УДК 519.85 DOI: https://doi.org/10.32782/1995-0519.2022.1.15

КОМБІНАТОРНА ЗАДАЧА ПРО ПОБУДОВУ МОСТІВ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Юрій Олексійчук
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36014, olexijchuk@gmail.com;
ORCID: 0000-0002-0585-3307

Дмитро Ольховський
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36014, dmitriy@olhovsky.name;
ORCID: 0000-0003-0313-6977

Олена Ольховська
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36014, lena@olhovsky.name;
ORCID: 0000-0001-5366-5995

Тетяна Чілікіна
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36014, tv.0502@gmail.com;
ORCID: 0000-0002-0585-3307

Оксана Черненко
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій,
Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36014, oksanachernenko7@gmail.com;
ORCID: 0000-0002-9084-0999

Оксана Оріхівська
старший викладач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Полтавський університет економіки і торгівлі, вул. Коваля, 3, Полтава, Україна, 36014, aka.jeita@gmail.com;
ORCID: 0000-0003-2775-0832

В роботі розглядається комбінаторна задача оптимізації побудови мостів. Нехай є місто, яке розташоване на берегах річки. Місто складається із мікрорайонів, які сполучені між собою дорогами. Для доріг відома максимальна пропускна спроможність. Для кращого з'єднання берегів заплановане будівництво кількох мостів з відомою пропускною спроможністю. Але всі ці мости не можуть бути побудовані одночасно. Задача полягає у виборі певної кількості мостів із запланованих, які будуть побудовані в першу чергу, з метою максимізації транспортного потоку між берегами. Задача може бути зведена до комбінаторної задачі знаходження максимального потоку за допомогою введення фіктивного джерела та фіктивного стоку. В загальному випадку задача є NP-важкою. Якщо відкинути комбінаторні обмеження, то задача зводиться до задачі знаходження максимального потоку в транспортній мережі, для якої відомі поліноміальні алгоритми. Також задача про побудову мостів може бути зведеною до задачі евклідової комбінаторної оптимізації на перестановках. Для таких задач розроблено багато методів розв'язування. В роботі побудовано математичну модель задачі, розглянуто методи розв'язування задачі. Для розв'язання задачі може бути застосований один із загальних методів для задач евклідової комбінаторної оптимізації на перестановках. Для комбінаторних задач знаходження максимального потоку побудовані спеціальні методи. Наприклад, жадібний метод та метод гілок та меж. Жадібний метод є евристичним. За часом роботи він є поліноміальним, але не завжди дозволяє знайти точний розв'язок. Метод гілок та меж може використовуватися для знаходження як точного розв'язку, так і наближеного.

Ключові слова: задача про побудову мостів, комбінаторна оптимізація, комбінаторна задача знаходження максимального потоку, задача евклідової комбінаторної оптимізації на перестановках, метод гілок та меж.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Задачі комбінаторної оптимізації використовуються для моделювання різноманітних фізичних, економічних та соціальних процесів [1–13]. Серед них виділяють клас задач евклідової комбінаторної оптимізації [1–4]. В роботі розглядається одна прикладна задача, яка може бути зведена до задачі евклідової комбінаторної оптимізації на перестановках. Оптимізації дорожньої мережі присвячено багато публікацій. Наприклад, в [15] розглядається застосування мурашиного алгоритму для таких задач. Але задача про побудову мостів в такій постановці розглядається вперше.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Нехай вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_r$ графа позначені основні мікрорайони міста, розміщеного на берегах річки, а дугами U – існуючі дороги та мости, а також мости, побудова яких запланована в майбутньому, (підмножина $U' \subseteq U$). Для кожної вершини v_i задані величини p_i, що характеризують вихідний транспортний потік із мікрорайону, та q_i, що характеризує вхідний транспортний потік. Для кожної дуги відома пропускна спроможність b_{ij}. Нехай запланована побудова k нових мостів, але є можливість побудувати тільки d мостів ($d < k$).

Задача полягає у визначені списку мостів, які потрібно побудувати, щоб допустимий транспортний потік з одного берега на інший був максимальним.

Будемо вважати, що на одному березі розміщені, в основному, «спальні» райони, а на другому – промислові. І будемо шукати максимальний потік зі «спального» берега на «промисловий» (задача характерна для початку дня). Обернена задача розв'язується аналогічно, оскільки у вечірні години можна вважати, що значення p_i та q_i міняються місцями.

Побудова моделі. Введемо фіктивне джерело v_s і з'єднаємо його зі всіма вершинами «спального» берегу дугами із пропускною спроможністю $b_{si} = p_i$. Аналогічно з'єднаємо всі вершини «промислового» берегу із фіктивним стоком дугами з пропускною спроможністю $b_{jt} = q_j$.

Побудуємо математичну модель задачі. Цільова функція:

$$f = \max\left(\sum_{u_{jt} \in U} y_{jt}\right), \qquad (1)$$

обмеження:

$$\sum_{u_{iz} \in U} y_{iz} = \sum_{u_{zj} \in U} y_{zj}, \; z \neq s, \; z \neq s, \qquad (2)$$

$$0 \le y_{ij} \le b_{ij}, \; \forall u_{ij} \in U, \qquad (3)$$

$$y_{ij} \le x_{ij}, \; \forall u_{ij} \in U', \qquad (4)$$

$$x = \left(x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, \ldots, x_{i_k j_k}\right) \in E_{k2}(G), \qquad (5)$$

де $G = \left\{0^{k-d}, M^d\right\}$, M – досить велике число ($M \ge \max\limits_{u_{ij} \in U'}\left(b_{ij}\right)$), $E_{k2}(G)$ – множина перестановок із k чисел, серед яких 2 різні (частковий випадок множини перестановок).

Модель (1)–(5) є задачею евклідової комбінаторної оптимізації на перестановках. В [7] доведено, що в загальному випадку вона є NP-важкою.

Приклад. Дано місто, яке складається з п'яти мікрорайонів. «Спальні» мікрорайони v_1, v_2, v_3 розташовані на одному березі річки, промислові мікрорайони v_4, v_5 – на іншому. Відомий вихідний транспортний потік для «спальних» мікрорайонів $p_1 = 8$, $p_2 = 10$, $p_3 = 9$ та вхідний транспортний потік для промислових $q_4 = 11$, $q_5 = 16$. Наявні шляхи між мікрорайонами та їх пропускна спроможність задана на графі (рис. 1). Мікрорайони v_1 та v_4 з'єднані мостом з пропускною спроможністю 17 од. Запланована побудова ще трьох мостів u_{25}, u_{34} і u_{35} з пропускними спроможностями 5, 6 та 8 відповідно. Але є можливість побудувати лише 2. Потрібно вибрати два із трьох запланованих мостів, побудова яких максимізує транспортний потік зі «спального» берега на промисловий.

Математична модель. Введемо фіктивне джерело та фіктивний стік. Фіктивне джерело з'єднаємо дугами із усіма вершинами «спального» берега, пропускну спроможність візьмемо рівною відповідними вихідним потокам із районів. Аналогічно усі вершини промислового берега з'єднаємо із стоком дугами з пропускною спроможністю рівною вхідному потоку відповідних районів (рис. 2).

Таким чином, ми отримали комбінаторну задачу знаходження максимального потоку [8]. Побудуємо її математичну модель.

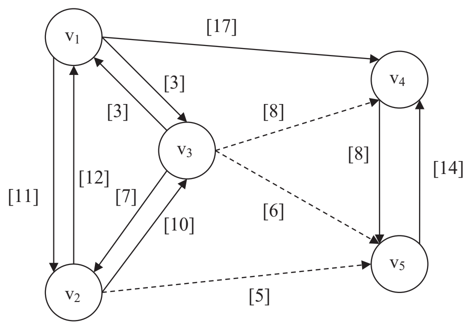

Рисунок 1 – Схема розташування мікрорайонів міста

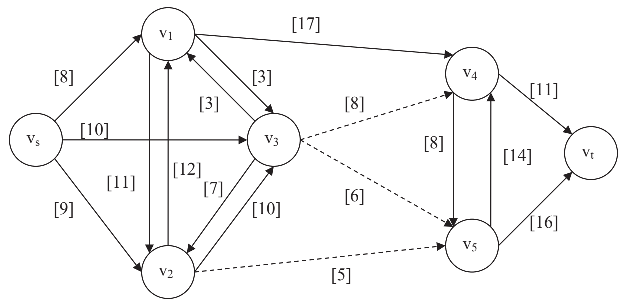

Рисунок 2 – Транспортна мережа із фіктивними джерелом та стоком

Побудуємо математичну модель задачі. Цільова функція (1):

$$f = \max(y_{s1} + y_{s2} + y_{s3});$$

обмеження:

збереження балансу у вузлах (2)

$$y_{s1} + y_{21} + y_{31} = y_{12} + y_{13} + y_{14},$$

$$y_{s2} + y_{12} + y_{32} = y_{21} + y_{23} + y_{25},$$

$$y_{s3} + y_{13} + y_{23} = y_{31} + y_{32} + y_{34} + y_{35},$$

$$y_{14} + y_{34} + y_{54} = y_{45} + y_{4t},$$

$$y_{25} + y_{35} + y_{45} = y_{54} + y_{5t};$$

обмеження на пропускну спроможність (3)

$0 \le y_{s1} \le 8$, $0 \le y_{s2} \le 9$,

$0 \le y_{s3} \le 10$, $0 \le y_{12} \le 11$,

$0 \le y_{13} \le 3$, $0 \le y_{14} \le 17$,

$0 \le y_{21} \le 12$, $0 \le y_{23} \le 10$,

$0 \le y_{25} \le 5$, $0 \le y_{31} \le 3$,

$0 \le y_{32} \le 7$, $0 \le y_{34} \le 8$,

$0 \le y_{35} \le 6$, $0 \le y_{45} \le 8$,

$0 \le y_{4t} \le 11$, $0 \le y_{54} \le 14$,

$0 \le y_{5t} \le 16$;

комбінаторні обмеження (4)–(5)

$$y_{25} \le x_{25},$$

$$y_{34} \le x_{34},$$

$$y_{35} \le x_{35},$$

$$x = (x_{25}, x_{34}, x_{35}) \in E_{32}(G),$$

де $G = \{0,10^2\}$ (візьмемо $M = 10$, оскільки $10 > \max\{5,6,8\}$).

Моделлю розглянутої задачі є задачею евклідової комбінаторної оптимізації на перестановках.

Методи розв'язування. В [16] розглядається зведення комбінаторних задач на графах до задач математичного програмування та розв'язування їх за допомогою MS Excel. Зауважимо, що цей підхід незастосовний для задачі (1)–(5), оскільки MS Excel працює з цілочисловими задачами, але не комбіноторними.

Для розв'язання задачі про побудову мостів може бути застосований один із загальних методів розв'язування евклідової комбінаторної оптимізації (наприклад, [1–3]). Але більш ефективно використовувати спеціальні методи розв'язування. В [8–11] розглядаються точні, наближені та евристичні методи розв'язування комбінаторних задач знаходження максимального потоку. Жадібний метод [10–11] дозволяє знайти розв'язок задачі за поліноміальний час, але він не гарантує оптимальність розв'язку. Метод гілок та меж дозволяє знайти точний розв'язок, а також може бути застосований для знаходження наближеного розв'язку. Найбільш ефективним є використання жадібного методу для знаходження початкового розв'язку, а потім методу гілок та меж для знаходження оптимального розв'язку.

Метод гілок та меж. Розглянемо метод гілок та меж для розв'язання задачі про побудову мостів [9]. Відкинемо комбінаторні умови (4)–(5) та отримаємо класичну задачу знаходження максимального потоку, для розв'язання якої відомі поліноміальні методи [12–14]. Нехай максимальний потік для класичної задачі дорівнює $|w|'$. Очевидно, що розв'язок початкової задачі не перевищить $|w|'$.

При фіксованих значеннях x_{ij} класичну задачу знаходження максимального потоку можна отримати, ввівши нові пропускні спроможності $b'_{ij} = \min\{b_{ij}, x_{ij}\}$.

Отже, розв'язок комбінаторної задачі знаходження максимального потоку можна отримати, розв'язавши $\dfrac{k!}{\eta_1!\eta_2!\cdot\ldots\cdot\eta_s!}$ класичних задач знаходження максимального потоку та вибравши серед їх розв'язків максимальний (метод повного перебору). Метод гілок та меж дозволяє суттєво зменшити кількість класичних задач та спростити їх розв'язання.

Пронумеруємо всі дуги, на які накладені комбінаторні обмеження, в порядку спадання пропускних спроможностей: $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Тобто, u_1 – дуга u_{ij}, для якої значення n_{ij} максимальне серед дуг з комбінаторними обмеженнями, і т. д.

За початкове рекордне значення F_0 можна взяти деякий наближений розв'язок задачі, отриманий, наприклад, жадібним методом [10]. Початковим етапом (вершиною дерева пошуку) будемо вважати задачу без комбінаторних обмежень, оцінкою v – її розв'язок $|w|'$.

Галуження будемо проводити наступним чином: візьмемо дугу u_z і покладемо відповідне значення x_{ij} почергово рівним усім допустимим різним значенням з G, починаючи з найменшого і закінчуючи найбільшим. Оцінкою v вершини дерева розв'язків будемо вважати розв'язок відповідної класичної задачі з пропускними спроможностями $b'_{ij} = \min\{b_{ij}, x_{ij}\}$. Якщо оцінка v перевищує поточне рекордне значення F_0, то продовжуємо галуження, інакше – відсікаємо вершину.

Якщо $z = k$, тобто для усіх дуг, на які накладені додаткові комбінаторні обмеження, відповідним x_{ij} привласнені конкретні значення із мультимножини G, то оцінка v буде допустимим розв'язком вихідної задачі. Якщо розв'язок $F_i = v$, перевищує поточне рекордне значення F_0, то приймаємо його за новий рекорд ($F_0 := F_i$).

Таким чином, змінюючи $z = 1, \ldots, k$ та використовуючи пошук в глибину, знаходиться оптимальний розв'язок вихідної задачі.

Величина v є оцінкою відповідної вершини дерева розв'язків, оскільки врахування комбінаторного обмеження для кожної наступної дуги не може збільшити максимальний потік. Якщо $v \le F_0$, де F_0 – поточне рекордне значення, то проводимо відсікання відповідної вершини, оскільки подальше галуження не дозволить покращити рекорд.

За умови $v > F_0$ ми продовжуємо галуження і фактично перебираємо всі варіанти, що потенційно можуть покращити рекордне значення. Тому розв'язок, отриманий за допомогою методу гілок та меж, є оптимальним.

Якщо потрібно знайти всі оптимальні розв'язки задачі, то умову відсікання потрібно замінити на $v < F_0$.

Зауваження. На кожному етапі галуження не обов'язково розв'язувати класичну задачу знаходження максимального потоку. Якщо значення y_{ij} у попередньому розв'язку не перевищує накладеного на нього комбінаторного обмеження x_{ij}, то розв'язок задачі не змінюється.

В іншому випадку розв'язок класичної задачі можна суттєво спростити. Отримана задача буде відрізнятися від вже розв'язаної лише пропускною спроможністю однієї дуги u_{ij}. Порахувавши величину $y_{ij} - x_{ij}$, потрібно знайти маршрут (або маршрути) із джерела в стік, що проходить через цю дугу, і зменшити величину потоку по кожній з дуг маршруту на величину $y_{ij} - x_{ij}$. Після цього застосувати, наприклад, метод Едмондса і Карпа [14] і спробувати збільшити величину потоку.

Метод гілок та меж дозволяє знайти точний розв'язок задачі. Але можуть бути випадки вхідних даних, де він зводиться до повного перебору. Тому доцільним виглядає використання цього методу для одержання наближеного розв'язку. За наближений розв'язок на деякому етапі алгоритму можна взяти поточне рекордне значення F_0. Оцінкою відносної похибки розв'язку може слугувати величина $\frac{v_{\max} - F_0}{F_0}$, де $v_{\max}$ – максимальне значення оцінки серед нерозгалужених вершин дерева розв'язку.

ВИСНОВКИ. В роботі запропонована комбінаторна задача побудови мостів, побудована її математична модель та розглянуто методи її розв'язування. Розробка більш ефективних методів розв'язування задач такого типу залишається актуальною. Одним із перспективних шляхів є побудова наближених методів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець; Полт. ун-т споживчої кооперації Укр. Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с.

2. Ємець О. О. Розв'язування ігрових задач з обмеженнями-полірозміщеннями на стратегії одного гравця: ітераційний метод типу Брауна-Робінсон / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець, І. М. Поляков. *Вісник* Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. 2020. № 1. С. 38–45.

3. Емец О. А., Барболина Т. Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. Київ : Наук. думка, 2008. 159 с.

4. Ємець О. О., Ольховська О. В. Розв'язування комбінаторних задач ігрового типу з обмеженнями-переставляннями у обох гравців: ітераційний метод. Системні дослідження та інформаційні технології. 2012. № 4. С. 80–93.

5. Ємець О. О. Метод гілок і меж розв'язування задач оптимізації лінійної цільової функції на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю / О. О. Ємець,

Т. М. Барболіна. *Вісник* Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. 2018. № 2. С. 43–54.

6. Емец О. А., Емец А. О., Поляков И. М. Критерий ребра общего многогранника размещений. Кибернетика и системный анализ. 2018. № 5. С. 128–138.

7. Емец Е. М., Олексийчук Ю. Ф. NP-трудность комбинаторной задачи нахождения максимального потока. Таврический вестник информатики и математики. 2012. № 2. С. 36–44.

8. Ємець О. О., Ємець Є. М., Олексійчук Ю. Ф. Знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями. Таврический вестник информатики и математики. 2011. № 1. С. 43–50.

9. Ємець О. О., Ємець Є. М., Олексійчук Ю. Ф. Комбінаторна задача знаходження максимального потоку та метод гілок та меж для її розв'язування. *Вісник* Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. 2012. № 1. С. 91–98.

10. Ємець О. О., Ємець Є. М., Олексійчук Ю. Ф. Жадібний метод розв'язання комбінаторної задачі знаходження максимального потоку в мережі. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 2012. Вип. 7. С. 93–99.

11. Ємець О. О., Ємець Є. М., Олексійчук Ю. Ф. Поліноміальний метод наближеного розв'язання комбінаторної задачі знаходження максимального потоку в мережі. Доповіді Національної академії наук України. 2013. № 4. С. 33–37.

12. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. Москва : Мир, 1966. – 277 с.

13. Ху Т. Ч., Шинг М. Т. Комбинаторные алгоритмы. Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, 2004. – 330 с.

14. Edmonds J., Karp R. M. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. ACM. 1972. Vol. 19, № 2. P. 248–264.

15. Гуцул Т. В. Мультиагентна оптимізація планування потоків дорожньої мережі: особливості мурашиного алгоритму. Містобудування та територіальне планування : наук.-техн. зб. Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт.; гол. ред. М. М. Осєтрін. Київ : КНУБА, 2016. Вип. 62, ч. 1. С. 179–185.

16. Семенец С. Н., Насонова С. С. Моделирование комбинаторных задач на графах в терминах задачи математического программирования. *Вісник* Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. 2015. 11 (212). С. 73–80.

COMBINATORIAL PROBLEM OF BUILDING BRIDGES AND METHODS OF ITS SOLUTION

Yuriy Oleksiychuk
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at Department of Computer Science and Information Technology
Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, olexijchuk@gmail.com;
ORCID: 0000-0002-0585-3307

Dmytro Olkhovsky
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at Department of Computer Science and Information Technology
Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, dmitriy@olhovsky.name;
ORCID: 0000-0003-0313-6977

Olena Olkhovska
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at Department of Computer Science and Information Technology
Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, lena@olhovsky.name;
ORCID: 0000-0001-5366-5995

Tatiana Chilikina
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at Department of Computer Science and Information Technology
Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, tv.0502@gmail.com;
ORCID: 0000-0002-0585-3307

Oksana Chernenko
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at Department of Computer Science and Information Technology
Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, oksanachernenko7@gmail.com;
ORCID: 0000-0002-9084-0999

Oksana Orikhivska
Senior Lecturer at Department of Computer Science and Information Technology
Poltava University of Economics and Trade, Koval str., 3, Poltava, Ukraine, 36000, aka.jeita@gmail.com;
ORCID: 0000-0003-2775-0832

The combinatorial problem of optimization of bridge construction is considered in the work. Let there be a city that is located on the banks of the river. The city consists of neighborhoods that are connected by roads. Maximum capacity is known for roads. To better connect the shores, it is planned to build several bridges with known capacity. But not all of these bridges can be built at once. The task is to select a certain number of bridges from the planned ones, which will be built primarily in order to maximize traffic flow between the shores. The problem can be reduced to the combinatorial problem of finding the maximum flow by introducing a fictitious source and a fictitious drain. In the general case, the task is NP-difficult. If we reject the combinatorial constraints, the problem is reduced to the problem of finding the maximum flow in the transport network, for which polynomial algorithms are known. Also, the problem of building bridges can be reduced to the problem of Euclidean combinatorial optimization on permutations. Many solving methods have been developed for such problems. One of the general methods for Euclidean combinatorial permutation optimization problems can be used to solve the problem. Special methods have been built for combinatorial problems of finding the maximum flow. For example, the greedy method and the method of branches and boundaries. The greedy method is heuristic. In terms of time, it is polynomial, but does not always allow to find the exact solution. The method of branches and boundaries can be used to find both the exact solution and the approximate one.

Key words: problem of bridge construction, combinatorial optimization, combinatorial problem of finding the maximum flow, problem of Euclidean combinatorial optimization on permutations, method of branches and boundaries.

REFERENCES

1. Stoyan, Yu. G., Yemets, O. O., Yemets, E. M. (2005) Optymizatsiia na polirozmishchenniakh: teoriia ta metody [Optimization on polyplastings: theory and methods]. Polt. University of Consumer Cooperation Ukr. – Poltava : RVC PUSKU. – 103 p. [in Ukrainian]

2. Yemets, O. O., Yemets, Ol. O., Polyakov, I. M. (2020) Rozviazuvannia ihrovykh zadach z obmezhenniamy-polirozmishchenniamy na stratehii odnoho hravtsia: iteratsiinyi metod typu Brauna-Robinson [Solving game problems with constraints-polylocations on the strategy of one player: an iterative method of the Brown-Robinson type] // Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu : Zbirnyk naukovykh statei. Fizyko-matematychni nauky [Bulletin of Zaporizhia National University : Collection of scientific articles. Physical and mathematical scienceses]. – № 1. – P. 38–45. [in Ukrainian]

3. Yemets, O. A., Barbolina, T. N. (2020) Kombynatornaia optymyzatsyia na razmeshchenyiakh [Combinatorial optimization on placements]. – K. : Nauk. Dumka. – 159 p. [in Russian]

4. Yemets, O. O., Olkhovskaya, O. V. (2012) Rozviazuvannia kombinatornykh zadach ihrovoho typu z obmezhenniamy-perestavlianniamy u obokh hravtsiv: iteratsiinyi metod [Solving combinatorial problems of game type with constraints-permutations in both players: iterative method] // Systemni doslidzhennia ta informatsiini tekhnolohii. [System research and information technology]. – № 4. – P. 80–93. [in Ukrainian]

5. Yemets, O. O., Barbolina, T. N. (2018) Metod hilok i mezh rozviazuvannia zadach optymizatsii liniinoi tsilovoi funktsii na rozmishchenniakh z imovirnisnoiu nevyznachenistiu [Method of branches and boundaries of solving problems of optimization of linear objective function on placements with probability uncertainty] // Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu : Zbirnyk naukovykh statei. Fizyko-matematychni nauky [Bulletin of Zaporizhia National University : Collection of scientific articles. Physical and mathematical scienceses]. – № 2. – P. 43–54. [in Ukrainian]

6. Yemets, O. A., Yemets, A. O., Polyakov, I. M. (2018) Kryteryi rebra obshcheho mnohohrannyka razmeshchenyi [Criteria for an edge of a common placement polyhedron] // Kybernetyka y systemnyi analyz [Cybernetics and System Analysis]. – № 5. – P. 128–138. [in Russian]

7. Yemets, E. M., Oleksiychuk, Yu. F. (2012) NP-trudnost kombynatornoi zadachy nakhozhdenyia maksymalnoho potoka [NP-hardness of the combinatorial problem of finding the maximum flow] // Tavrycheskyi vestnyk ynformatyky y matematyky [Tauride Bulletin of Informatics and Mathematics]. – № 2. – P. 36–44. [in Russian]

8. Yemets, O. A., Yemets, E. M., Oleksiychuk, Yu. F. (2011) Znakhodzhennia maksymalnoho potoku v merezhi z dodatkovymy kombinatornymy obmezhenniamy [Finding the maximum flow in a network with additional

combinatorial constraints] // Tavrycheskyi vestnyk ynformatyky y matematyky [Tauride Bulletin of Informatics and Mathematics]. – № 1. – P. 43–50. [in Ukrainian]

9. Yemets, O. O., Yemets, E. M., Oleksiychuk, Yu. F. (2012) Kombinatorna zadacha znakhodzhennia maksymalnoho potoku ta metod hilok ta mezh dlia yii rozviazuvannia [Combinatorial problem of finding the maximum flow and the method of branches and boundaries for its solution] // Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu : Zbirnyk naukovykh statei. Fizyko-matematychni nauky [Bulletin of Zaporizhia National University : Collection of scientific articles. Physical and mathematical scienceses]. – № 1. – P. 91–98. [in Ukrainian]

10. Yemets, O. O., Yemets, E. M., Oleksiychuk, Yu. F. (2012) Zhadibnyi metod rozviazannia kombinatornoi zadachi znakhodzhennia maksymalnoho potoku v merezhi [Greedy method for solving the combinatorial problem of finding the maximum flow in the network] // Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia: Fizyko-matematychni nauky : zb. nauk. prats [Mathematical and computer modeling. Series: Physical and Mathematical Sciences : Coll. Science. Proceedings]. – Kamenets-Podolsky : Kamenets-Podolsky National University named after Ivan Ogienko. – Issue 7. – P. 93–99. [in Ukrainian]

11. Yemets, O. O., Yemets, E. M., Oleksiychuk, Yu. F. (2013) Polinomialnyi metod nablyzhenoho rozviazannia kombinatornoi zadachi znakhodzhennia maksymalnoho potoku v merezhi [Polynomial method of approximate solution of the combinatorial problem of finding the maximum flow in the network] // Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. – № 4. – P. 33–37. [in Ukrainian]

12. Ford, L., Fulkerson, D. (1966) Potoky v setiakh [Flows in networks]. – M. : Mir. – 277 p. [in Russian]

13. Hu, T. Ch., Shing, M. T. (2004) Kombynatornie alhorytmu [Combinatorial algorithms]. – Nizhny Novgorod : Publishing House of the Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky. – 330 p. [in Russian]

14. Edmonds, J., Karp, R. M. (1972) Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems // J. ACM. – Vol. 19, № 2. – P. 248–264.

15. Hutsul, T. V. (2016) Multyahentna optymizatsiia planuvannia potokiv dorozhnoi merezhi: osoblyvosti murashynoho alhorytmu [Multi-agent optimization of road network flow planning: features of the ant algorithm] // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia : nauk.-tekhn. zb. [Urban planning and territorial planning : science and technology. coll.] / Kyiv. national University of Civil Engineering and Architecture; Goal. ed. M. M. Ossetrin. – Kyiv : KNUBA. – Issue 62, part 1. – P. 179–185. [in Ukrainian]

16. Semenets, S. N., Nasonova, S. S. (2015) Modelyrovanye kombynatornыkh zadach na hrafakh v termynakh zadachy matematycheskoho prohrammyrovanyia [Modeling of combinatorial problems on graphs in terms of mathematical programming problems] // Visnyk Prydniprovskoi derzhavnoi akademii budivnytstva ta arkhitektury [Bulletin of the Dnipro State Academy of Construction and Architecture], 11 (212). – P. 73–80. [in Russian]

Стаття надійшла 11.03.2022