

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРАХ З ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ ВІНКЛЕРА

### Іван Верушкін

аспірант відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна, e-mail: [ivanveruskin86@gmail.com](mailto:ivanveruskin86@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-3837-5567

### Олена Стрельнікова

д.т.н., проф., провідний науковий співробітник відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна, e-mail: [elena15@gmx.com](mailto:elena15@gmx.com)

ORCID: 0000-0003-0707-7214

Метою цього дослідження є розроблення методу розрахунку динамічних характеристик резервуарів для збереження рідини з урахуванням плескань вільної поверхні та впливу пружної основи. В роботі йде дослідження коливань циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера. Припускається, що резервуар заповнений ідеальною нестисливою рідиною. За цих умов всюди за межами пластини існує потенціал швидкості, який задовольняє рівняння Лапласа, а на поверхні пластини виконується умова непротікання. Тиск рідини визначається з лінеаризованого інтеграла Коші-Лагранжа. Для рішення крайової задачі щодо потенціалу швидкості використовувалося інтегральне зображення у вигляді потенціалу подвійного шару, при цьому густина потенціалу пропорційна перепаду тиску рідини. Використано метод заданих форм, що дало змогу побудувати базисні функції для дослідження як власних, так і вимушених коливань резервуарів з рідиною. Вперше досліджені динамічні характеристики пружних резервуарів, частково заповнених рідиною, з урахуванням наявності пружної основи Вінклера. Були визначені власні форми коливань днища за допомогою функцій Бесселя першого та другого роду. Було побудовано графік залежності форм коливань від радіальної координати. Циліндричні резервуари з жорсткими вертикальними стінками та днищем на пружній основі Вінклера, які досліджувалися у роботі, мали певні геометричні й фізичні параметри та відрізнялися заповненістю оболонок. Було встановлено, що зменшення товщини оболонки призводить до зменшення частот пружних стінок, а також, що для дуже тонких пружних стінок резервуара перша частота коливань пружних стінок може бути набагато меншою, ніж частота коливань рідини в оболонці з жорсткими стінками. Зі збільшенням товщини стінки резервуара цей ефект стає незначним. Отриманий спектр частот власних коливань буде використано у проектуванні резервуарів для збереження рідини з метою відстроювання від небажаних резонансних частот.

**Ключові слова:** плескання рідини, резервуар на пружній основі Вінклера, метод заданих форм, метод граничних елементів.

### Формулювання задачі.

Досліджуються коливання циліндричної оболонки на пружній основі Вінклера. Вважається, що резервуар частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною. Задача полягає у визначенні частот та форм такої оболонки з урахуванням плескань вільної поверхні та коливань пружного днища. Наявність пружної основи дає змогу наближено враховувати взаємодію з ґрунтом.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій.

Резервуари для збереження нафти, питної води, хімічних речовин зазвичай мають форму циліндричних оболонок. Актуальним питанням є визначення міцності таких резервуарів, особливо у разі дії раптово прикладених навантажень. Це можуть бути сейсмічні впливи або ударні

навантаження внаслідок вибухів, падінь літаків та ін. Найчастіше вказані резервуари моделюються як жорсткі оболонки. Але на практиці ці резервуари спираються на пружний фундамент, що сприяє зменшенню вібрацій у разі зовнішніх впливів. У зазначених резервуарах за дії раптових навантажень відбуваються інтенсивні плескання рідини. Дослідженню цього явища присвячена велика кількість наукових публікацій [1; 2] та ін. Для гасіння плескань використовують різні пристрої. Так, у [3; 4] пропонується встановити горизонтальні або вертикальні перегородки, в [5] вивчено вплив покриття у вигляді пружної мембрани на частоти коливань резервуара з рідиною. Зауважимо, що наявність покриття веде до зменшення амплітуд коливань рідини під дією

інтенсивних зовнішніх навантажень. У [3] встановлено, що за деяких геометричних параметрів частоти коливань пружних стінок можуть наближатися до частот коливань вільної поверхні, що створює загрозу для безаварійної експлуатації резервуарів. Тому важливими є дослідження задач коливань резервуарів у зв'язаному формулюванні [6–8] з урахуванням пружності стінок [9] та плескань заповнювача. Треба зазначити, що частоти коливань пружних циліндричних стінок є зазвичай вищими, ніж частоти коливань днища. Тому актуальним є питання вибору характеристик пружного днища резервуара за метою зниження вібрацій [10; 11]. Для цього використовують різні моделі пружних основ [11; 12].

Розв'язання задач динаміки оболонкових конструкцій у взаємодії із середовищем потребує створення нових ефективних методів комп'ютерного моделювання. Серед них зазначимо методи інтегральних рівнянь у сполученні з розкладеннями в ряди Фур'є [13; 14], метод граничних елементів [2; 3], метод скінченних об'ємів [15], метод скінченних елементів [16].

**Відокремлення не вирішених раніше частин загальної проблеми.**

Зазначимо, що динамічні характеристики оболонкових конструкцій з відсіками, частково заповненими рідиною, найбільш точно можуть бути визначені експериментальним шляхом. Але проведення таких натурних експериментів є коштовною і не завжди безпечною процедурою. Тому стає актуальним проведення віртуальних комп'ютерних випробувань. У цьому дослідженні запропоновано новий ефективний метод для визначення частот та форм резервуарів, частково заповнених рідиною, з урахуванням різних факторів, таких як взаємний вплив плескань рідини та коливань пружних стінок, вплив параметрів пружної основи, рівня заповнення резервуару рідиною.

Мета дослідження.

Метою дослідження є розробка ефективного методу розрахунку частот та форм коливань резервуарів з рідиною на пружній основі Вінклера з урахуванням пружності днища та плескань вільної поверхні.

Методи, об'єкт та предмет дослідження.

Об'єкт дослідження – процеси коливань оболонкових конструкцій, частково заповнених рідиною, предмет дослідження – взаємний вплив плескань рідини та коливань днища. Методи дослідження – метод заданих форм, метод граничних елементів.

**Методика дослідження.**

*Основні співвідношення*

Побудуємо модель резервуара як жорсткої циліндричної оболонки радіусу  $R$  з пружним днищем на пружній основі Вінклера. Вважаємо, що резервуар частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною на висоту  $H$ , рис. 1. Позначимо як  $S_0$  вільну поверхню рідини, як  $S_1$  – жорстку циліндричну поверхню оболонки,  $S_{bot}$  – пружну поверхню днища.

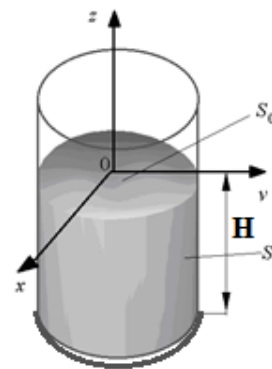


Рис. 1. Циліндричний резервуар з пружним днищем на пружній основі Вінклера

Якщо товщина  $h$  однорідної пластинки є сталою, то рівняння руху пластинки в циліндричних координатах має вигляд

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw = q(r,,t). \quad (1)$$

Тут  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – циліндрична жорсткість,  $\rho_p$  – густина пластинки,  $K$  – модуль Вінклера,  $q(r,,t)$  – зовнішня сила, що діє на пластину.

Якщо пластина контактує з рідиною, то

$$q(r,,t) = p(r,,t) + q_0(r,,t),$$

де  $p(x,y,t)$  – тиск рідини на пластину,  $q_0(r,,t)$  – сила, що збурює.

Для знаходження тиску зробимо такі припущення: рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух безвихровий. У цих умовах існує потенціал швидкостей  $\phi(x,y,z,t)$ , який задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Зв'язок між потенціалом швидкостей та тиском визначається з лінеаризованого інтегралу Коші-Лагранжа [3]:

$$p - p_0 = -\rho_l \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta \right],$$

де  $\rho_l$  – густина рідини;  $p_0$  – атмосферний тиск,  $a_x(t)$ ,  $a_z(t)$  – компоненти пришвидшення сили, що збуджує, в горизонтальному та вертикальному напрямках,  $\zeta$  – функція, що описує положення та рівень підйому вільної поверхні рідини. При цьому  $a_x(t) = a_h \cos \omega_h t$ ,  $a_z(t) = a_v \cos \omega_v t$ .

Граничні умови для рівняння (1) є такими.

На жорсткій циліндричній поверхні  $S_1$  виконується умова непротікання

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{S_1} = 0. \quad (3)$$

На пружному дніщі умова непротікання приймає вигляд

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{S_{bot}} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (4)$$

де  $w$  – прогин пластинки, що знаходиться з рівняння (1) та відповідних граничних умов, що визначаються далі.

На вільній поверхні мають виконуватись кінематична та динамічна граничні умови у вигляді

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, p - p_0|_{S_0} = 0. \quad (5)$$

Тут функція  $\zeta = \zeta(t, x, y)$  характеризує зміну рівня та положення вільної поверхні з часом,  $\mathbf{n}$  – зовнішня одинична нормаль до поверхні.

Використаємо граничні умови закріплення пластини за контуром. Введемо циліндричну систему координат  $(r, z)$ . У випадку жорсткого закріплення маємо такі граничні умови:

$$w|_{r=R} = 0, \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

Розглянемо власні коливання системи циліндрична оболонка – рідина. При цьому  $q_0(r, z, t) = 0$ ,  $a_x(t) = a_z(t) = 0$ , й рівняння (1) набуває вигляду

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw = -\rho_l \frac{\partial}{\partial t}. \quad (7)$$

Таким чином, треба знайти невідомі функції  $w$ ,  $\zeta$ , що задовольняють системі диференціальних рівнянь:

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw = -\rho_l \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

та граничним умовам:

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{S_{bot}} = \frac{\partial w}{\partial t}, \left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, p - p_0|_{S_0} = 0, w|_{r=R} = 0, \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R} = 0. \quad (9)$$

Для отримання однозначного розв'язку системи рівнянь (8) з граничними умовами (9) додаємо умову Неймана

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{S_0} dS_0 = 0. \quad (10)$$

*Метод заданих форм*

Для розв'язання крайової задачі (8)–(9) застосуємо метод заданих форм.

Будемо шукати переміщення пружного дніща у вигляді

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) w_k(x, y), \quad (11)$$

де  $c_k(t)$  – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу,  $w_k(x, y)$  – форми коливань пружного дніща без врахування взаємодії з рідиною,  $N$  – кількість форм, що утримуються під час розрахунків.

Зобразимо потенціал швидкостей у вигляді суми двох потенціалів як  $\varphi_1 + \varphi_2$ . Потенціал  $\varphi_1$  шукаємо у вигляді

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \phi_{1k}. \quad (12)$$

Тут коефіцієнти  $c_k(t)$  визначені в (11), для функцій  $\phi_{1k}$  маємо такі крайові задачі:

$$\nabla^2 \varphi_{1k} = 0, \left. \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n} \right|_{S_{bot}} = w_k, \left. \varphi_{1k} \right|_{S_0} = 0. \quad (13)$$

Зобразимо потенціал  $\varphi_2$  у вигляді ряду по власних формах коливань рідини в жорсткому резервуарі

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \phi_{2k} \quad (14)$$

де  $d_k(t)$  – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу,  $\phi_{2k}$  – базисні функції,  $M$  – кількість форм, що утримуються під час розрахунків.

Для функцій  $\phi_{2k}$  формулюємо крайові задачі таким чином:

$$\nabla^2 \varphi_{2k} = 0, \left. \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \left. \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} \right|_{S_{bot}} = 0, \left. \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (15)$$

При цьому на вільній поверхні маємо співвідношення

$$\left. \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_{2k}, \quad (16)$$

де  $\chi_k$  – частоти власних коливань вільної поверхні рідини.

Рівняння вільної поверхні при цьому набуває вигляду

$$\zeta = \zeta(x, y, t) = \sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n} + \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n}, \quad (17)$$

а для потенціалу швидкостей маємо

$$(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k + \sum_{k=1}^M \dot{d}_k. \quad (18)$$

Далі крайову задачу зведено до системи диференціальних рівнянь. Зауважимо, що

для сумарного потенціалу  $\phi_{1+2}$  виконані такі співвідношення:

$$\Delta\phi = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{S_{\text{bot}}} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Таким чином, для остаточного розв'язання початково-крайової задачі (8) з граничними умовами (9) залишилось задовольнити першому з рівнянь системи (8) та динамічній граничній умові на вільній поверхні, яка описується рівнянням:

$$p - p_0 = -\rho_l \left[ \frac{\partial}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta \right] = 0.$$

Тобто на вільній поверхні має виконуватись таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^N c_{k1k} + \sum_{k=1}^M d_{k2k} + (g + a_z(t)).$$

Коли вивчаються власні коливання, вважаємо, що  $a_x(t) = a_z(t) = 0$ , тобто отримаємо:

$$\sum_{k=1}^N c_{k1k} + \sum_{k=1}^M d_{k2k} + g. \quad (19)$$

Форми коливань пружного днища без врахування взаємодії з рідиною є розв'язками рівняння

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Kw = 0$$

у припущенні, що  $w(t, x, y) = \exp(it)w(x, y)$ .

Позначимо як  $w_k(x, y)$  форми коливань, що відповідають власним частотам  $\Omega_k (k=1, 2, \dots)$ . Ці форми задовольняють таким диференціальним рівнянням:

$$D\Delta\Delta w_k + Kw_k = 0. \quad (20)$$

Після підстановки (11) в перше з рівнянь (8) отримуємо таку рівність:

$$\rho_p h \sum_{k=1}^N c_k w_k + D \sum_{k=1}^N c_k \Delta\Delta w_k + K \sum_{k=1}^N c_k w_k = (21)$$

$$\rho_l \left( \sum_{k=1}^N c_{k1k} + \sum_{k=1}^M d_{k2k} \right).$$

З рівності (20) знаходимо, що

$$D\Delta\Delta w_k + Kw_k = \rho_p h_k^2 w_k.$$

З урахуванням цього співвідношення рівняння (21) прийме вигляд

$$\rho_p h \sum_{k=1}^N.$$

Таким чином, отримано систему диференціальних співвідношень

$$\rho_p h \sum_{k=1}^N,$$

$$\sum_{k=1}^N c_{k1k} + \sum_{k=1}^M d_{k2k} + g.$$

Зауважимо, що перше з них виконується на пружному днищі, а друге – на вільній поверхні. З використанням граничних умов будемо мати

$$\sum_{k=1}^M d_{k2k} + g \left( \sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial_{1k}}{\partial n} + \frac{1}{g} \sum_{k=1}^M d_k \chi_{k2k}^2 \right) = 0.$$

Остаточно отримуємо такі співвідношення для знаходження невідомих, залежних лише від часу коефіцієнтів  $c_k(t), d_k(t)$ :

$$\rho_p h \sum_{k=1}^N, \quad (22)$$

$$\sum_{k=1}^M d_{k2k} + g \left( \sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial_{1k}}{\partial n} + \frac{1}{g} \sum_{k=1}^M d_k \chi_{k2k}^2 \right) = 0.$$

Виконаємо скалярний добуток першого з рівнянь у (22) на функції  $w_l$ , а другого на функції  $w_l$  та отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\rho_p h \sum_{k=1}^N = 0 \quad (23)$$

$$\sum_{k=1}^M d_k (w_{k2l}) + g.$$

Якщо розглядаються вільні коливання, то до системи (23) треба додати початкові умови, тобто

$$c_k(0) = c_{k0}, \dot{c}_k(0) = \dot{c}_{k1}, d_k(0) = d_{k0}, \dot{d}_k(0) = \dot{d}_{k1}. \quad (24)$$

У разі знаходження власних частот та форм коливань вважаємо, що

$$c_k(t) = C_k \exp(it), \quad d_k(t) = D_k \exp(it) \quad (25)$$

і приходимо до проблеми власних значень. Далі будемо отримувати три системи базисних функцій, а саме  $w_l, w_{1l}, w_{2l}$ .

#### Визначення власних форм коливань рідини

Базисні функції  $w_l$  та відповідні їм власні частоти  $\Omega_l$  визначаються шляхом розв'язання крайової задачі (15). Зауважимо, що внаслідок кругової симетрії конструкції, що розглядається, обидва рівняння в (8) можуть бути зображені у вигляді добутків тригонометричних функцій  $\cos m$  на функції, що залежать від  $r$  та  $z$ . Тут  $m$  – хвильове число, або кількість вузлових діаметрів. Для жорсткої циліндричної оболонки радіусу  $R$  з рівнем заповнення  $H$ , рис. 1, власні функції  $w_{2k}$  та частоти власних коливань  $\chi_k$  отримаємо за формулами [3]:

$$\frac{k}{g} = \frac{k}{R} \tanh\left(\frac{H}{R}\right),$$

$$w_{2k} = J_m\left(\frac{k}{R}r\right) \frac{\cosh\left(\frac{k}{R}(z+H)\right)}{\cosh\left(\frac{k}{R}H\right)} \cos m, \quad (26)$$

де  $J_m$  – функції Бесселя першого роду,  $k$  – корені рівняння  $J_m(x) = 0$ .

Надалі будемо розглядати крайові задачі для кожного хвильового числа окремо. Зауважимо, що у співвідношеннях (22) можна при цьому про-

вести скорочення на  $\cos m$ . При цьому маємо такі співвідношення ортогональності:

$$\int_0^R r J_m\left(\frac{k}{R}r\right) J_m\left(\frac{l}{R}r\right) dr = 0, kl; \int_0^R r J_m^2\left(\frac{k}{R}r\right) dr = \frac{R^2}{2} \left[ \left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right) J_m^2(k) \right].$$

У таблиці 1 наведені значення коренів рівнянь  $J_m(x) = 0$  за різних  $m$ .

З даних таблиці бачимо, що найнижчі частоти будуть відповідати першій гармоніці,  $m=1$ .

З використанням співвідношень ортогональності спростимо друге рівняння в (23) таким чином:

$$d_l + \frac{\chi_l^2}{g} d_l + \frac{g}{B_{lm}} \sum_{k=1}^N \left( c_k \frac{\partial_{1k}}{\partial n} \right) = 0, \quad (27)$$

де  $B_{km} = \int_0^R r J_m^2\left(\frac{k}{R}r\right) dr = \frac{R^2}{2} \left[ \left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right) J_m^2(k) \right]$ ,  $m$  – хвильове число.

*Визначення власних форм коливань днища*

Базисні функції  $w_l$  та відповідні їм власні частоти  $\lambda_l$  визначаються шляхом розв'язання спектральної задачі

$$D\Delta\Delta w_k + (K\rho_p h_k^2) w_k = 0, \quad (28)$$

$$w|_{r=R} = 0, \frac{dw}{dr}\bigg|_{r=R} = 0. \quad (29)$$

Оскільки рівняння (28) допускає розв'язки у вигляді

$$w_{km}(r) = F_k(r) \cos m,$$

то з огляду рівнянь (28), (29) робимо висновок про те, що рівняння (28) допускає скорочення на  $\cos m$ .

Спочатку розглянемо випадок аксіально-симетричних коливань, тобто припустимо, що  $m=0$ . Введемо таке позначення

$$\alpha = \frac{\rho_p h K}{D}.$$

Рівняння (28) приймає вигляд  $(\Delta - \alpha^2)(\Delta + \alpha^2)F = 0$  та може бути зображено у вигляді системи

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \alpha^2 F = 0, \quad (30)$$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \alpha^2 F = 0. \quad (31)$$

Розв'язками рівняння (30) є функції Бесселя першого та другого роду нульового порядку  $J_0(\alpha r)$  та  $Y_0(\alpha r)$ , а розв'язками рівняння (31) є модифіковані функції Бесселя першого та другого роду нульового порядку  $I_0(\alpha r)$  та  $K_0(\alpha r)$ . Таким чином, загальний розв'язок рівняння (28) має вигляд

$$F(r) = aJ_0(\alpha r) + bY_0(\alpha r) + cI_0(\alpha r) + dK_0(\alpha r),$$

де  $a, b, c, d$  – сталі.

Оскільки при  $r \rightarrow 0$  функції  $Y_0(\alpha r)$  та  $K_0(\alpha r)$

нескінченно зростають, вважаємо, що  $b=0, d=0$ , щоб уникнути нефізичних переміщень. Для визначення сталих  $a, c$  використаємо граничні умови закріплення пластини за контуром. У випадку жорсткого закріплення маємо такі граничні умови:

$$F|_{r=R} = 0, \frac{dF}{dr}\bigg|_{r=R} = 0.$$

$$\begin{cases} aJ_0(\alpha R) + cI_0(\alpha R) = 0 \\ aJ_1(\alpha R) + cI_1(\alpha R) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Для того щоб система (32) мала ненульовий розв'язок, необхідно, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю. Тому отримуємо характеристичне рівняння для знаходження невідомої величини  $\alpha$

$$\begin{vmatrix} J_0(\alpha R) & I_0(\alpha R) \\ J_1(\alpha R) & I_1(\alpha R) \end{vmatrix} = J_0(\alpha R)I_1(\alpha R) - I_0(\alpha R)J_1(\alpha R) = 0. \quad (33)$$

Позначимо  $\lambda = \alpha R$ . В таблиці 2 наведені значення 6 перших коренів рівняння (33) при  $m=0$ .

Співвідношення між сталими  $a$  та  $c$  у рівнянні для  $w$  для кожного  $\alpha_k$  знаходимо із рівності

$$a_k J_0(\alpha_k R) + c_k I_0(\alpha_k R) = 0 \Rightarrow c_k = -a_k \frac{J_0(\alpha_k R)}{I_0(\alpha_k R)}.$$

Таким чином, отримано залежності форм власних коливань круглої пластинки від  $r$  у вигляді

$$w_k(r) = J_0(\alpha_k r) - \frac{J_0(\alpha_k R)}{I_0(\alpha_k R)} I_0(\alpha_k r). \quad (34)$$

На рисунку 1 зображені функції, що визначені формулою (34) при  $R=1$  для різних  $k$  залежно від  $r$  при  $m=0$ .

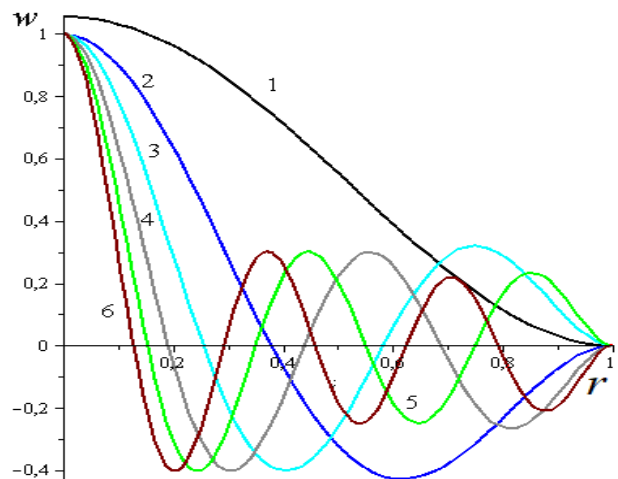


Рис. 1 Залежності форм коливань від радіальної координати

Цифрами 1–6 тут позначені форми, що відповідають значенням  $\lambda_k = \alpha_k$ , що наведені

Таблиця 1

Характеристичні числа

k	m=0	m=1	m=2	m=3
1	3.831705970	1.841183781	3.054236928	4.201188941
2	7.015586670	5.331442775	6.706133195	8.015236600
3	10.17346814	8.536316365	9.969467825	11.34592431
4	13.32369194	11.70600490	13.17037086	14.58584829
5	16.47063005	14.86358863	16.34752232	17.78874787
6	19.61585851	18.01552786	19.51291278	20.97247694

Таблиця 2

Значення коренів характеристичного рівняння (33) та сталих  $c_k$

k	$\lambda_k$	$c_k$
1	3.196220616	0.1018870979
2	6.306437050	0.0506907858
3	9.439499140	0.0337792448
4	12.57713064	0.0253319976
5	15.71643853	0.0202649244
6	18.85654552	0.0168871927

Таблиця 3

Значення скалярних добутоків  $(w_l, |2k)$

k/l	1	2	3	4	5	6
1	0.062175	-0.002222	0.000404	-0.000119	0.0000459	-0.000021
2	0.030527	0.0369651	-0.002831	0.007554	-0.000282	0.0001273
3	-0.015242	0.0159007	0.026325	-0.002707	0.0008747	-0.000375
4	0.0098645	-0.008068	0.010601	0.0204379	-0.002457	0.0008892
5	-0.007085	0.0054783	-0.005309	0.0079168	0.0167006	-0.002212
6	0.0054112	-0.004104	0.003659	-0.003901	0.00630544	0.0141181

в таблиці 1. Перевіркою ортогональності форм власних коливань  $w_m(r)$  встановлено, що  $(w_k(r), w_l(r)) = c_k \delta_{kl}$ , де значення сталих  $c_k$  наведені в таблиці 1. З використанням отриманих умов ортогональності та виразів (26) для функцій  $_{2k}(r)$  та (34) для функцій  $w_k(r)$  при  $z = -H$  отримуємо значення скалярних добутоків  $(_{2k}, w_l)$  у першому з рівнянь (23).

З даних таблиці 3 можна зробити висновок, що найбільший внесок дають скалярні добутки при  $k, l=1, 2, 3$ .

Визначення базисних функцій  $_{1k}$

Для побудови базисних функцій  $_{1k}$  сформулюємо крайові задачі [3]

$$\nabla^2_{1k} = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \nu \sigma = w_k, w_k = (u_k, n),$$

$$\left. \frac{1k}{n} \right|_{S_1} = w_k, \left. \frac{1k}{n} \right|_{S_0} = 0. \quad (35)$$

Будемо шукати гармонічні функції  $_{1k}$  у вигляді суми потенціалів простого та подвійного шарів, як у роботі [3], тобто використовуємо пряме формулювання методу граничних інтегральних рівнянь

$$2\pi_{1k}(P_0) = \frac{\partial_{1k}}{s} \frac{1}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \frac{\partial}{s_{1k}} \frac{1}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} S = S_1 S_0. \quad (36)$$

З використанням подання (36) зводимо крайові задачі (35) до систем сингулярних інтегральних рівнянь. Сингулярні інтеграли типу Коші та інтеграли з логарифмічними особливостями обчислюємо за методикою, розробленою в [17; 18].

Обговорення отриманих результатів.

Після побудови необхідних систем базисних функцій приходимо до зв'язаної динамічної задачі. Згідно з [19] вважаємо, що коефіцієнт Вінклера  $K$  наближено обчислюється за формулою

$$K = \frac{2(1-\nu_1)GR^4}{(1-2\nu_1)h}, G = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}, \quad (37)$$

де  $G$ ,  $E_1$  та  $\nu_1$  – модулі зсуву, Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу ґрунту,  $h$  – товщина днища резервуару.

Далі розглядаємо циліндричний резервуар з жорсткими вертикальними стінками та днищем на пружній основі Вінклера у разі часткового заповнення ідеальною нестисливою рідиною. Вважаємо, що циліндрична оболонка має плоске днище та такі геометричні й фізичні параметри: радіус  $R = 1$  м, висота  $L = 2$  м, модуль Юнга  $E = 2.06 \cdot 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ , густина матеріалу оболонки  $\rho_s = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,

густина рідини  $\rho_l = 1000 \text{ кг/м}^3$ , рівень наповнення  $H = 1.0 \text{ м}$ . Розглядаємо різні значення товщини  $h$  у разі фіксованих значень коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0.4$  та модуля пружності  $E_1 = 2.62 \text{ МПа}$ .

У табл. 4 наведені числові значення власних частот коливань для порожніх та заповнених рідиною циліндричних пружних резервуарів, без врахування впливу пружної основи. Тут коефіцієнти  $n_s, n_L$  вказують на номери форм оболонки та рідини, що враховуються у зв'язаних коливаннях,  $J$  – номер зв'язаної форми коливань. Для числового моделювання використано чотири форми коливань оболонки та п'ять форм плескань.

Ці дані показують різницю між частотами заповнених та порожніх оболонок. Зі збільшенням номера частоти ця різниця поступово зменшується. Частоти коливань, що відносяться до пружних стінок, істотно перевищують частоти, пов'язані з плесканнями.

Зменшення товщини оболонки призводить до зменшення частот пружних стінок. Частоти порожніх та заповнених рідиною резервуарів для різної товщини наведені в табл. 5. Результати свідчать про те, що найнижчі частоти пружних оболонок зменшуються зі зменшенням товщини. Отже, для дуже тонких пружних стінок резервуара перша частота коливань пружних стінок може бути набагато меншою, ніж частота коливань рідини в оболонці з жорсткими стінками. Зі збільшенням товщини стінки резервуара цей ефект стає незначним.

У табл. 6 наведені найнижчі частоти аксіально-симетричних коливань пружної оболонки ( $n = 0$ ) на пружній основі Вінклера.

З результатів, наведених у таблиці 6, робимо висновок, що у разі врахування пружної основи Вінклера відбувається збільшення найнижчих частот пружних стінок, й не спостерігається явище небезпечного зближення частот коливань пружних стінок та плескань рідини. Тому у разі дослідження коливань тонких оболонок, частково

Таблиця 4

Частоти порожніх та наповнених рідиною пружних резервуарів,  $n = 0, 1$ , Гц

J	$n_s$	$n_L$	$n = 0$		$n_s$	$n_L$	$n = 1$	
			Оболонка без рідини	Оболонка з рідиною			Оболонка без рідини	Оболонка з рідиною
1		1		0,9739		1		0,6418
2		2		1,3208		2		1,1509
3		3		1,5909		3		1,4564
4		4		1,8209		4		1,7054
5		5		2,0249		5		1,9212
6	1	1,2	23,233	7,6591	1,2		48,520	21,902
7	2,1		91,101	43,308	2,1		139,70	79,712
8	3,2		205,25	117,03	3,2,1		232,44	178,42
9	4,3,2		365,79	230,31	4,3		277,30	210,00

Таблиця 5

Залежність частот від товщини оболонки

J	Пуста оболонка, Гц				Оболонка з рідиною, Гц			
	$h, \text{ м}$							
	0,01	0,005	0,003	0,0015	0,01	0,005	0,003	0,0015
6	23,233	11,838	7,1805	3,6308	5,5213	2,8187	1,7096	0,8644
7	40,482	20,612	12,495	6,3132	15,172	7,9277	4,8058	1,5780
8	91,101	46,271	28,023	14,153	43,769	22,249	13,479	7,0064
9	205,25	100,01	62,922	31,747	119,14	58,148	36,587	15,716
10	213,55	109,10	66,127	31,778	168,05	85,909	52,069	18,692

Таблиця 6

Частоти аксіально-симетричних коливань пружної оболонки на пружній основі Вінклера

J	Пуста оболонка, Гц				Оболонка з рідиною, Гц			
	$h, \text{ м}$							
	0,01	0,005	0,003	0,0015	0,01	0,005	0,003	0,0015
6	25,336	13,254	12,692	18,353	6,381	3,330	3,305	4,634
7	42,132	21,793	15,852	15,558	15,974	8,0714	5,8718	5,7621
8	92,081	47,429	29,406	23,073	43,769	22,589	14,003	10,984

заповнених рідиною, доцільно використовувати методи, що дозволяють наближено враховувати вплив ґрунту та дають уточнені оцінки частот.

#### Висновки.

Розроблена методика наближеного обчислення впливу ґрунту як пружної основи Вінклера у разі коливань циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, за врахування взаємного впливу коливань рідини та пружного днища. Окремо знаходяться частоти та форми коливань рідини в жорсткому резервуарі та частоти та форми коливань днища. Ці форми використовуються як базисні функції для розв'язання задачі у зв'язаному формулюванні. Отримані дані можуть бути використані для проектування резервуарів та сховищ рідини за необхідності відстроювання від небажаних резонансних частот.

#### ЛІТЕРАТУРА

- Zang Q., Liu J., Lu L., Lin G. A. NURBS-based isogeometric boundary element method for analysis of liquid sloshing in axisymmetric tanks with various porous baffles. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. Vol. 81, 2020, pp. 129–150.
- Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol. 111, 2020, pp. 78–87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.
- Strelnikova E., Choudhary N., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol. 120, 2020, P. 13–27. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.02m.
- Sun Y., Zhou D., Wang J. An equivalent mechanical model for fluid sloshing in a rigid cylindrical tank equipped with a rigid annular baffle. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 72, 2019, P. 569–587.
- Choudhary N., Kumar N., Strelnikova E., Gnitko V., Kriutchenko D., Degtyariev K. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University – Science*. Vol. 33(8), 2021, 101589, URL: <https://doi.org/10.1016/j.jksus.2021.101589>.
- Lewiński P.M. Accuracy assessment of linear elasticity solution for interaction of cylindrical tank with subsoil. *Bulletin of the Polish academy of sciences technical sciences*. Vol. 69(1), 2021, e136039. DOI: 10.24425/bpasts.2021.136039.
- Kodanda R.R.P., Reddy S.R.K., Swaroop A.H.L., Nagarjuna K. Seismic behavior of existing elevated water tanks resting on different type of foundations. *Earth and Environmental Science*. Vol. 982, 2022, 012082. DOI: 10.1088/1755-1315/982/1/012082.
- Silva R.L.C., Marques G.B., Lages E.N., Marques S.P.C. Analytical study of cylindrical tanks including soil-structure interaction. *Structures and Materials Journal*. Vol. 12(1), 2019, P. 14–22. DOI:10.1590/S1983-41952019000100003.
- Kondratov D.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Hydroelastic Oscillations of a Circular Plate, Resting on Winkler Foundation, *Journal of Physics: Conf. Series*. Vol. 944, 2017, 012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.
- Hotala E., Ignatowicz R. Effect of settlement of foundations on the failure risk of the bottom of cylindrical steel vertical tanks for liquids. *Studia Geotechnica et Mechanica*. Vol. 41(3), 2019, P. 171–176. DOI: 10.2478/sgem-2019-0017.
- Bochkarev S.A. Natural Vibrations of a Cylindrical Shell with Fluid Partly Resting on a Two-Parameter Elastic Foundation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. Vol. 22(06), 2022, DOI: 10.1142/S0219455422500717.
- Tran M.-T., Nguyen V.-L., Pham S.-D., Rungamornra J. Free vibration of stiffened functionally graded circular cylindrical shell resting on Winkler–Pasternak foundation with different boundary conditions under thermal environment. *Acta Mechanica*. Vol. 231(1049), 2020, DOI: 10.1007/s00707-020-02658-y.
- Угрімов С.В., Сметанкіна Н.В., Шупіков О.М. Математичне моделювання процесу нестационарного деформування багатошарового оскління при розподілених та локалізованих силових навантаженнях. *Вестник Херсонського національного технічного університету*. № 3(58), 2016. С. 408–413.
- Smetankina N., Kravchenko I., Merculov V., Ivchenko D., Malykhina A. Modelling of bird strike on an aircraft glazing. / In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds.). *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering. Advances in Intelligent Systems and Computing*, Springer, Cham. Vol. 1113, 2020, P. 289–297. DOI: 10.1007/978-3-030-37618-5\_25.
- Rusanov A., Shubenko A., Senetskiy O., Babenko O., Rusanov R. Heating modes and design optimization of cogeneration steam turbines of powerful units of combined heat and power plant. *Energetika*. Vol. 65(1), 2019, P. 39–50. DOI.org/10.6001/energetika.v65i1.3974.
- Wang T., Li W., Wu Z., Zhang J. Sloshing analysis and mechanical modeling of liquid cargo during lifting. *Procedia Computer Science*. Vol. 183, 2021. P. 655–660. DOI: doi.org/10.1016/j.procs.2021.02.111.
- Naumenko V., Strelnikova H. Singular integrals accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol. 26(1), 2002. P. 95–98. DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00041-8.
- Karaiev A., Strelnikova E. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. Vol. 11(01), 2020. 2050003. DOI: 10.1142/S1793962320500038.
- Dillard D.A., Mukherjee B., Karnal P., Batra R. C., and Frechette J. A review of Winkler's foundation and its pro-



found influence on adhesion and soft matter applications. *Soft Matter*. Vol. 14, 2018. P. 36–69.

20. Yang H., Zhong Z., Wang X., Zhang Q. Elastic Modulus Calculation Model of a Soil-Rock Mixture at

Normal or Freezing Temperature Based on Micromechanics Approach. *Advances in Materials Science and Engineering*. ID 576080, 2015. P. 1–10. DOI:10.1155/2015/576080.

## COMPUTER SIMULATION OF LIQUID VIBRATIONS IN TANKS RESTING ON THE WINKLER FOUNDATION

**Ivan Vierushkin**

PhD student, Department of hydroaerodynamics of power machines

A. Pidhorny Institute of Mechanical Engineering Problems NASU, Pozharsky, st. 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine, e-mail: ivanveruskin86@gmail.com

**ORCID: 0000-0002-3837-5567**

**Olena Strelnikova**

DSc, Prof., leading researcher, Department of hydroaerodynamics of power machines

A. Pidhorny Institute of Mechanical Engineering Problems NASU, Pozharsky st., 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine, e-mail: elena15@gmx.com

**ORCID: 0000-0003-0707-7214**

The purpose of this study is to develop a method for calculating the dynamic characteristics of liquid storage tanks, taking into account splashing of the free surface and the influence of the elastic base. In the work, the oscillations of a cylindrical shell on an elastic Winkler base are studied. It is assumed that the tank is filled with an ideal incompressible fluid. Under these conditions, there is a velocity potential everywhere outside the plate that satisfies Laplace's equation, and the no-flow condition is fulfilled on the surface of the plate. Fluid pressure is determined from the linearized Cauchy-Lagrange integral. When solving the boundary value problem regarding the velocity potential, an integral image in the form of a double layer potential was used, while the potential density is proportional to the fluid pressure drop. The method of given forms was used, which made it possible to construct basis functions for the study of both natural and forced oscillations of tanks with liquid. For the first time, the dynamic characteristics of elastic tanks partially filled with liquid were investigated, taking into account the presence of an elastic Winkler base. The eigenforms of the bottom oscillations were determined using Bessel functions of the first and second kind. The dependence of the vibration forms on the radial coordinate was plotted. Cylindrical tanks with rigid vertical walls and a bottom on an elastic Winkler base, which were studied in the work, had certain geometric and physical parameters and differed in the filling of the shells. It was found that decreasing the thickness of the shell leads to a decrease in the frequencies of the elastic walls, and also that for very thin elastic walls of the tank, the first frequency of oscillation of the elastic walls can be much lower than the frequency of oscillation of the fluid in the shell with rigid walls. As the thickness of the tank wall increases, this effect becomes insignificant. The obtained spectrum of frequencies of natural oscillations will be used in the design of tanks for storing liquid in order to tune from unwanted resonant frequencies.

**Key words:** liquid sloshing, reservoir on an elastic Winkler foundation, method of given modes, boundary element method.

### REFERENCES

1. Zang, Q., Liu, J., Lu, L., Lin, G.A. (2020). NURBS-based isogeometric boundary element method for analysis of liquid sloshing in axisymmetric tanks with various porous baffles. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 81, pp. 129–150.

2. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Degtyarev, K. (2020). Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 111, 2020, pp. 78–87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.

3. Strelnikova, E., Choudhary, N., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Tonkonozhenko, A. (2020). Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under

horizontal and vertical excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 120, P. 13–27. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.02m.

4. Sun, Y., Zhou, D., Wang, J. (2019). An equivalent mechanical model for fluid sloshing in a rigid cylindrical tank equipped with a rigid annular baffle. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 72. P. 569–587.

5. Choudhary, N., Kumar, N., Strelnikova, E., Gnitko, V., Kriutchenko, D., Degtyariov, K. (2021). Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University – Science*, vol. 33(8), 101589, Retrieved from: <https://doi.org/10.1016/j.jksus.2021.101589>.

6. Lewiński, P.M. (2021). Accuracy assessment of linear elasticity solution for interaction of cylindrical tank with subsoil. *Bulletin of the Polish academy of sciences*

*technical sciences*, vol. 69(1), e136039. DOI: 10.24425/bpasts.2021.136039

7. Kodanda Rama Rao P., Reddy, S.R.K., Swaroop, A.H.L., Nagarjuna, K. (2022). Seismic behavior of existing elevated water tanks resting on different type of foundations. *Earth and Environmental Science*, vol. 982, 012082. DOI: 10.1088/1755-1315/982/1/012082.

8. Silva, R.L.C., Marques, G.B., Lages, E.N., Marques, S.P.C. (2019). Analytical study of cylindrical tanks including soil-structure interaction. *Structures and Materials Journal*, vol. 12(1). P. 14–22. DOI: 10.1590/S1983-41952019000100003.

9. Kondratov, D.V., Mogilevich, L.I., Popov, V.S., Popova, A.A. (2017). Hydroelastic Oscillations of a Circular Plate, Resting on Winkler Foundation. *Journal of Physics: Conf. Series*, vol. 944, 012057. DOI: 10.1088/1742-6596/944/1/012057.

10. Hotala, E., Ignatowicz, R. (2019). Effect of settlement of foundations on the failure risk of the bottom of cylindrical steel vertical tanks for liquids. *Studia Geotechnica et Mechanica*, vol. 41(3). P. 171–176. DOI: 10.2478/sgem-2019-0017.

11. Bochkarev, S.A. (2022). Natural Vibrations of a Cylindrical Shell with Fluid Partly Resting on a Two-Parameter Elastic Foundation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. Vol. 22(06). DOI: 10.1142/S0219455422500717.

12. Tran, M.-T., Nguyen, V.-L., Pham, S.-D., Rungamornra, J. (2020). Free vibration of stiffened functionally graded circular cylindrical shell resting on Winkler–Pasternak foundation with different boundary conditions under thermal environment. *Acta Mechanica*. Vol. 231(1049) DOI: 10.1007/s00707-020-02658-y.

13. Ugrimov, S.V. Smetankina, N.V., Shupikov, O.M. (2016). Mathematical modeling of the process of non-stationary deformation of multilayer glazing under distributed and localized force loads. *Bulletin of*

*the Kherson National Technical University*. No. 3(58), P. 408–413.

14. Smetankina, N., Kravchenko, I., Merculov, V., Ivchenko, D., Malykhina, A. (2020). Modelling of bird strike on an aircraft glazing. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds.). *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering. Advances in Intelligent Systems and Computing*, Springer, Cham, vol. 1113. P. 289–297. DOI: 10.1007/978-3-030-37618-5\_25.

15. Rusanov, A., Shubenko, O., Senetskiy, O., Babenko O., Rusanov, R. (2019). Heating modes and design optimization of cogeneration steam turbines of powerful units of combined heat and power plant. *Energetika*, vol. 65(1). P. 39–50. DOI: org/10.6001/energetika.v65i1.3974.

16. Wang, T., Li, W., Wu, Z., Zhang, J. (2021). Sloshing analysis and mechanical modeling of liquid cargo during lifting. *Procedia Computer Science*. Vol. 183. P. 655–660, DOI: 10.1016/j.procs.2021.02.111.

17. Naumenko, V., Strelnikova, H. (2002). Singular integrals accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol. 26(1). P. 95–98. DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00041-8.

18. Karaiev, A., Strelnikova, E. (2020). Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*. Vol. 11(01), 2050003. DOI: 10.1142/S1793962320500038.

19. Dillard, D.A., Mukherjee, B., Karnal, P., Batra, R.C., and Frechette, J. (2018). A review of Winkler’s foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications. *Soft Matter*, vol. 14. P. 36–69.

20. Yang, H., Zhong, Z., Wang, X., Zhang, Q. (2015). Elastic Modulus Calculation Model of a Soil-Rock Mixture at Normal or Freezing Temperature Based on Micromechanics Approach *Advances in Materials Science and Engineering*, ID 576080. P. 1–10. DOI: 10.1155/2015/576080.

*Стаття надійшла 20.05.2022*