

СПРОЩЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛОФІЗИЧНОГО ПРОЦЕСУ КРИСТАЛІЗАЦІЇ МЕТАЛУ

Микола Босій

старший викладач кафедри матеріалознавства та ливарного виробництва

Центральноукраїнський національний технічний університет, просп. Університетський, 8, Кропивницький, Україна, 25031, bosiy@ukr.net

ORCID: 0000-0002-3090-0427

У статті розглядається спрощена математична модель теплофізичного процесу кристалізації рідкого металу при відведенні теплоти, а також теплообміну з навколишнім середовищем, і описується диференціальним рівнянням теплопровідності Фур'є через ефективний коефіцієнт теплопровідності. Процес теплообміну залежить від умов теплопередачі теплопровідністю і від теплопередачі з зовнішньої поверхні, яка відбувається природною конвекцією. Необхідно оцінити швидкості кристалізації по перетину металу, що затвердіває, визначити необхідні умови теплообміну та вплив цих умов на процес кристалізації металу. Підбір матеріалів, розмір і умови охолодження, які забезпечують необхідні швидкості охолодження та затвердіння металу, визначаються теплопереносом, фазовим переходом в процесі затвердіння, фізичними властивостями металу, який затвердіває і розмірами, початковими та граничними умовами. Отже, актуальним питанням на даний час є створення фізико-математичної моделі теплофізичного процесу кристалізації металу. Поставлена задача розв'язується визначенням швидкості кристалізації металу в процесі кристалізації при перетині температури ліквідуса та відводу теплоти з його поверхні. У роботі наведено результати моделювання теплофізичного процесу кристалізації рідкого металу, що дозволяє обґрунтувати процес теплообміну та швидкість кристалізації металу. Вирішення даного завдання необхідно для визначення технологічних режимів, граничних і початкових умов, за яких можуть бути отримані нові сплави з мікрокристалічними структурами. Наведено необхідні кінцево-різницеві рівняння, описаний алгоритм з використанням відомих експериментальних даних, проведено тестування наведеної моделі.

Ключові слова: модель кристалізації, швидкість кристалізації, теплообмін, метод кінцевих різниць.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Лиття є найпоширенішим і найпростішим методом отримання заготовок із різних сплавів. Залежно від складових частин вилівка та режимів його охолодження можна отримати продукт різної якості та структури.

Процес виробництва виливків такий: рідкий метал із ковша розливається у форми, потім відбувається затвердіння рідкого металу у формі та отримання однорідного за хімічним складом, механічним і фізичним властивостям вилівка [1].

Формування структури відбувається в двофазній зоні, яка являє собою гетерогенну зону із ростом кристалів з оточуючим розплавом металу. Середній розмір кристалів прямо пропорційний ширині цієї зони, яка зворотно пропорційна відведеному потоку теплоти. Теплофізичні явища, які відбуваються в двофазній зоні, включають процеси тепломасопереносу, фільтрації розплаву в міждендритному просторі та формування кристалів металу [1].

Теплота кристалізації виділяється в середині інтервалу кристалізації, який обмежено рівноважними значеннями температур ліквідуса і солідуса, які відповідають початковому вмісту розчиненої

домішки в розплаві, а швидкість кристалізації знаходять із рівноважної діаграми стану сплаву [1; 2].

Процес формування вилівка складається з фізико-хімічних явищ. Основу цього процесу складає затвердіння металу, що супроводжується переходом розплаву з рідкого стану в твердий. Методи дослідження кристалізації виливків поділяються на експериментальні і теоретичні. Найбільш розповсюдженим і, водночас, точним експериментальним методом є метод виміру температури в об'ємі вилівка за допомогою термопар. Цей метод дає можливість скласти повне уявлення про термічний режим затвердіння вилівка. Однак його застосування можливе, але зі значними труднощами. Поряд із цим практикується метод вимірювання товщини (кірки) металу, який затвердів. Товщина (кірки) металу, яка затвердіває, може бути визначена методом «обмацування», тобто періодичним зануренням зверху в розплав вилівка щупу. По положенню щупа щодо нерухомої форми судять про товщину твердої кірки у даний момент часу. Теоретичні методи дослідження поділяються на аналітичні методи і методи моделювання. При аналітичному вивченні поставленої задачі складаються необ-

хідні диференціальні рівняння, а потім знаходяться їх рішення. Отримані формули зв'язують між собою відповідні параметри процесу затвердіння виливка. Методи моделювання базуються на вивченні, наприклад, затвердіння виливка. З усіх теоретичних методів найбільший інтерес представляє аналітичний метод дослідження, тому що його кінцевим результатом є розрахункові формули, що можуть бути ефективно застосовані для вибору технологічного процесу лиття [2–4].

У таких роботах [2–5] відомо, що структура литого виробу залежить від характеру протікання процесу затвердіння, коли закладаються основні фізико-хімічні властивості виливка. Формування макроструктури виливка визначається технологічними режимами заливки і охолодження розплаву металу в формі, а також конструктивні особливості виробу. Оскільки експериментальні дослідження процесів затвердіння виливків трудомісткі, вартісні, тому широке розповсюдження отримали методи математичного моделювання з використанням комп'ютерної технології і чисельних методів розв'язку [6–8].

В роботі [8] вивчена конвекція в рідкому розплаві металу і при утворенні литої структури. Модель заснована на кристалізації багатоконпонентного сплаву з врахуванням конвекції, з розв'язком рівнянь, які описують процес тепломасопереносу в твердій, твердорідкій і рідкій фазах. Досліджено вплив вільної конвекції на температурні поля в розплаві металу і якість литої структури при затвердінні (кристалізації) великого зливка.

У статті [9] наведені результати аналізу процесів термо- та масопереносу в розплаві металу, який перебуває в рідко-твердому стані. Представлені результати експериментальних досліджень, що свідчать про фрактальний характер затвердіння притаманній більшості ливарних сплавів. Наведений математичний апарат опису процесу затвердіння з позиції тепло- та масопереносу в двофазній зоні та дифузії у фрактальних середовищах.

У процесі затвердіння формується первинна структура металу, яка визначає його механічні властивості. При цьому важливе значення має швидкість кристалізації в процесі затвердіння. У разі низької швидкості відбувається формування монокристалічної структури металу, з підвищенням швидкості спостерігається подрібнення структури і підвищення механічних властивостей [9–11].

У даній роботі [12] досліджено математичну модель теплофізичних процесів в металі, що твердне, яка враховує його усадку, а також, для сталі, зародження і динаміку дрібнодисперсних кристалів, що утворюються в двофазній зоні.

З наведеного вище матеріалу зрозуміло, що для визначення умов формування мікроструктурної структури металу необхідно оцінити швидкості кристалізації по перетину металу, який затвердіває.

Необхідно визначити умови теплообміну на границі між металом і формою та вплив їх на процес затвердіння. А також підбір матеріалів, розмір і умови охолодження, які забезпечують необхідні швидкості кристалізації затвердіння металу і визначаються теплопереносом по виливку і по формі, фазовим переходом в процесі затвердіння, фізичними властивостями металу, який затвердіває і форми, розмірами, початковими і граничними умовами. Натепер найкращим методом вирішення цих питань є створення фізико-математичної моделі, яка б описувала фізичне протікання процесів теплопереносу та затвердіння з швидкістю кристалізації в період формування структури металу.

Метою статті є математичне моделювання теплофізичного процесу кристалізації металу.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Рідкий метал, який заливають у форму, поступово втрачає надлишок теплоти, що міститься в ньому, він поступово затвердіває і охолоджується. Теплота від виливка відводиться у форму і через неї – в навколишнє середовище. Режим відведення теплоти, особливо в період затвердіння виливка, має дуже велике значення, він впливає на формування структури сплаву, що кристалізується, на його щільність і однорідність. Затвердіння виливка відбувається не відразу по всьому його перетину; воно починається в поверхневому шарі, потім переходить в глибинні шари і закінчується в зонах, які є термічними центрами виливка. При затвердінні чистих металів або евтектичних сплавів утворюється і переміщується фронт кристалізації, що відокремлює твердий метал від рідкого. У виливках, виготовлених з металу, який кристалізується в інтервалі температур, затвердіння відбувається в перехідній двофазній області, яка теж поступово переміщується від периферії виливка до центру. Ширина перехідної області тим більша, чим більша різниця між температурами ліквідуса і солідуса металу, що заливається. Разом з тим ширина цієї області залежить також від перепаду температур

по перетину вилівка. Ці фактори безпосередньо впливають на формування структури металу, який кристалізується [1].

Для того, щоб управляти процесом затвердіння вилівка і забезпечити розвиток в металі оптимальної структури, необхідно використовувати закони кристалізації і регулювати теплообмінні процеси кристалізації металу.

Систему диференціальних рівнянь, які описують процес розподілу теплоти в рідкому металі, можна спростити і замінити диференціальним рівнянням Фур'є з врахуванням конвекційного теплообміну через ефективний коефіцієнт теплопровідності $\lambda_{\text{еф}}$.

Розглянемо математичне моделювання процесу кристалізації металу як термічно тонкого тіла нескінченної пластини із застосуванням одновимірної задачі і диференціального рівняння теплопровідності Фур'є та чисельних методів розв'язку.

Високі швидкості кристалізації спостерігаються тільки в тонкостінних вилівках, тому розглянемо модель процесу одновимірного теплообміну при затвердінні та охолодженні вилівка.

Математична модель теплофізичного процесу кристалізації металу описується диференціальним рівнянням теплопровідності Фур'є [13–17]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

де $\alpha = \lambda_{\text{еф}} / \rho \cdot c_{\text{еф}}$ – коефіцієнт температуропровідності металу; ρ_m – густина металу; $c_{\text{еф}}$ – ефективний коефіцієнт теплоємності металу; $\lambda_{\text{еф}}$ – ефективний коефіцієнт теплопровідності металу; T – температура металу; τ – час; x – лінійний розмір металу.

Згідно з прийнятими припущеннями рівняння (1) має такий вигляд:

$$\rho \cdot c_{\text{еф}} \div \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \lambda_{\text{еф}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Коли температура розплаву досягає значень температури ліквідусу, починається кристалізація розплаву, формування структури і внутрішнього напруження.

Процес затвердіння описується в межах квазірівноважної теорії двофазної зони. Приховану теплоту кристалізації враховує ефективний коефіцієнт теплоємності $c_{\text{еф}}$.

Залежність ефективних коефіцієнтів теплоємності і теплопровідності металу від температури $c_{\text{еф}}(T)$ і $\lambda_{\text{еф}}(T)$ можна записати як систему рівнянь.

$$c_{\text{еф}} \begin{cases} c_p, T \geq T_l \\ c_p(1-\psi) + c_t\psi + L_k \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, T_s \leq T \leq T_k; \\ c_t, T \leq T_s \end{cases} \quad (3)$$

$$\lambda_{\text{еф}} \begin{cases} \lambda_{\text{еф}}, T \geq T_l \\ \lambda_p(1-\psi) + \lambda_t\psi, T \leq T_l \end{cases} \quad (4)$$

де c_p, c_t теплоємність рідкого та твердого металу; λ_p, λ_t теплопровідність рідкого та твердого металу; T_l, T_s – температури ліквідуса та солідуса.

У даному випадку до складу ефективної теплоємності входить теплота кристалізації L_k і ψ , як частка твердої фази. Ефективний коефіцієнт теплопровідності також є функцією частки твердої фази $\lambda_{\text{еф}} = f(\psi)$.

Враховуючи початкові та граничні умови, рівняння (3) матиме такий вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda_{\text{еф}}}{\rho \cdot c_{\text{еф}}} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (6)$$

$$0 < x < 1, 0 < \tau < t_0;$$

$$T(x, 0) = T_0(x), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1,$$

$$T(0, \tau) = \mu(\tau_1); T(1, \tau) = \mu(\tau_2);$$

$$0 < x < 1, 0 < \tau < t_0;$$

$$T(x, 0) = T_0(x), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1, \quad (7)$$

$$T(0, \tau) = \mu(\tau_1); T(1, \tau) = \mu(\tau_2);$$

$$0 \leq \tau \leq \tau_0. \quad (8)$$

При вирішенні задачі кристалізації вилівка чисельним методом застосовують, як правило, кінцево-різницеви методи. Переріз вилівка (у розглянутому випадку симетрії – його половина) поділяють на n шарів, де i – порядковий номер кожного шару. Враховуючи час, одержуємо рівномірну сітку точок для розрахунків, що має відстань $h = 1/n$ і $\tau = 1/t_0$:

$$\varphi_{h, \tau} = \{x_i = ih, t_j = j\tau, i = 0, i = 0 \dots n; j = 0, 1 \dots t_0\}.$$

На поверхні вилівка використовують граничні умови 3 роду. Після нескладних перетворень їх можна подати у вигляді:

$$T_i = \frac{T_i + 1 + Bi \cdot T_{\text{сп}}}{1 + Bi}, \quad (9)$$

де критерій $Bi = \frac{\alpha}{\lambda_{ef}(T)} \cdot h$, α – коефіцієнт тепло-віддачі від поверхні виливка до навколишнього середовища; h – характерний розмір виливка.

За допомогою розкладання рівняння (6) в ряд Тейлора і з урахуванням прийнятих позначень сітки $\varphi(i, j, \tau, h)$ одержуємо рівняння для визначення температурного поля внутрішніх точок виливка:

$$T_{i,j} = (1 - 2F_o) \cdot T_{i,j-1} + F_o(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}), \quad (10)$$

де $F_o = a\tau/h^2$ – критерій Фур'є, $a = \lambda_{ef}/\rho_m \cdot c_{ef}$ – коефіцієнт теплопроводності металу; τ – характерний час зміни зовнішніх умов (тривалість процесу затвердіння металу).

Аналогічно для вісі виливка (граничні умови 2 роду, тепловий потік дорівнює нулю) визначаємо:

$$T(i, j) = T_{i,j-1} (1 - F_o) + F_o \cdot T_{i-1,j-1}, \quad (11)$$

де $T_{i,j}$ – температура i -го шару в часі, що відповідає моменту j .

Стійкість рішень забезпечується, якщо вибір відстані τ не порушує умови $F_o (1 + \sqrt{0,5 Bi}) \leq 0,25$.

Виділення теплоти кристалізації враховується з використанням схеми компенсації. Особливістю моделі є формування шару (масиву значень вузлів), що містить відносна кількість виділеної твердої фази ψ . Цей масив формується таким чином. Для чергового «тимчасового» шару розраховуються температури вузлів виливка відповідно до представлених вище звичайних різницевих рівнянь. Потім у вузлах, які досягли температури ліквідуса, виконується перевірка: затвердів вузол чи ні.

Якщо вузол не затвердів (частка твердої фази менше одиниці), визначається різниця температур між поточним і наступним тимчасовим шаром $\Delta T_{ш} = T_i^j - T_i^{j+1}$. Потім розраховується приріст відносної кількості твердої фази в період між «поточним» і «наступним» тимчасовими шарами $\Delta\psi = c_{ef}\Delta T_{ш}/L_k$. Далі розраховується реальний приріст температур ΔT_r для «чергового» шару з урахуванням виділення теплоти кристалізації $L_k = \Delta\psi \frac{d\psi}{dT}$, де $d\psi/dT$ – швидкість виділення твердої фази в інтервалі температур затвердіння; тобто це швидкість кристалізації, яку можна визначити по діаграмі стану сплаву [1; 2], а в разі лінійної залежності її можна розрахувати за формулою $d\psi/dT = 1/(T_l - T_s)$.

Залишкова температура у вузлі, який знаходиться нижче температури ліквідуса і ще не

затвердів ($\psi < 1$), дорівнює $T_i^{j+1} = T_i^j - \Delta T_r$. Тестування моделі проведено порівнянням з літературним джерелом.

Математичне моделювання проведено для рідкого металу, який перед розливанням має температуру 1500 °C і різні режими охолодження при $\alpha = 1500$ Вт/м² · К та $\alpha = 1750$ Вт/м² · К, товщина виливка становить $\delta = 4,5$ мм. За умов охолодження, коли $\alpha = 1500$ Вт/м² · К швидкість кристалізації для середньої температури металу та її поверхні становить 63 °C і 88 °C при $\alpha = 1750$ Вт/м² · К відповідні характеристики становлять 75 °C і 100 °C. Швидкість охолодження під час кристалізації досягає 10 °C/с, це свідчить про підвищення властивостей металу, які пов'язані з фіксацією у твердому розчині домішок, легуючих елементів та вуглецю, забезпечення умов фазового перетворення. Теплоперенесення від рідкого розплаву до твердого шару виливка (конвективне перемішування) враховано ефективним коефіцієнтом теплопроводності (λ_{ef}). Із аналізу чисельних досліджень видно, що різні значення теплофізичних параметрів, таких як ефективний коефіцієнт теплопроводності, швидкість охолодження, температура навколишнього середовища і початкова температура розплаву, суттєво впливають на процес кристалізації металу з утворенням дрібнозернистої структури.

У роботі представлена математична модель, яка описує теплофізичні процеси, що мають місце при використанні промислової технології одержання сталевих заготовок.

Адекватність моделі підтверджується отриманими результатами і дає змогу спостерігати процес отримання заготовки та знайти його оптимальні параметри. Наведена математична модель має широке наукове значення та застосування вона може бути використана для вивчення процесу кристалізації та навіть оптимізації параметрів отримання заготовки з будь-якого металу чи сплаву.

ВИСНОВКИ

1. Використання наведеної спрощеної математичної моделі теплофізичного процесу кристалізації металу дозволяє розраховувати зміну температури з часом в будь-якій точці виливка, визначити швидкість кристалізації в процесі формування структури металу, визначити швидкість переміщення руху твердої фази в просторі.

2. Виконано розрахунок теплообміну методом кінцевих різниць, враховано виділення теплоти кристалізації схемою компенсації.

3. Оцінка точності результатів проводилася шляхом порівняння розрахункових значень зміни

температури і швидкості кристалізації вилівка з наявними експериментальними даними, що обґрунтовує достовірність отриманих результатів із задовільною точністю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баландин Г.Ф. Основы теории формирования отливки. Москва : Машиностроение, 1998. 360 с.
2. Лейбензон В.О., Пілюшенко В.Л., Кондратенко В.М. Твердження металів і металевих композицій. Київ : Науково-виробниче підприємство «Видавництво «Наукова думка» НАН України», 2009. 414 с.
3. Хричиков В.Е., Меньяло О.В. Ливарне виробництво чорних і кольорових металів : навчальний посібник. Дніпропетровськ : НМетАУ, 2015. 89 с.
4. Могилатенко В. Г., Пономаренко О.І., Ямшинський М. М. Теоретичні основи ливарного виробництва. Харків : НТУ «ХП». 2008. 288 с.
5. Ясюков В.В., Лысенко Т.В., Козишкурт Е.Н. Процессы кристаллизации и затвердевания отливок в разовых литейных формах. *Металл и литье Украины*. 2018. № 11-12. С. 1–8.
6. Токова О.В. Задача побудови комп'ютерної технології моделювання термічних процесів ливарного виробництва. *Control systems and computers*. 2018. № 4. УСНМ. 2018. № 4. С. 84–95.
7. Гилева Э.А., Соколова О.О., Труфанов Н.А. Численное исследование процесса кристаллизации заготовки превентора. *Современные проблемы науки и образования*. 2014. № 5.
8. Труфанов Н.А., Шаяхметова Л.Р. Численное исследование влияния конвекции расплава на процесс кристаллизации слитка. *Фундаментальные исследования*. № 1. 2016. С. 72–78.
9. Селівьорстова Т.В., Селівьорстов В.Ю., Іванова Л.Х. Математичні основи фрактального тепло і масопереносу в двофазній зоні розплаву металу «Сучасні проблеми металургії!». № 25. 2022. С. 35–44.
10. Кувыркин Г.Н., Лепешкин А.К. Математическое моделирование процессов затвердевание металлов в условиях высокоинтенсивного охлаждения. *Серия. «Естественные науки»*. 2007. № 3. С. 42–53.
11. Меньяло Е.В. Теплофизическая модель ускоренного затвердевания центральных зон отливок. *Процессы литья*. 2012. № 6(96). С. 14–21.
12. Надригайло Т.Ж., Борис Б.А. Математичне моделювання структури сталевого зливка, що твердне. *Сучасні проблеми металургії*. № 20. 2017. С. 61–62.
13. Буляндра О.Ф., Драганов Б.Х, Федорів В.Г. Теплотехніка : підручник. Київ : Вища школа, 1998. 334 с.
14. Пелых С.Г., Семесенко М.П. Оптимизация литейных процессов. Киев : «Вища школа», 1977. 192 с.
15. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ : Либідь, 2006. 424 с.
16. Вайсфельд Н.Д., Реут В.В. Рівняння математичної фізики. Одеса : Одеськ. нац. університет ім. І.І. Мечникова, 2018. 194 с.
17. Курпа Л.В., Лінник Г.Б. Рівняння математичної фізики : навчальний посібник. Харків : Вид-во «Підручник НТУ «ХП», 2011. 312 с.

SIMPLIFIED THERMOPHYSICAL MATHEMATICAL MODEL METAL CRYSTALLIZATION PROCESS

Mykola Bosyi

Senior Lecturer of the Department of Materials Science and Foundry Production

Central Ukrainian National Technical University, University-sitetskyi ave., 8, Kropyvnytskyi, Ukraine, 25031, bosiyvmv@ukr.net

ORCID: 0000-0002-3090-0427

Purpose. The article considers a condensed mathematical model of the thermophysical process of liquid metal crystallization during heat removal, as well as heat exchange with the environment and is described by the Fourier differential equation of thermal conductivity due to the effective coefficient of thermal conductivity. The process of heat exchange depends on the conditions of heat transfer by thermal conductivity and on heat transfer from the outer surface, which occurs by natural convection. **Methodology.** It is necessary to estimate the crystallization speed along the section of the solidifying metal, to determine the necessary heat exchange conditions and the effect of these conditions on the metal crystallization process. The selection of materials, size and cooling conditions that provide the necessary cooling and solidification rates of the metal are determined by heat transfer, phase transition in the solidification process, physical properties of the metal being solidified and dimensions, initial and boundary conditions. **Results.** Therefore, the creation of a physical-mathematical model of the thermophysical process of metal crystallization is an urgent issue at the moment. The problem is solved by determining the rate of cooling of the metal in the process of crystallization at the intersection of the temperature of the liquidus and heat removal from its surface. **Originality.** The problem is solved by determining the speed of metal crystallization in the process

of crystallization at the intersection of the temperature of the liquidus and heat removal from its surface. Solving this task is necessary to determine technological regimes, boundary and initial conditions under which new alloys with microcrystalline structures can be obtained. **Practical value.** The paper presents the results of modeling the thermophysical process of liquid metal crystallization, which allows to substantiate the process of heat exchange and the rate of metal crystallization. Solving this task is necessary to determine technological regimes, boundary and initial conditions under which new alloys with microcrystalline structures can be obtained. The necessary finite-difference equations are given, the algorithm is described using known experimental data, and the given model is tested.

Key words: crystallization model, crystallization rate, heat transfer, finite difference method.

REFERENCES

- Balandin G.F. (1998) Osnovy teorii formirovaniya otlivki [Fundamentals of the theory of casting formation]: Uchebnyk dlya vuzov. M: MGTU. 360 p.
- Leybenzon V.O., Pilyushenko V.L., Kondratenko V.M., Khrychikov V.YE., Nedop'okin F.V., Bilousov V.V., Dmytriiev YU.V. (2009). Tverdnennya metaliv i metalevykh kompozytsiy [Hardening of metals and metal compositions]: Pidruchnyk. Kyiv: Naukovovyrobnyche pidpryyemstvo «Vydavnytstvo "Naukova dumka" NAN Ukrayiny». 414 p. [in Ukrainian]
- Khrychikov V.E., Menyaylo O.V. (2015). Lyvarne vyrobnytstvo chornykh i kol'orovykh metaliv [Foundry production of ferrous and non-ferrous metals]: Navchal'nyy posibnyk. Vydannya druhe. dooprats'ovane. Dnipropetrovsk: NMetAU. 89 p. [in Ukrainian]
- Mohylatenko V.H., Ponomarenko O.I., Yamshynskyy M.M., Drob'yazko V.M., Kocheshkov A.S. (2008). Teoretychni osnovy lyvarnoho vyrobnytstva [Theoretical foundations of foundry production]: Navchal'nyy posibnyk. Kharkiv : NTU «KHPI». 288 p. [in Ukrainian]
- Yasyukov V.V., Lysenko T.V., Ko-zishkurt Ye.N., Solonenko L.I. (2018). Protsessy kristallizatsii i za-tverdevaniya otlivok v razovykh li-teynykh formakh [Processes of crystallization and solidification of castings in disposable casting molds]. *Metall i lit'ye Ukrainy*. №11-12. P. 1–8. [in Ukrainian]
- Tokova O.V. (2018). Zadacha pobudovy kompyuternoyi tekhnolo-hiyi modelyuvannya termichnykh protsesiv lyvarnoho vyrobnytstva [The task of building computer technology for modeling thermal processes of foundry production]: Control systems and computers. № 4. USyM. № 4. S. 84–95. [in Ukrainian]
- Gileva E.A., Sokolova O.O., Trufanov N.A. (2010). Chislennoye issledovaniye protsessa kristalizatsii zagotovki preventora [Numerical study of the process of crystallization of the preventer blank] // *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya*. 2014. № 5. [in Ukrainian]
- Trufanov N.A., Shayakhmetova L.R. (2016). Chislennoye issledovaniye vliyaniya konveksii rasplava na protsess kristallizatsii slitka. Fundamental'nyye issledovaniya [Numerical study of the influence of melt convection on the ingot crystallization process]. *Fundamental Research*. № 1. 2016. P. 72–78. [in Ukrainian]
- Seliv'orstova T.V., Seliv'orstov V.YU., Ivanova L.KH. (2022). Matematychni osnovy fraktal'noho teplo i masoperenosu v dvokhfaznyy zoni rozplavu metalu [Mathematical foundations of fractal heat and mass transfer in the two-phase metal melt zone]: “*Suchasni problemy metalurhiyi*”. № 25. P. 35–44. [in Ukrainian]
- Kuvyrkin G. N., Lepeshkin A. K. (2007). Matematicheskoye modelirovaniye protsessov zatverdevaniye metallov v usloviyakh vysokointensivnogo okhlazhdeniya [Mathematical modeling of solidification processes of metals under conditions of high-intensity cooling]. *Series. "Yestestvennyye nauki"*. № 3. P. 42–53. [in Ukrainian]
- Menyaylo Ye.V. (2012). Teplofizicheskaya model' uskorennoho zatverdevaniya tsentral'nykh zon otlivok [Thermophysical model of accelerated solidification of central zones of castings]. *Protsessy lit'ya*. 2012. № 6 (96). P. 14–21. [in Ukrainian]
- Nadrigaylo T.Zh., Borys B.A. (2017). Matematychno modelyuvannya struktury stalevoho zlyvka, shcho tverдне. [Mathematical modeling of the structure of a hardening steel ingot]. *Modern problems of metallurgy*. No. 20. P. 61–62. [in Ukrainian]
- Bulyandra O.F., Drahanov B.KH, Fedoriv V.H., Bessarab O.S., Mishchenko A.V., Slitenko A.F. (1998). Teplotekhnika [Heat Engineering]: pidruchnyk. K: Vyscha shkola., 334 p. [in Ukrainian]
- Pelykh S.G., Semesenko M.P. (1977). Optimizatsiya liteynykh protsessov [Optimization of foundry processes]. Kiyev. «Vishcha shkola». 192 p. [in Ukrainian]
- Perestyuk M.O., Marynets' V.V. (2006). Teoriya rivnyan' matematychnoyi fizyky [Theory of mathematical physics equations]: Pidruchnyk. Kyiv: Lybid'. 424 p. [in Ukrainian]
- Vaysfel'd N.D., Reut V.V. (2018). Rivnyannya matematychnoyi fizyky [Equations of mathematical physics]: navchal'nyy posibnyk dlya spetsial'nosti. «Prykladna matematyka». Odesa: Odes'k. nats.. un-t im. I. I. Mechnykova. 194 p. [in Ukrainian]
- Kurpa L.V., Linnyk H.B. (2011). Rivnyannya matematychnoyi fizyky [Equations of mathematical physics]: navch. posibnyk. Kharkiv: Vyd-vo «Pidruchnyk NTU «KHPI», 312 p. [in Ukrainian]

Стаття надійшла 03.08.2022