

РОЗРАХУНОК ВЕЛИЧИНИ МАКСИМАЛЬНОГО МЕХАНІЧНОГО НАПРУЖЕННЯ У СУГЛОБІ НА ОСНОВІ ЗАДАЧІ ГЕРЦА

Денис Мосьпан

кандидат технічних наук, доцент,

доцент кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, Україна. 39600, denis.mospan@gmail.com

ORCID: 0000-0002-2151-4858

Олексій Юрко

кандидат технічних наук, доцент,

доцент кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, Україна. 39600, yurkoalexe@gmail.com

ORCID: 0000-0002-8244-2376

Дмитро Кухаренко

кандидат технічних наук, доцент,

доцент кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, Україна. 39600, krutoy276@gmail.com

ORCID: 0000-0002-2845-6881

Сергій Саньков

старший викладач кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, Україна. 39600, sankovsergej56@gmail.com

ORCID: 0000-0002-0888-5232

Значну небезпеку для здоров'я людей представляють травми колінного суглоба. Розриви зв'язкового апарату є причиною посттравматичної нестабільності, займають друге місце після ушкоджень менісків і призводять до порушення конгруентності суглобових поверхонь – остеоартрозу. При ультразвуковій кістковій денситометрії виникають обмеження та помилки при визначенні щільності кісткових тканин. Це пов'язано з тим, що наявність м'яких тканини вносять спотворення, а відповідно і похибки при визначенні щільності кісток та сприяють отриманню помилкової діагностичної інформації. Також щільність кісткових тканин залежить не тільки від системних процесів, але й від навантаження на дану ділянку кістки, що призводить до місцевого ущільнення кісткових тканин. При цьому показники денситометрії будуть позитивними, незважаючи на те, що на системному рівні, вже може розвиватися остеопороз. Тому доцільно перевіряти результати ультразвукової денситометрії на основі результатів виміру лінійних деформацій кісткових тканин з рентгеноскопії. У даній роботі на основі моделі колінного суглоба у вигляді контактуючих сферичних поверхонь (задачі Герца) отримані аналітичні залежності, що дозволяють розрахувати максимальну величину механічного напруження у центрі площини контакту кісткових тканин в залежності від пружних властивостей матеріалів за обмеженою кількістю експериментальних даних. Вихідні дані визначаються на основі аналізу знімків суглобу та виміру лінійних деформацій кісткових тканин. В результаті може бути прийняте рішення про необхідність подальшого детального обстеження та лікування. Для оперативної обробки результатів вимірювань кісткових структур рентгенографічних знімків та ультразвукової денситометрії з метою усунення можливої похибки вимірювань та отримання діагностичної інформації, було створено віртуальний прилад в програмному середовищі Labview. Візуалізація розрахованих коефіцієнтів дозволяє перевірити адекватність отриманих експериментальних даних, оцінити стан кісткових тканин суглобу та можливі ускладнення при збільшенні навантаження.

Ключові слова: моделі колінного суглоба, задача Герца, віртуальний прилад, кісткова денситометрія.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Колінний суглоб – складна біомеханічна система, функції якого в нормі та патологіях, можуть вивчатися за допомогою законів та методів точних наук [1, 2].

Біомеханічний підхід дозволяє дати точну кількісну характеристику можливостей міцності структур колінного суглоба при різних навантаженнях, і розробити методи попередження і лікування його захворювань та ушкоджень.

Значну небезпеку для здоров'я людей представляють травми колінного суглоба. Розриви зв'язкового апарату є причиною посттравматичної нестабільності, займають друге місце після ушкоджень менісків і призводять до порушення конгруентності суглобових поверхонь – остеоартрозу.

При ультразвуковій кістковій денситометрії виникають обмеження та помилки при визначенні щільності кісткових тканин. Це пов'язано з тим, що наявність м'яких тканин вносять спотворення, а відповідно і похибки при визначенні щільності кісток та сприяють отриманню помилкової діагностичної інформації. Також щільність кісткових тканин залежить не тільки від системних процесів, але й від навантаження на дану ділянку кістки, що призводить до місцевого ущільнення кісткових тканин. При цьому показники денситометрії будуть позитивними, незважаючи на те, що на системному рівні, вже може розвиватися остеопороз. Тому доцільно перевіряти результати ультразвуковій денситометрії на основі результатів виміру лінійних деформацій кісткових тканин з рентгеноскопії [3–6].

Мета роботи – розвиток механічної моделі колінного суглобу на основі задачі Герца та розробка віртуального приладу в програмному середовищі Labview.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Використання спрощеної моделі колінного суглоба у вигляді контактуючих сферичних поверхонь наведено в [7]. Це відома задача Герца. В результаті сплющування сфер поверхня контакту буде мати вигляд кола радіусом a :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3P}{4} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}. \quad (1)$$

де μ_1, μ_2 – відповідні коефіцієнти Пуассона; E_1, E_2 – відповідні модулі Юнга (пружності); R_1, R_2 – радіуси контактуючих сфер, P – сила, що здавлює поверхні. У нормальному випрямленому

стані на колінний суглоб діє вага верхньої частини тіла людини: $P = mg$. Середнє значення сили стискання складає 1000 Н. Межове значення сили стискання сягає значення 10000 Н.

В загальному випадку питомий тиск залежить від відстані r від центра контактної кола:

$$p(r) = \frac{P_{\max}}{a} \sqrt{a^2 - r^2},$$

де $P_{\max} = \frac{3P}{2\pi a^2}$ – максимальне значення тиску, яке має місце у центрі контакту (при $r = 0$).

Отже формула (1) наведена для максимального значення тиску.

За допомогою рентгеноскопії отримують зображення кісткових структур у потрібних ракурсах. Отже з рентгенівських знімків можна отримати потрібні розміри контактуючих поверхонь, а саме: усереднені значення R_1, R_2 , а також усереднений радіус контактної поверхні a .

Значення модулів Юнга контактуючих кісток суглоба експериментально (неінвазивно) отримати досить складно. Тому доцільно визначити коефіцієнт пружності з формули (1).

Проаналізуємо вплив модулів Юнга на величину контактуючих поверхонь за допомогою формули (1).

Приймемо усереднені значення: $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0,332$ – відповідні коефіцієнти Пуассона; $E_2 = 10^7$ Па.

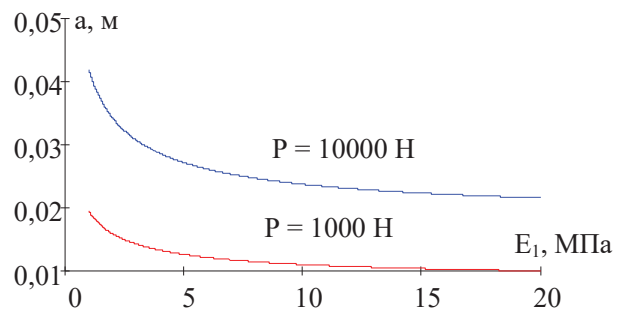


Рисунок 1 – Вплив модулів Юнга на величину контактуючих поверхонь

З наведеного рисунку видно, що при $E_1 > E_2$ величина радіуса контактної площини a змінюється дуже повільно. Представимо дану графічну залежність у відносних одиницях на рис. 2.

Отже при $E_1 > 0,6E_2$ значення a змінюється в межах 10% відносно значення a , що отримується при однакових величинах $E_1 = E_2$, тобто

в абсолютних одиницях відхилення радіусу не перевищує одиниць мм. Отже для приблизних розрахунків можна припустити, що модулі пружності матеріалів мають однакові значення: $E_1 = E_2 = E$.

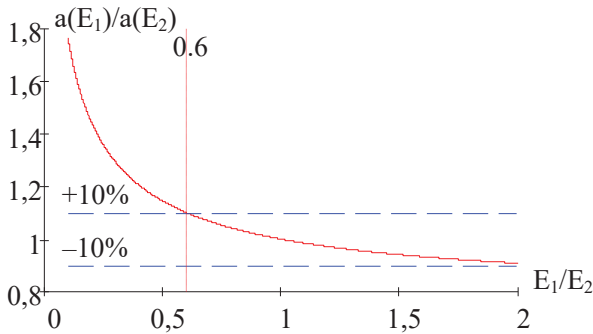


Рисунок 2 – Залежність з рис.1 у відносних одиницях

Виходячи з цього перепишемо формулу (1) у вигляді:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3P}{2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1 - \mu^2}{E} \right)}.$$

Звідки знайдемо модуль Юнга:

$$E = \frac{3P}{2} \frac{1 - \mu^2}{a^3} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2)$$

Отримана формула дозволяє з експериментально отриманих величин R_1 , R_2 та a , розрахувати значення модуля пружності.

У випадку, коли невідомий коефіцієнт Пуассона, то для подальших розрахунків зручно знайти співвідношення:

$$\frac{1 - \mu^2}{E} = \frac{3P}{2a^3} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}. \quad (3)$$

Якщо ж необхідно провести більш точні розрахунки то важливо врахувати, що пружні властивості матеріалів контактуючих кісткових структур відрізняються, тоді: $E_1 \neq E_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$.

Позначимо u_z та u'_z – компоненти векторів суміщення точок поверхонь обох тіл при стисканні. Якщо здавлені поверхні вважати плоскими, то відношення u_z / u'_z є величиною постійною у будь-якій фіксованій площині перерізу [7]:

$$\frac{u_z}{u'_z} = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} \frac{E_2}{1 - \mu_2^2} = const. \quad (4)$$

Суміщення зручно виразити через параметри контактуючих поверхонь у площині ZOX:

$$\frac{u_z(x)}{u'_z(x)} = \frac{\sqrt{R_1^2 - x^2} - \sqrt{R_1^2 - a^2}}{\sqrt{R_2^2 - x^2} - \sqrt{R_2^2 - a^2}}.$$

де $x \in [-a; a]$ – відстань від точки на поверхні контакту до осі Z.

Оскільки абсолютні величини суміщень є відносно невеликими, то їх візуальне визначення за рентгенівським знімком є досить складним. Тому доцільно вимірювати максимальні величини суміщень, які знаходяться на осі Z, при цьому $x = 0$. Тоді шукане співвідношення спрощується:

$$k = \frac{u_z}{u'_z} = \frac{R_1 - \sqrt{R_1^2 - a^2}}{R_2 - \sqrt{R_2^2 - a^2}}.$$

Тоді між пружними властивостями контактуючих кісткових тканин на основі (4) можна записати співвідношення:

$$\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} = \frac{R_1 - \sqrt{R_1^2 - a^2}}{R_2 - \sqrt{R_2^2 - a^2}} \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}. \quad (5)$$

Тоді з (1) отримаємо вираз аналогічний до (3):

$$\frac{1 - \mu_2^2}{E_2} = \frac{4a^3 \frac{R_1 + R_2}{3P R_1 R_2}}{\frac{R_1 - \sqrt{R_1^2 - a^2}}{R_2 - \sqrt{R_2^2 - a^2}} + 1}. \quad (6)$$

Отже за допомогою співвідношень (5) та (6) на основі аналізу знімків суглобу та виміру лінійних деформацій кісткових тканин можна розрахувати пружні властивості матеріалів контактуючих поверхонь.

Найбільше механічне напруження при деформації з урахуванням (5) визначається за формулою:

$$\sigma = \frac{1}{\pi^3} \sqrt[3]{\frac{\frac{16}{9} P \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2 \left(\frac{E_2}{1 - \mu_2^2} \right)^2}{\left(\frac{R_1 - \sqrt{R_1^2 - a^2}}{R_2 - \sqrt{R_2^2 - a^2}} + 1 \right)^2}}. \quad (7)$$

Отже отримана залежність (7) дозволяють отримати максимальну величину механічного напруження у центрі площини контакту кісткових тканин в залежності від пружних властивостей матеріалів.

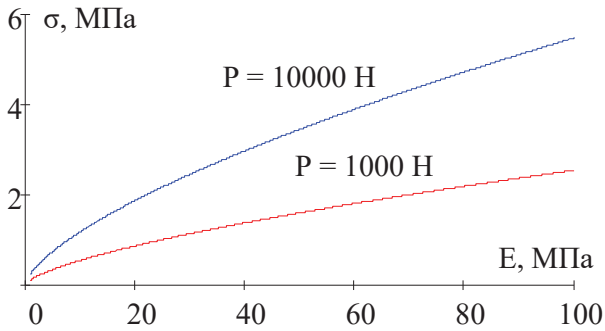


Рисунок 3 – Залежність механічного напруження від властивостей матеріалу E при різних значеннях навантаження

Для оперативної обробки результатів вимірювань кісткових структур рентгенографічних знімків та ультразвукової денситометрії з метою усунення можливої похибки вимірювань та отримання діагностичної інформації, було створено віртуальний прилад в програмному середовищі Labview [8, 9].

Отже вхідними даними для розрахунку є результати вимірювань:

- 1) за рентгенографічними знімками: R_1 , R_2 , a , m ;
- 2) за ультразвуковою кістковою денситометрією: μ_1 , μ_2 , E_1 , E_2 .

Також розраховується сила, що здавлює поверхні $P = mg$ – вага верхньої частини тіла людини.

На лицьовій панелі віртуального приладу розташовані активні вкладки, що реалізують два режими розрахунку.

Перша вкладка «За результатами УЗ» (рис. 4) використовує комбіновані дані вимірювань і реалізує наступні розрахунки:

- 1) усередненого радіусу контактної поверхні a , м (1);
- 2) найбільшого механічного напруження при деформації σ , Па (7) при вказаній силі тиску P ;
- 3) на основі уведених вхідних даних будується графічна залежність $\sigma = f(P)$ – максимальної величини напруження при зміні сили тиску в допустимих межах: від 1000 Н до 10000 Н. На отриманій кривій білою крапкою позначено величину напруження для уведеного значення сили навантаження. Розрахунки також проводяться за формулою (7).

Отримана залежність дозволяє візуально оцінити стан кісткових тканин суглобу та можливі ускладнення при збільшенні навантаження.

Наступна вкладка «Вимірювання лінійних деформацій» використовує дані, отримані за рентгенографічними знімками, і реалізує наступні розрахунки:

- 1) за формулами (6) та (5) проводиться розрахунок модулів пружності E_1 та E_2 контактуючих

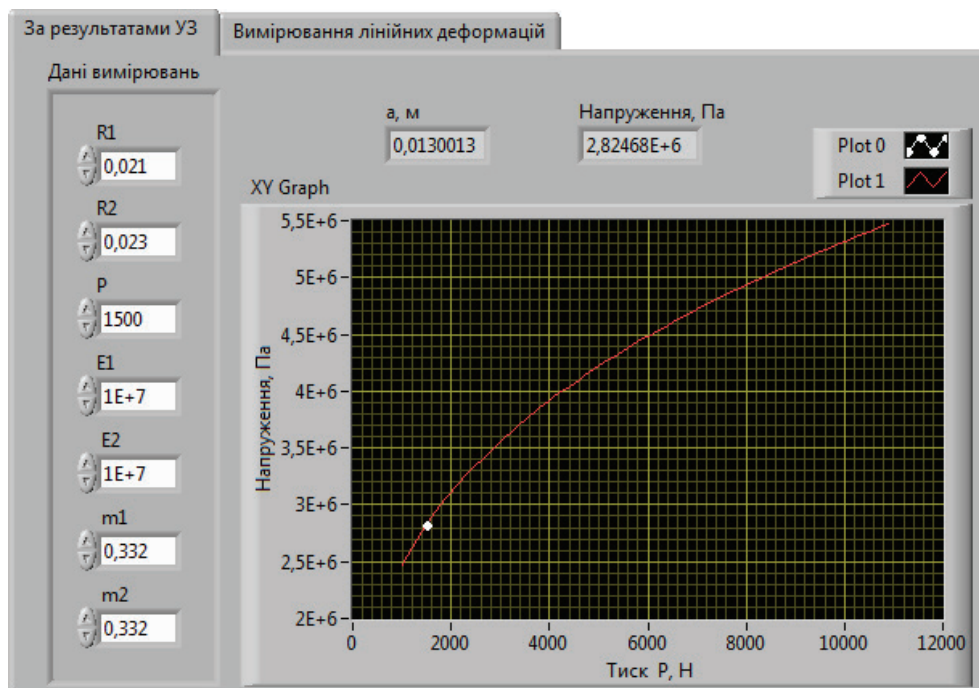


Рисунок 4 – Лицьова панель віртуального приладу з активною вкладкою «За результатами УЗ»

кісткових тканин. Отримані значення порівнюються з результатами ультразвукової кісткової денситометрії;

2) за формулою $\sigma = P / \pi a^2$ – проводиться розрахунок найбільшого механічного напруження при деформації σ , Па при вказаній силі тиску P . Отримане значення порівнюється з розрахованим у першій вкладці.

Отже розроблений віртуальний прилад дозволяє перевірити адекватність експериментальних даних отриманих з рентгенографічних знімків та за допомогою ультразвукової денситометрії, що дозволяє своєчасно виявити можливу похибку та запобігти застосуванню невірної діагностичної інформації [10].

ВИСНОВКИ. У результаті в роботі:

1. Набула подальшого розвитку механічна модель колінного суглобу на основі задачі Герца, шляхом доповнення аналітичними розрахунками пружних властивостей контактуючих матеріалів за результатами виміру лінійних деформацій кісткових тканин. Це дозволяє оцінити величину максимального механічного напруження у суглобі за обмеженою кількістю експериментальних даних та прийняти рішення про необхідність подальшого детального обстеження та лікування.

2. Розроблено віртуальний прилад, що за допомогою отриманих аналітичних залежностей дозволяє перевірити адекватність експериментальних даних отриманих з рентгенографічних знімків та за допомогою ультразвукової денситометрії. Це дозволяє своєчасно виявити можливу похибку та запобігти застосуванню невірної діагностичної інформації. Візуалізація розрахованих коефіцієнтів дозволяє оцінити стан кістко-

вих тканин суглобу та можливі ускладнення при збільшенні навантаження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Головацький А. С., Черкасов В. Г., Федонюк Я. І., Сапін М. Р. *Анатомія людини*. В: Нова книга, 2006. 456с.
2. Бернштейн Н. А. *Биомеханика и физиология движений*. Воронеж: НПО «МОДЭК», 1997. 608 с.
3. Евсеев В. И. *Моделирование биомеханических систем в травматологии и ортопедии: монография*. Казань: Плутон, 2014. 275 с.
4. Склярченко Є. Т. *Травматологія і ортопедія: Підручник*. К.: Здоров'я, 2005. 384 с.
5. Евсеев В. И. *Биомеханика поврежденных коленного сустава: монография*. Москва: РУСАЙНС, 2018. 338 с.
6. Голка Г. Г., Бур'янова О. А., Климовицький В. Г. *Травматологія та ортопедія: підручник для студ. вищих мед. навч. закладів*. Вінниця: Нова Книга, 2013. 400 с.
7. Чигарев А. В., Борисов А. В. Численная оценка размеров пятна контакта и деформаций под действием нагрузок в тазобедренном и голеностопном суставах человека // *Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник*. Вып. 24. 2009. С. 22–26.
8. Евдокимов Ю. К., Линдваль В. Р., Щербаков Г. И. *LabVIEW в научных исследованиях*. Москва: ДМК Пресс, 2018. 397 с.
9. Магда Ю. С. *LabVIEW: Практический курс для инженеров и разработчиков*. Москва: ДМК Пресс, 2012. 208 с.
10. Голуб Є. В., Антонова О. І. Удосконалення біомеханічної моделі колінного суглобу з метою визначення патологічних станів // XVII Міжнародна науково-технічна конференція «Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів», 2–3 листопада 2018 р., Кременчук. С. 216–217.

CALCULATION OF THE MAXIMUM MECHANICAL STRESS IN THE JOINT BASED ON THE HERTZ PROBLEM

Denys Mospan

Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Prof., Assoc. Prof. of the Department of Computer Engineering and Electronics, Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, Ukraine, 39600. denis.mospan@gmail.com

ORCID: 0000-0002-2151-4858

Oleksii Yurko

Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Prof., Assoc. Prof. of the Department of Computer Engineering and Electronics, Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, Ukraine, 39600. yurkoalexe@gmail.com

ORCID: 0000-0002-8244-2376

Dmytro Kukharenko

Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Prof., Assoc. Prof. of the Department of Computer Engineering and Electronics, Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, Ukraine, 39600. krutoy276@gmail.com

ORCID: 0000-0002-2845-6881

Serhiy Sankov

Senior Lecturer of the Department of Computer Engineering and Electronics, Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, Ukraine, 39600. sankovsergej56@gmail.com

ORCID: 0000-0002-0888-5232

Injuries to the knee joint pose a significant risk to human health. Ruptures of the ligamentous apparatus are the cause of post-traumatic instability, take second place after meniscus injuries and lead to a violation of the congruence of the articular surfaces – osteoarthritis. With ultrasound bone densitometry, there are limitations and errors in determining bone density. This is due to the fact that the presence of soft tissues introduces distortions and, accordingly, errors in determining bone density and contributes to obtaining false diagnostic information. Also, bone tissue density depends not only on systemic processes, but also on the load on this area of the bone, which leads to local compaction of bone tissues. At the same time, densitometry indicators will be positive, despite the fact that osteoporosis can already develop at the system level. Therefore, it is advisable to check the results of ultrasonic densitometry based on the results of measuring linear deformations of bone tissues with fluoroscopy. In this work, on the basis of a model of the knee joint in the form of contacting spherical surfaces (Hertz's problem), analytical dependencies are obtained that allow us to calculate the maximum value of mechanical stress in the center of the bone tissue contact plane depending on the elastic properties of materials using a limited amount of experimental data. The initial data are determined based on the analysis of images of the joint and the measurement of linear deformations of bone tissues. As a result, a decision can be made on the need for further detailed examination and treatment. To quickly process the results of measurements of bone structures of radiographic images and ultrasound densitometry to eliminate possible measurement errors and obtain diagnostic information, a virtual device was created in the Labview software environment. Visualization of the calculated coefficients allows you to check the adequacy of the obtained experimental data, assess the state of the bone tissues of the joint and possible complications with increasing load.

Key words: knee joint models, Hertz problem, virtual instrument, bone densitometry.

REFERENCES

1. Golovatsky A. S., Cherkasov V. G., Fedonyuk Y. I., Sapin M. G. (2006). *Anatomia lyudyny [Human anatomy]*. Vinnitsa: Nova kniga [in Ukrainian].
2. Bernstein N. A. (1997) *Biomehanika i fiziologia dvizhenij [Biomechanics and physiology of movements]*. Voronezh: NPO «MODEK» [in Russian].
3. Evseev V. I. (2014) *Modelirovanie biomechanicheskikh sistem v travmatologii i ortopedii [Modeling of biomechanical systems in traumatology and orthopedics]*. Kazan: Pluton [in Russian].
4. Sklyarenko E. T. (2005). *Travmatologia i ortopedia [Traumatology and orthopedics]*. Kyiv: Zdorovia [in Ukrainian].
5. Evseev V. I. (2018). *Biomehanika povrezhdenii kolennogo sistema [Biomechanics of knee joint injuries]*. Moskva: Rusajns [in Russian].
6. Iгла G.G., Buryanova O.A., Klimovichsky V.G. (2013). *Travmatologia i ortopedia [Traumatology and orthopedics]*. Vinnitsa: Nova kniga [in Ukrainian].
7. Chigarev A. V., Borisov A. V. (2009). Chislenna otsenka razmerov piatna kontakta i deformatsii pod dejstviem nagruzok v tazobedrennom i golenostopnom sustavakh cheloveka [Numerical assessment of the size of the contact patch and deformations under the action of loads in the human hip and ankle joints]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika: mezhdunarodnyy nauchno-tekhnicheskij sbornik – Theoretical and applied mechanics: international scientific and technical collection*. 24, 22–26 [in Russian].
8. Evdokimov Y. K., Lindval V. R., Shcherbakov G. I. (2018). *LabVIEW v nauchnykh issledovaniyakh [LabVIEW in scientific research]*. Moskva: DMK Press [in Russian].
9. Magda Y. S. (2012). *LabVIEW: Prakticheskiy kurs dlya inzhenerov i predpriyatij [LabVIEW: Practical course for engineers and developers]*. Moskva: DMK Press [in Russian].
10. Golub E. V., Antonova O. I. (2018). Udoskonalennya biomekhanicheskoy modeli kolonnogo suglobu s metoyu vydelennya patologichnikh staniv [Improvement of the biomechanical model of the knee joint in order to determine pathological conditions]. *XVII Mizhnarodna nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Fizichni protsessy ta polichnichnikh i biologicheskikh ob'ektiv» – XVII International Scientific and Technical Conference «Physical Processes and Fields of Technical and Biological Objects»*. 216-217 [in Ukrainian].