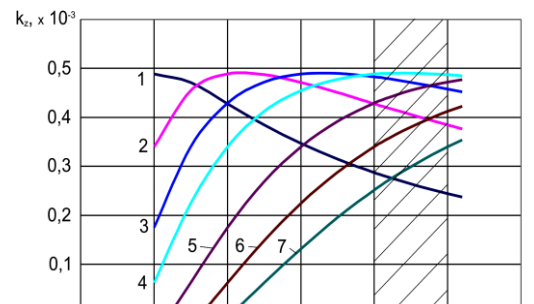
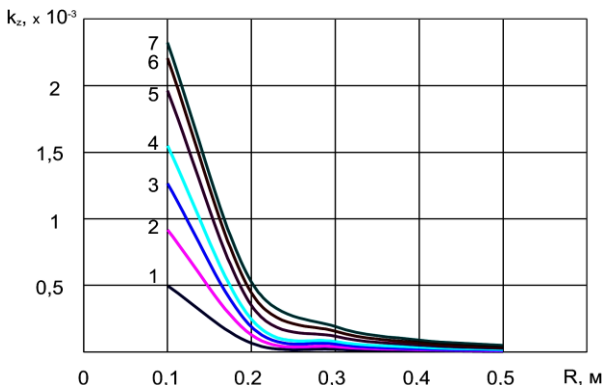


Рисунок 7 – Залежність коефіцієнта k_z від довжини

транспортувальної поверхні ($R=0,2\text{м}$; $\omega_1=0,008$ рад/см): 1 – $x=5$ мм; 2 – $x=10$ мм; 3 – $x=15$ мм; 4 – $x=20$ мм; 5 – $x=30$ мм; 6 – $x=40$ мм; 7 – $x=50$ мм

Наведені графічні залежності показують характер зміни значень коефіцієнта k_z залежно від довжини розпушувального елемента для різних x , за максимального та мінімального ω_l . Так, видно, що для значення вихідного радіуса транспортувальної поверхні $R=0,1$ м (рис. 4, 5) максимальна величина k_z в середньому у 3 рази більша ніж для поверхні із $R=0,2$ м (рис. 6, 7). Щодо коефіцієнта ω_l , то раціональним є його максимальне значення ($\omega_l=0,046$ рад/см), оскільки при цьому величина k_z монотонно зменшується (рис. 4, 6) для всіх досліджуваних поперечних перерізів транспортувальної поверхні зі збільшенням її довжини. Збільшення довжини є доцільним до $L = 0,4..0,5$ м, бо надалі інтенсивність зміни кривизни за висотою поперечних перерізів цієї поверхні є незначною. Тому, для інженерних розрахунків рекомендовано приймати довжину транспортувальної поверхні в межах $0,4..0,5$ м, що дозволяє запобігти необгрунтованому збільшенню опору переміщенню ґрунтової скиби по даній поверхні.

Зміна величини радіуса вихідного перерізу також впливає на зміну форми досліджуваної поверхні. Так, графічна залежність коефіцієнта k_z від вказаного радіуса R для різних значень x зображена на рис. 8.



Риснок 8 – Залежність коефіцієнта k_z від радіуса вихідного перерізу транспортувальної поверхні ($L = 0,4$ м; $\omega_1 = 0,046$ рад/см): 1 – $x=5$ мм; 2 – $x=10$ мм; 3 – $x=15$ мм; 4 – $x=20$ мм; 5 – $x=30$ мм; 6 – $x=40$ мм; 7 – $x=50$ мм

ВИСНОВКИ. Виходячи з вище наведеного, можна зазначити те, що для забезпечення процесу подрібнення шару пластичного матеріалу доцільним є використання транспортувальної поверхні, радіус поперечних перерізів якої буде зменшуватись за напрямом руху. Також встановлено, що збільшення радіуса вихідного перерізу транспортувальної пове-

рхні R призводить до зменшення зміни кривизни за висотою поперечних перерізів транспортувальної поверхні. Так, суттєве зменшення k_z відбувається для значень вихідного радіуса $R=0,18..0,4$ м. Тому, під час проектування розпушувальних елементів доцільно приймати радіус вихідного перерізу $R=0,18$ м і більше. Дані результати досліджень доцільно використовувати для проектування різних типів ґрунторозпушувальної техніки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лук'ячук О. П., Рижий О. П., Ігнатюк Р. М. Конструкція ярусного робочого органа для глибокої диференційованої розробки. *Вісник НГУ*. 2017. № 4. С 43–48.
2. Калько А. Д., Ігнатюк Р. М., Стадник О. С., Рижий О. П., Пахаренко В. Л. Обґрунтування параметрів розробки алмазоносних родовищ у складних гідрогеологічних умовах. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2019. № 1(114). С. 91–98. DOI: <https://doi.org/10.30929/1995-0519.2019.1.91-98>.
3. Ткачук В. Ф., Лук'ячук О. П., Мельник А. В. Дослідження моделі подрібнення ґрунтової скиби на кривизні робочих поверхонь ґрунторозпушувача. *Вісник НУВГП: Зб. наук. праць*. 2008. Вип. 2 (42). Ч. 1. С. 374–380.
4. Кравець С. В., Кованько В. В., Лук'ячук О. П. Наукові основи створення землерійно-ярусних машин і підземно рухомих пристроїв. Монографія. Рівне : НУВГП, 2015. 322 с.
5. Bobliakh S., Kozyar V., Ignatyuk R. Subsurface reactive transport processes modeling. *Transactions of Kremenchuk Mikhail Ostrogradsky National University*. 2012. Vol. 76. No 5. P. 165–169.
6. Koetsier T., Bergmans L. Mathematics and the Divine. Elsevier. 2005. P. 169.
7. Левківський Д.вВ. Визначення напружено-деформованого стану пластини методом прямих з використанням рядів Фур'є. *Збірник «Опір матеріалів і теорія споруд»*. 2013. Вип. 91. С. 174–180.
8. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. Київ: Ігнатекс – Україна, 2011. 648 с.
9. Cano José Juan Rodríguez, de Amo Enrique. Taylor's Expansion Revisited: A General Formula for the Remainder. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Volume 2012. 5 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/2012/645736>.
10. Liu Z. Note on inequalities involving integral Taylor's remainder. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2005. Vol. 6. No. 3. Article ID 72, 6 p.

JUSTIFICATION OF TRANSPORT PARAMETERS AND MODELING OF THE PROCESS OF DESTRUCTION OF THE ELASTIC-PLASTIC ENVIRONMENT

R. Ignatyuk, O. Ryzhyi, L. Serilko, O. Stadnyk, D. Serilko

The National University of Water and Environmental Engineering

ORCID:0000-0002-1004-1469; 0000-0002-8592-1217; 0000-0002-2396-561X, 0000-0001-5881-2413; 0000-0002-9066-3806

Purpose. The substantiation of the mathematical model of mechanical deformation of the elastic-plastic medium and the modeling of the transport process of the expansion assemblies. **Methodology.** Mathematical and theoretical studies were based on the fundamental theory of continuum mechanics and general positions of engineering mechanics. Analytical and graphical analysis of mathematical models carried out on a PC in a specialized software complex. **Results.** In the current conditions of economic development of the country, considerable attention should be paid to the development and modernization of certain sectors of the economy. Significant amounts of work, which are accompanied by the development of soil of different properties, which can be defined as an elastic-plastic material. These studies will solve a number of problems that are acute not only in agriculture but also in construction, in the open pit mining, reclamation, one of which is an imperfect process of loosening the soil during its cultivation. Therefore, the urgent problem is to establish rational parameters of the transport surface of the unit for loosening the elastic-plastic material. The developed mathematical model allows determining the emerging stress, which in turn determines the boundary of the destruction of the elastic-plastic material. In the design of lining assemblies, it is advisable to have a radius of the outlet section $R = 0.18$ m or more. **Originality.** The mathematical models for the process of destruction of elastic-plastic material and forecasting of optimal transport parameters for designing of expansion assemblies are obtained. **Practical value.** The developed mathematical model will provide an improvement in the process of loosening elastic-plastic material, and engineering calculations during the design of the rutter can prevent unwarranted increase in resistance, with displaced materials on the cutting surface. References 10, figures 8.

Keywords: unit, material, stress, deformation, soil, destruction.

REFERENCES

1. Luk'yanchuk, A. P., Ryzhyi, A. P., Ignatiuk, R. M. (2017). Konstruktsiia yarusnoho robochoho orhana dlia hlybokoi dyferentsiiovanoi rozrobky [Design of tiered operating unit for deep differentiated tillage] *Bulletin NMU*. Number 4, pp. 43–48. [in Ukrainian]
2. Calko, A., Ignatyuk, R., Stadnyk, O., Ryzhyi, O., Paharenko, V. (2019). Obgruntuvannia parametriv rozrobky alamazonosnykh rodovyshch u skladnykh hidroheolohichnykh umovakh [The substance of the parameters of the development of diamantiferous deposits in complex hydrogeological conditions]. *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*. Issue 1/2019 (114). pp. 91–98. DOI: <https://doi.org/10.30929/1995-0519.2019.1.91-98>. [in Ukrainian]
3. Tkachuk, V., Lukianchuk, O., Melnyk, A. (2008). Doslidzhennia modeli podribnennia gruntovoi skyby na kryvyzni robochykh poverkhon gruntozpushuvacha [Model of grinding chunks of soil on the soil surface curvature working ripper] *NUWMNRU Bulletin: Coll. Science. works*. Vol. 2 (42). Part 1, pp. 374–380.
4. Kravets, S., Kovanko, V., Lukianchuk, O. (2015). Naukovi osnovy stvorennia zemleryino-yarusnykh mashyn i pidzemnorukhomykh prystroiv: monohrafiia [Scientific bases of creation of earthmoving machines and underground mobile devices: monograph]. Rivne, 322 p. [in Ukrainian]
5. Bobliakh, S., Kozyar, V., Ignatyuk, R. (2012). Subsurface reactive transport processes modeling. *Transactions of Kremenchuk Mikhail Ostrogradsky National University*. Vol. 76. № 5, pp. 165–169.
6. Koetsier, T., Bergmans, L. (2005). *Mathematics and the Divine*. Elsevier. pp. 169.
7. Levkivskiy, D. V. (2013). Vyznachennia napruzhenno-deformovanoho stanu plastyny metodom priamykh z vykorystanniam riadiv Fur'ie. [Determination of the stress-strain state of the plate by the method of lines using Fourier series]. *Zbirnyk KNUBA «Opir materialiv i teoriia sporud»*. № 91, pp. 174–180.
8. Dubovyk, V. P., Yuryk, I. I. (2011). *Vyshcha matematyka [Higher mathematics]*. Kyiv, 648 p. [in Ukrainian]
9. Cano, José Juan Rodríguez, de Amo, Enrique. (2012). Taylor's Expansion Revisited: A General Formula for the Remainder. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Volume 2012. 5 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/2012/645736>.
10. Liu, Z. (2005). Note on inequalities involving integral Taylor's remainder. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Vol. 6. No. 3, Article ID 72, 6 p.

Стаття надійшла 10.10.2021