

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІОНУВАННЯ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ У СУЧАСНИХ УМОВАХ

Анатолій Усов

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем
Національний університет «Одеська політехніка», просп. Шевченка, 1, Одеса, Україна, 65044,
usov-a-v@op.edu.ua

ORCID: 0000-0002-3965-7611

Олександр Козін

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики
Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, вул. Кузнечна, 1, Одеса, Україна, 65029,
alexnazaret1@gmail.com

ORCID: 0009-0000-4525-5953

Юлія Сікіраш

старший викладач кафедри вищої математики та моделювання систем
Національний університет «Одеська політехніка», просп. Шевченка, 1, Одеса, Україна, 65044,
u.e.sikirash@opu.ua

ORCID: 0000-0003-0853-582X

Використання математичних методів дослідження техніко-економічних систем є ефективним засобом розповсюдження результатів аналізу в прикладних дослідженнях. Адекватний математичний опис стану об'єктів або процесів у просторі станів на основі звичайних диференціальних рівнянь характеризується необмеженими можливостями не тільки в побудові моделей, дослідженні стійкості й стабілізації систем, а й в управлінні ними в реальному часі. Основною метою проведеного дослідження є розробка науково-методичного підходу до моделювання системи управління розвитком виробничого підприємства в умовах децентралізації. Одержані результати узагальнюють аргументи й контраргументи в межах питання ідентифікації стану підприємства для оцінювання ефективності його функціонування та оптимізації цільових функцій під час вирішення завдань управління розвитком підприємства. Систематизація літературних джерел і підходів до вирішення проблеми управління розвитком виробничих підприємств засвідчила, що кожному рівню аналізу стану підприємства й оцінці динаміки його розвитку та проблемної ситуації відповідає агрегований набір функціональних оцінок, які враховують як окремі показники, так і їх різні групи. Актуальність вирішення цієї наукової проблеми полягає в тому, що результати математичних методів дослідження дають можливість вивчати процес управління розвитком підприємства в умовах децентралізації. Побудована модель управління стійкістю розвитку підприємства може бути ефективно використана об'єднаною територіальною громадою для оптимізації показників функціонування. Запропоновані математичні методи дослідження функціонування виробничих систем для моделювання системи управління розвитком виробничого підприємства в умовах децентралізації дають можливість визначити панівні параметри розвитку виробничих підприємств.

Ключові слова: математичні методи, системи диференціальних рівнянь, розвиток, виробниче підприємство, децентралізація, модель управління.

Актуальність роботи. Використання математичних методів дослідження техніко-економічних систем є ефективним засобом розповсюдження результатів аналізу в прикладних дослідженнях. Адекватний математичний опис стану об'єктів або процесів у просторі станів на основі звичайних диференціальних рівнянь характеризується необмеженими можливостями не тільки в побудові моделей, дослідженні стійкості і стабілізації систем, а й в управлінні ними в реальному часі [1; 2]. На прикладі адмі-

ністративно-територіальної реформи та децентралізації, яка визначена як основна передумова ефективного соціального й економічного розвитку територіальних громад, що має вплив на формування та розвиток виробничих підприємств на території об'єднаної територіальної громади (далі – ОТГ), розглядаються математичні методи дослідження їх функціонування. Сьогодні стає дедалі більш очевидним, що в прикладному плані вагоме значення мають проблеми синергетичної взаємодії виробничих

підприємств і територій їх базування й обґрунтування пріоритетних сфер розвитку [3; 4].

Процес функціонування підприємства як виробничої системи в умовах децентралізації належить до категорії слабо структурованих процесів у силу того, що для нього є характерним [5; 6]:

- високий ступінь динамічності й швидкості зміни зовнішнього середовища ОТГ, у якій існує підприємство [7; 8];

- виникнення й посилення впливу процесів глобалізації світової економіки на окреме підприємство;

- високий ступінь впливу зовнішніх (екзогенних) і внутрішніх (ендогенних) факторів на розвиток виробничих систем;

- посилення впливу зв'язку складних соціально-економічних систем як усередині держави, так і за рахунок інтеграції в єдине світове господарство [9; 10].

У сучасних ринкових умовах важливою умовою функціонування підприємства є забезпечення економічної стійкості у взаємозв'язку з кінцевими результатами виробничо-господарської діяльності. Сталий розвиток економіки підприємства дає змогу забезпечити економічну стабільність на макrorівні. Із цією метою важливо досліджувати сутність функціонування підприємства, вивчити фактори її забезпечення й на їх основі виробити пріоритетні напрями її досягнення.

Питання управління розвитком підприємств та управління стійкістю досліджують багато науковців. Цілеспрямована зміна параметрів, структури і властивостей системи у відповідь на збурення зовнішнього й внутрішнього середовища підприємства – так визначають адаптивний підхід до управління розвитком підприємства [11]. Щодо еволюційного підходу до управління розвитком виробничих систем влучно висловилися дослідники в роботі [12]: «Неврівноваженість і незворотність еволюційних процесів, що відбуваються у світі вимагають виникнення на підприємстві нових моделей управління, при цьому кожна нова модель повинна бути краща, ніж та, що замінюється». Інноваційний підхід передбачає управління розвитком промислового підприємства на основі активізації інноваційної діяльності, аналізу й упровадження інноваційних досягнень у всіх сферах господарської діяльності організації [13].

У роботі [14] у дослідженні 2003 року показано, що комплексний підхід до управління розвитком підприємства має на меті одночасну

розробку багатьох аспектів управління в їх взаємозв'язку: технічних, екологічних, економічних, організаційних, психологічних тощо.

Математичний аналіз стану підприємства й оцінювання динаміки його розвитку показують необхідність формування системи узагальнених векторно-скалярних, ситуаційно-орієнтованих показників [15]. Кожному рівню аналізу та проблемної ситуації відповідає агрегований набір оцінок, які враховують як окремі показники, так і їх різні групи [15–19].

Безліч показників, які є базовими для ідентифікації стану підприємства, використовуються для оцінювання ефективності його функціонування й оптимізаційних цільових функцій під час вирішення завдань управління розвитком підприємства [20; 21; 22].

Для реалізації управління необхідні витрати різнорідних ресурсів – вхідний вектор $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$, якими володіє підприємство протягом часу t , ґрунтуючись на поточному стані підприємства й ретроспективному аналізі його діяльності [23–26]:

$$V(t) = V_\phi(t) + V_p(t), \quad (1)$$

де $V_\phi(t)$ – ресурси функціонування; $V_p(t)$ – ресурси управління (розвитку).

Метою статті є математичні методи дослідження функціонування виробничих систем у сучасних умовах для управління їх динамічним розвитком в умовах децентралізації.

Матеріал і результати досліджень. У процесі розвитку підприємства відбувається зміна як його елементів, так і структури всіх його властивостей, включаючи й інтегративні властивості, тобто вектор $Y(t)$, що визначає вихідні характеристики. Як узагальнену математичну модель управління динамічним розвитком підприємства можна використовувати модель такого виду:

$$\frac{dX}{dt} = f(t, x, v, y) \quad (2)$$

де $x(t)$ – n -вимірний фазовий вектор; $v(t)$ – вектор управління динамічним розвитком підприємства; $y(t)$ – вектор вихідних показників функціонуючого підприємства.

Завдання управління ефективністю функціонування підприємства варто розглядати як вид завдань оптимального управління, що пропонують оптимальне використання на кожному етапі функціонування всіх ресурсів, якими володіє виробнича система (далі – ВС) (трудових, енергетичних, інформаційних тощо), для досягнення

головної на цьому етапі мети за дотримання безлічі обмежень. Завдання умовної оптимізації управління ВС можна записати у вигляді [25]:

$$X^o = \operatorname{argextr} P(x), \quad (3)$$

де $P(x)$ – функція корисності.

Безліч допустимих розв'язків $X(t)$ задається на основі змістовного аналізу ВС з обмеженнями у вигляді нерівностей [16–17]:

$$h_i(x, q_i) \leq 0; i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

і рівності:

$$g_j(x, q_j) = 0; j = \overline{1, r}, \quad (5)$$

де $X(t)$ – керована змінна простору станів ВС; h_i, g_j – оператори, що визначають структуру математичної моделі відповідного обмеження; q_i, q_j – кортежі кількісних параметрів відповідних обмежень.

Рішення завдання оптимізації функціонування виробничої системи в умовах децентралізації пов'язано з визначенням метрики, у якій проводиться порівняння якості рішень із функцією корисності.

Ідентифікація стану підприємства на основі комплексного оцінювання станів підприємства враховує фінансово-економічну діяльність підприємства, виробничий складник підприємства, інноваційно-інвестиційну та соціальну сторони функціонування, а також вплив діяльності підприємства на екологію [26].

Процес розвитку виробничої системи вважається ефективним, якщо він забезпечує розвиток системи в напрямі досягнення стратегічних цілей. Це означає, що в результаті впливу кількісні або якісні характеристики інтегративної властивості системи змінюються в напрямі поліпшення. При цьому варто ввести відповідні показники ефективності як критерії оптимізації управління розвитком у вигляді максимуму функціонала [27]:

$$J(y) = \int_0^T F(x, y) dt, \quad (6)$$

де $x(t), y(t)$ – керована й вихідна змінні стану виробничої системи.

На функцію $y(t)$ накладено обмеження:

$$0 \leq y \leq x. \quad (7)$$

Розглянемо ОТГ, у складі якої X – вектор-функція виробничо-технологічного процесу підприємства; $\frac{dx}{dt}$ – функціонування ВС; V_{p2} – система управління виробництвом; V_{p1} – система

управління розвитком; V_{p3} – система управління взаємодією з ОТГ; V_{pk} – система узгодження, яка забезпечує взаємодію ОТГ – $x(t) \frac{dx}{dt}$. ОТГ перебудовує свій стан $q(t)$ відповідно до вектора V_{p1} , що діє у вигляді ініціюючого управління. Діяльність ВС визначається перетворенням ресурсів у кінцевий продукт. Як ресурси і продукти розглядаються, наприклад, фінанси, матеріальні цінності, інтелектуально-професійні якості співробітників ВС [28].

Припустимо, що ОТГ містить n підприємств. Економічний стан кожного підприємства характеризується m -вимірним вектором: $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$, $i = \overline{1, n}$ змінних, що визначають функціонування i -го підприємства.

Передбачається, що випадкові впливи на ВС достатньо малі й ними можна знехтувати. Кожне підприємство ОТГ має повну інформацію про макроекономічні параметри. Взаємодіями між різними підприємствами можна знехтувати.

Тоді між часом і швидкістю змін економічних показників існує зв'язок у вигляді системи [29]:

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = q_{ij} f_{ij}(x_i, y), \quad (8)$$

де $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ – вихідні змінні ВС; q – швидкість установаження мікроекономічних змінних.

Таким чином, підприємство як динамічна система в основному визначається зміною мікроекономічних змінних.

Із цією метою розглянемо підприємство як ВС зі змінними, що характеризують його функціональну діяльність. Усі змінні, що діють на ВС або мають до неї якийсь стосунок, доцільно розподілити на три множини:

- 1) вхідні змінні v_1, v_2, \dots, v_m , що характеризують зовнішні впливи на входи системи;
- 2) змінні стану x_1, x_2, \dots, x_n – внутрішні змінні, сукупність яких повністю характеризує властивості системи;
- 3) вихідні змінні y_1, y_2, \dots, y_r , що представляють ті реакції на зовнішні впливи й ті стани системи, які належать до показників ефективності системи.

Так, наприклад, вхідними змінними v_1, v_2, \dots, v_m ВС можуть бути всі види ресурсів, що споживає система, інвестиції, інновації, використання передових технологій, оновлення основних засобів виробництва тощо.

До змінних стану x_i можна зарахувати рівень зносу основних засобів, рентабельність роботи

підприємства, ефективність використання основних фондів, виробничі потужності й ефективність їх реалізації.

До вихідних змінних y_i належать фінансові коефіцієнти ВС, такі як: рентабельність продукції, показники оборотності, фондівіддача, показники ринкової стійкості, конкурентоспроможність; соціальна, бюджетна та екологічна ефективність.

Сама ВС у структурі ОТГ може бути представлена у вигляді «чорної скрині» з m входами та r виходами, з кожним із яких пов'язана відповідна змінна.

Розглянемо сукупність входів як один узагальнений вхід, на який впливає вектор $v(v_1, v_2, \dots, v_m)$, а сукупність виходів – як узагальнений вихід, який характеризується вихідним вектором $y(y_1, y_2, \dots, y_r)$. Змінні стану пов'язані з внутрішніми властивостями системи вектором $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і їх змінами $\frac{dx}{dt}$ у процесі виробництва.

Передбачаючи стан ВС безперервним у кожний момент часу t , запишемо матричні рівняння, що характеризують функціонування цієї системи:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F[x(t)]; \quad y(t) = U[x(t), v(t)]. \quad (9)$$

Перший із виразів (9) є рівнянням стану ВС, розв'язок якого, що задовольняє умову $x_0 = x(t_0)$, дає вектор розвитку ВС:

$$x(t) = \psi[x(t_0), v(t)]. \quad (10)$$

Друге рівняння визначає вихідні змінні залежно від $x(t)$ та $v(t)$, і тому воно називається вихідним рівнянням.

В умовах розвитку ОТГ виробнича система є адитивною, тому рівняння (9) набувають вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)v(t);$$

$$Y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t), \quad (11)$$

де $A(t)$ – матриця системи (квадратна n -го порядку); $B(t)$ – матриця управління розміру $(n \times m)$; $C(t)$ – матриця виходу розміру $(r \times n)$; $D(t)$ – матриця входу розміру $(r \times m)$, елементи матриць неперервні. Із достатніх ознак асимптотичної стійкості розв'язку системи (11) впливає, що дійсні корені характеристичного рівняння матриць $A(t)$, $B(t)$ повинні прямувати до нуля при великих значеннях часу t . Для цього необхідно, щоб $\|A(t)\| \leq M$, $M > 0$.

Для виробничих стаціонарних систем елементи матриць A , B , C , D виражаються сталими числами, які є функціями параметрів компонент

ВС. A – основна матриця системи, яка визначає характер виробництва; B – матриця зв'язку; структура цієї матриці визначає характер зв'язку входу у ВС з різними змінними виробничої системи; C – матриця зв'язку змінних ВС із вихідними змінними вектор-функції $Y(t)$; D – матриця зв'язку, що безпосередньо пов'язує вектор входу $v(t)$ ВС із вектором виходу $Y(t)$. Структура цієї матриці визначає, яким чином функції на вході (наприклад, збільшення показників інноваційного розвитку ВС) впливають на різні виходи $Y(t)$ (наприклад, рентабельність продукції, що випускається). Матриця $D(t)$ характеризує параметри системи в умовах перехідних кризових явищ. Тому важливими моментами під час побудови детермінованих моделей із дослідження стійкості економічних систем є такі важливі характеристики, як спостережуваність і керованість (рис. 1).

Найбільш складну структуру мають ВС із нелінійними залежностями між змінними на їх входах і виходах. Рівняння стану таких ВС можна подати у вигляді:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bv(t) + Fz(t);$$

$$f[x(t), z(t), v(t)] = 0, \quad (12)$$

де A, B, F – сталі матриці; $f(x, z, v) = 0$ – нелінійне алгебраїчне рівняння, розв'язок якого відносно вектора $z(t)$ дає змогу виключити цей вектор із диференціального рівняння.

Нехай ВС описується рівнянням стану $x(t) = Ax + Bv$, яке являє собою матричний запис системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами в нормальній формі. Його розв'язок, який задовольняє початковим умовам $x_0 = x(0)$ для вектору стану $x(t)$ і вихідного вектору $Y(t)$, має вигляд [29]:

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-r)Bv(r)dr \quad (13)$$

$$Y(t) = C\phi(t)x(0) + \int_0^t C\phi(t-\tau)Bv(\tau)d\tau + Dv(t).$$

Перший доданок у (13) відповідає реакції ВС, що залежить від початкових умов (виробництво функціонує в штатному режимі), а інші доданки – реакції на вхідні впливи (наприклад, упровадження інвестицій в основний капітал, кількість передових технологій, що використовуються, тощо).

Фундаментальна матриця $\phi(t) = e^{At} = \exp At$ називається перехідною матрицею стану ВС.

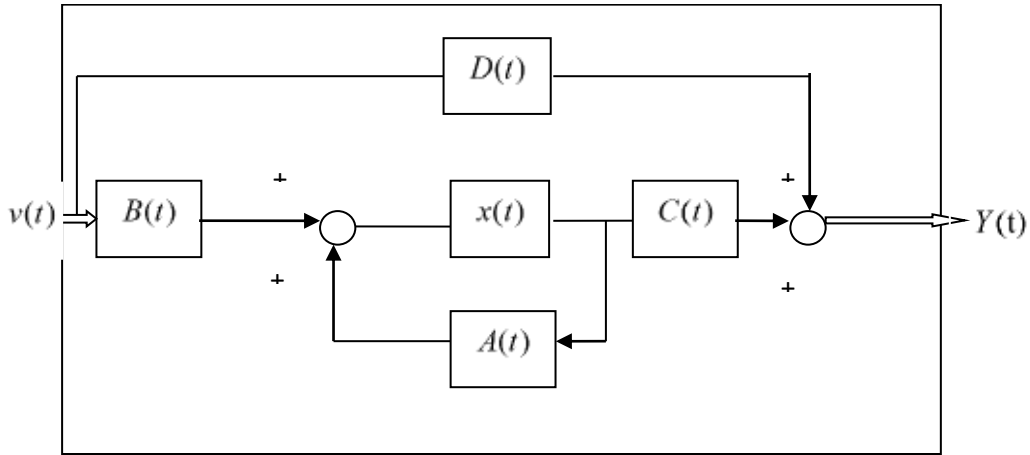


Рис. 1. Функціональна схема виробничої системи

Вона відображає початковий стан підприємства $x(0)$ у деякий стан для моменту часу t (при нульових входах), тобто $x(t) = \phi(t)x(0)$.

У разі запуску ВС, тобто при $x(0) = 0$ і відсутності зв'язку вектора входу $v(t)$ з вектором виходу $Y(t)$, $D = 0$, зв'язок між реакцією на виходах і входах описується відношенням:

$$Y(t) = \int_0^t C\phi(t-\tau)Bv(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)v(\tau)d\tau. \quad (14)$$

Матриця $g(t) = C\phi(t)B$ являє собою узагальнену характеристику ВС відносно її вхідних і вихідних змінних. Реакцію на i -му виході підприємства можна записати у вигляді:

$$y_i(t) = \int_0^t [g_{i1}(t-\tau)v_1(\tau) + g_{i2}(t-\tau)v_2(\tau) + \dots + g_{im}(t-\tau)v_m(\tau)]d\tau, \quad (15)$$

де $g_{ij}(t)$ – ij -елементи матриці $g(t)$, що описує вплив відповідного вхідного параметра й дорівнює реакції $y_{ij}(t)$ на i -виході відносно j -входу, за умови, що всі інші входи нульові, тобто

$$y_{ij}(t) = \int_0^t g_{ij}(t-\tau)v_j(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1, r}; j = \overline{1, m}. \quad (16)$$

Права частина рівності (16) є згортокою функцій $g(t) * v(t)$. Ураховуючи властивості згортки функцій, вираз для $y_{ij}(t)$ можна записати чотирма різними способами з урахуванням спрощення позначення скалярних функцій $y_{ij}(t) - y(t)$ та $v_j(t) - v(t)$:

$$y(t) = g(t) * v(t) = \int_0^t g(t-\tau)v(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)v(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(t-\tau)v'(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)v'(t-\tau)d\tau, \quad (17)$$

де $h(t)$ – функція, похідна якої по її аргументу визначає $g(t)$, тобто

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}; \quad g(t-\tau) = \frac{d}{d(t-\tau)}h(t-\tau).$$

Скалярні функції $g(t)$ та $h(t)$ називаються, відповідно, імпульсною та перехідною характеристиками ВС. Економічну інтерпретацію цим функціям можна дати таку: $g(t)$ – короткочасний інноваційний складник; $h(t)$ – реакція стану ВС і її вихідної характеристики від короткочасного використання інноваційного складника.

Нехай на вхід ВС надійшов складник $v_p(t)$ ресурсу розвитку в момент часу τ . Тоді за властивістю середнього значення реакцію на виході подамо у вигляді:

$$Y(t) = \int_0^t g(t-\tau)v_p(\tau)d\tau = g(t-\theta) \int_0^t v_p(\tau)d\tau = g(t-\theta) * Su, \quad (18)$$

де $0 < \theta < t$; Su – величина складника $v_p(t)$ ресурсу розвитку.

Отже, $g(t-\tau)$ можна розглядати як реакцію ВС на складову $v_p(t) = \delta(t-\tau)$ функцію, прикладену на вході в момент τ . Якщо D -матриця зв'язку вектора входу $v(t)$ ВС із вектором виходу $Y(t)$ не дорівнює нулю, тобто $D \neq 0$, то характеристика $g(t-\tau) \in v_p(t)$ визначається виразом:

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t); \quad h(t) = C(e^{At} - E)A^{-1}B + D,$$

де $\delta(t)$ – функція короткочасного надходження на вхід ВС складника $v_p(t)$ ресурсу управління розвитком підприємства; $h(t)$ – реакція на прикладену в початковий момент часу $t = 0$ функцію $\delta(t)$.

Ця модель дає можливість оцінити імпульси ОТГ на розвиток ВС з одночасним оцінюванням результативності діяльності підприємств і їх впливу на показники ОТГ.

Залежно від цілей розвитку підприємства в структурі ОТГ можуть використовуватися компромісні критерії, наприклад, на початкових етапах розвитку системи потрібне досягнення заданих показників у кожен період розвитку, а потім забезпечення найбільш високих вихідних показників.

Вибір і відносна ієрархія того чи іншого критерію пов'язані не тільки зі специфікою розвитку й функціонування підприємства, а й із загальною структурою його економіко-математичних моделей. До основних груп обмежень, у рамках яких здійснюється розвиток і функціонування підприємства, належать:

- ресурсні обмеження (на ресурси, фонд розвитку тощо) й обмеження на виробничі потужності;

- балансові обмеження, що встановлюють взаємозв'язок між окремими елементами й підсистемами;

- обмеження на значення техніко-економічних показників, що характеризують різні аспекти розвитку й функціонування системи.

Проблема управління стійким розвитком об'єктів господарської діяльності досить складна та різноманітна. Теоретичний апарат аналізу стійкості за Ляпуновим не може бути повною мірою застосований до класу організаційно-технічних систем, до яких належать ВС, так як поняття стійкого розвитку підприємства містить компоненти ефективності функціонування й розвитку. Разом із тим певна користь математичного аналізу результатів моделювання розвитку підприємства з точки зору керованості й спостережуваності цього процесу має місце. Для цього до рівняння лінійної системи, що описує стан ВС:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bv(t), \quad y(t) = Cx(t) + Dv(t),$$

застосуємо перетворення Лапласа [2]. В операторній формі стан ВС має вигляд:

$$PX(p) - X(0) = AX(p) + BV(p);$$

$$Y(p) = CX(p) + DV(p). \quad (19)$$

Звідси отримаємо розв'язок для вектора стану $X(p)$ і вихідного вектора $Y(p)$ в зображеннях:

$$X(p) = (PE - A)^{-1}[X(0) + BV(p)], \quad (20)$$

$$Y(p) = C(PE - A)^{-1}X(0) + [C(PE - A)^{-1}B + D]V(p).$$

Тут матриця $\phi(p) = (PE - A)^{-1}$ є зображенням перехідної матриці стану $\phi(t)$.

Таким чином, перехідна матриця ВС $\phi(t) = \exp(At)$ може бути обчислена шляхом перетворення матриці $F(p) = PE - A$ й наступного переходу від $(PE - A)^{-1}$ до її оригіналу.

За умови, що стан ВС в операторній формі в початковому стані $x(0) = 0$, вихідний вектор набуває вигляду:

$$Y(p) = [C\phi(p)B + D]V(p) = F(p)V(p). \quad (21)$$

Матриця $F(p) = C\phi(p)B + D$ називається передавальною функцією. Економічний сенс цієї матриці полягає в тому, що вона формує зв'язок між процесом перетворення сировинних ресурсів у виріб і вихідною змінною – прибутком від реалізації готової продукції.

Зображення i -ої вихідної змінної містить:

$$Y_i(p) = \sum_{j=0}^m F_{ij}(p)V_j(p). \quad (22)$$

Елементи $F_{ij}(p)$ передавальної матриці $F(p)$, яку можна розглядати як скалярні передавальні функції від i -го входу до j -го виходу. Знаючи

$$F_{ij}(p) = \frac{Y_i(p)}{V_j(p)}, \quad (23)$$

можна встановити зв'язок між значеннями інвестиційних витрат і перехідною характеристикою складника $v_p(t)$ ресурсу управління розвитком підприємства й реакцією вихідного вектора $Y(t)$. Це може бути зміна рентабельності виробництва, збільшення вартості основних фондів, прибутковості ВС. Це дає змогу оцінити ступінь впливу кожної виробничої системи на показники розвитку ОТГ [29].

Таким чином, передавальна функція $F_{ij}(p)$ є зображенням $g_{ij}(t)$, а зображення перехідної характеристики $h_{ij}(t)$ дорівнює $\frac{F_{ij}(p)}{p}$. Для отримання $g_{ij}(t)$ та $h_{ij}(t)$ достатньо перейти від зображення до оригіналу, використовуючи зворотне перетворення Лапласа. Визначивши ці характеристики для всіляких пар «вхід ВС – вихід ВС», можна записати матриці $g(t)$ та $h(t)$.

ВС буде керованою, якщо всі змінні $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ залежать від вхідних впливів $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_v(t))$. ВС називається спостережуваною, якщо змінні $x_i(t)$ пов'язані хоча б із одним виходом $y_j(t)$. Повна спостережуваність ВС означає, що існує такий вплив $v(t)$,

що за реакціями на виходах $y(t)$ на заданому інтервалі часу $0 \leq t \leq T$ можна визначити початковий стан.

Адекватність побудованої моделі системи управління розвитком виробничого підприємства в умовах децентралізації перевірялася на прикладі наступного стивідорного віртуального підприємства, що розташоване на території ОТГ в єдиній митній зоні з портом. Компоненти вектора $X(x_1, x_2)$ – стану підприємства:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

де x_1 – фондвіддача; x_2 – рентабельність активів. Компоненти матриці A , яка визначає характер виробництва:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

де a_{11} – коефіцієнт автономії; a_{12} – витрати ВП на 1 грн під час оброблення вантажів; a_{21} – коефіцієнт зносу основних засобів (вантажопідйомних, перевантажувальних і перевізних механізмів); a_{22} – частка співробітників із високою кваліфікацією, яка бере участь у вантажопереробці. Компоненти матриці B – зв'язку входу у ВС із різними змінними виробничої системи;

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

де b_{11} – приріст капітальних інвестицій; b_{12} – оновлення основних засобів; b_{21} – частка витрат на НДДКР; b_{22} – частка передових технологій, які використовуються під час оброблення вантажів.

Компоненти матриці C – зв'язку змінних ВС із вихідними змінними вектор-функції $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

де c_{11} – приріст обсягу виробництва; c_{12} – приріст податкових надходжень до бюджету ОТГ; c_{21} – рівень зайнятості – частка робітників підприємства, що мешкає в ОТГ; c_{22} – приріст власних доходів на одного мешканця в грошових одиницях. Структура цієї матриці дає змогу впливати на різні виходи $Y(t)$.

Компоненти матриці D – зв'язку безпосередньо вектора $V(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ входу ВС із вектором виходу $Y(t)$ – бюджетною ефективністю:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C\phi(t)x^0 + \int_0^t C\phi(t-\tau)BV(\tau)d\tau + DV(t) = \\ &= \begin{pmatrix} 0,09 & 0,42 \\ 0,68 & 0,34 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0,63 & 0,71 \\ 0,15 & 0,57 \end{pmatrix}t} \times \begin{pmatrix} 1,33 \\ 0,035 \end{pmatrix} + \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} 0,09 & 0,42 \\ 0,68 & 0,34 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0,63 & 0,71 \\ 0,15 & 0,57 \end{pmatrix}(t-\tau)} \times \begin{pmatrix} -0,18 & 0,38 \\ 0,0006 & 0,29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} d\tau + \\ &+ \begin{pmatrix} 0,22 & 0,3 \\ 0,5 & 0,08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Розглянемо реакцію вихідної змінної y_2 – бюджетну ефективність (частку податків підприємства в бюджет ОТГ) вектора вихідних показників функціонуючого підприємства $Y(t)$ у разі зміни вхідної характеристики b_{22} – частки передових технологій, які використовуються під час обробки вантажів, на 0,05. У зв'язку зі зміною вхідної характеристики $b_{22}^* = b_{22} + 0,05$ вихідна компонента $y_2^*(t)$ набуде таких значень за період $t = 1$:

$$\begin{aligned} y_2^*(t) &= \int_0^t \{ [0,278 + 0,163(t-\tau)]0,193 + \\ &+ [0,313 + 0,056(t-\tau)]0,23 \} d\tau = y_2(t) * 1,1 \end{aligned}$$

Таким чином, збільшення вхідної характеристики b_{22} – частки передових технологій під час обробки вантажів – на 17% призводить до збільшення показника бюджетної ефективності, тобто збільшення податків виробничого підприємства в бюджет ОТГ на 10%. Решта ефективності в разі збільшення частки передових технологій залишається в складі ВС для її розвитку.

Побудована модель управління стійкістю розвитку підприємства може бути ефективно використана ОТГ для оптимізації показників функціонування. Повнота управління стійкістю багато в чому залежить від відомостей, що характеризують як фінансово-економічні, так і виробничо-технічні й інноваційні параметри діяльності як підприємств, так й ОТГ в цілому.

Пріоритети стійкого розвитку підприємства формують комплекс першочергових цілей діяльності, виділених з урахуванням галузевої специфіки й особливостей розвитку ОТГ. При цьому управління стійким розвитком підприємства на основі пріоритетів зводиться до аналізу галузевих особливостей підприємства, виділення сфер сталого розвитку (параметричних складників), формування конкретних вимірних показників функціонального стану підприємства й ОТГ.

Висновки. Запропоновані математичні методи дослідження функціонування виробничих систем у сучасних умовах як науково-методичний підхід до моделювання системи управління розвитком виробничого підприємства в умовах децентралізації та його практична реалізація дають можливість визначити панівні параметри розвитку виробничих підприємств, що мають вплив на ОТГ, і своєчасно відстежувати імпульси й протік станів ОТГ з урахуванням стану ВС як параметрів для її розвитку. Запропонований аналіз стану ВС у рамках ОТГ й оцінювання динаміки її розвитку виявляють необхідність формування системи узагальнених векторно-скалярних, ситуативно орієнтованих показників.

Представлені показники ВС у вигляді вектора стану $x(t)$, вхідного $v(t)$ та вихідного вектора $y(t)$ можуть бути базовими для ідентифікації стану підприємства, а також можуть бути використані для оцінювання ефективності його функціонування й оптимізаційних цільових функцій під час розв'язування завдань управління розвитком підприємства. Ідентифікація стану підприємства на основі комплексного оцінювання його стану векторно-функціональними складниками $v(t)$, $x(t)$, $y(t)$ та матрицею управління $U(t)$ дає змогу враховувати фінансову діяльність, виробничу й інвестиційно-інноваційну діяльність ВС. Це сприятиме розвитку як ОТГ, так і виробничих підприємств, що розташовані на їх території, та отриманню ними відповідних економічних вигід: піднесення економічно відсталих підприємств і територій; поширення нових технологій, нових видів продукції та розвиток сектора інновацій; зростання зайнятості населення й збільшення попиту на кваліфіковану робочу силу, якісну зміну сучасного життя; високу економічну ефективність і рентабельність; стимулювання нового бізнесу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Моделювання систем / Г.О. Оборський, О.Ф. Дашенко, А.В. Усов, Д.В. Дмитришин. Одеса : Астропринт, 2013. 664 с.
2. Edwards C.H., Penney D.E. *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling*. 4rd edition. Pearson Prentice Hall, 2008. 804 p.
3. Olszewska B., Piwoni-Krzyszowska E. Factors influencing company relations with market stakeholders, in the face of crises in company development. *Management and Production Engineering Review*. 2014. № 5 (2). P. 45–53.
4. Lozano R. Holistic perspective on corporate sustainability driver. *Corporate Social Responsibility Environmental Management*. 2015. № 22. P. 32–44.
5. Boadway R., Dougherty S. Decentralisation in Globalised World: Consequences and Opportunities. *OECD Working Papers on Fiscal Federalism*. 2018. № 21.
6. Chen A., Nicolaas G. The national and regional effects of fiscal decentralisation in China. *The Annals of Regional Science*. 2013. № 51 (3) P. 731–760.
7. Villiers C. A new conceptual model of influences driving sustainability based on case evidence of the integration of corporate sustainability management control and reporting. *Journal of Cleaner Production*. 2016. Vol. 136-A. P. 78–85.
8. Baskaran T., Feld L., Schnellenbach J. Fiscal Federalism, Decentralization, and Economic Growth: A Meta-Analysis. *Economic Inquiry*. 2016. № 54 (3). P. 1445–1463.
9. Aslim E.G., Neyapti B. Optimal fiscal decentralization: Redistribution and welfare implications. *Economic Modelling*. 2017. № 6. P. 224–234. DOI: 10.1016/j.econmod.2016.12.008.
10. Moore S.B., Manring S.L. Strategy development in small and medium sized enterprises for sustainability and increased value creation. *Journal of Cleaner Production*. 2009. № 17. P. 276–282.
11. Петров Е.Г. Подмогильний Н.В, Соколова Н.А., Ходаков В.Е. Управління стійким розвитком підприємств : монографія. Херсон, 2009. 558 с.
12. Nelson R.R., Winter S.G. *An Evolutionary Theory of Economic Change*. Harvard University Press, 1982. 185 p.
13. Hamrol A. A new look at some aspects of maintenance and improvement of production processes. *Management and Production Engineering Review*. 2018. № 9 (1). P. 34–43.
14. Barton T.L., Shenkir W., Walker P. An integrated approach to risk management: is it worth it to do. Williams, 2003. 208 p.
15. Taurino T. Using collaborative management in industrial clusters – case study of italian energy cluster. *Management and Production Engineering Review*. 2018. № 9 (4). P. 138–149.
16. Fiksel J. A systems view of sustainability: The triple value model. *Environmental Development*. 2012. № 2. P. 138–141.
17. Crofton F. S. Educating for sustainability: opportunities in undergraduate engineering. *Journal of Cleaner Production*. 2000. № 8. P. 397–405.
18. Dirks K., Lewicki R., Zaheer A. Repairing relationships within and between organizations: building a conceptual foundation. *Academy of Management Review*. 2009. № 34 (1). P. 68–84.
19. Navickas V., Malakauskaite A. The impact of clusterization on the development of small and mediumsized enterprise (SME) sector. *Journal of Business Economics and Management*. 2009. № 10 (3). P. 255–259.
20. Геєць В.М. Економіка України: стратегія і політика довгострокового розвитку : монографія. Київ : Фенікс, 2003. 1006 с.
21. Мельник Л.Г. *Фундаментальні основи розвитку*. Суми : Університетська книга, 2003. 288 с.
22. Рішення Конституційного Суду України від 13 липня 2001 р. № 11-рп/2001. URL: <https://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/v011p710-01> (дата звернення: 02.10.2023).

23. Децентралізація влади: порядок денний на середньострокову перспективу : аналітична доповідь / Я.А. Жаліло та ін. ; за наук. ред. Я.А. Жаліла. Київ : НІСД, 2019. 192 с.

24. Децентралізація : веб-сайт. URL: <http://decentralization.gov.ua> (дата звернення: 01.10.2023).

25. Dorf R., Bishop R. *Modern Control Systems*. Prentice Hall, 2008. 1018 p.

26. Децентралізація в Україні та її вплив на соціально-економічний розвиток територій: методичні підходи та результати оцінювання : наукова доповідь / наук. ред. І.З. Сторонянська. Львів : ІПД НАНУ, 2018. 144 с.

27. Моделирование та оптимізація систем : підручник / В.М. Дубовой, Р.Н. Кветний, О.І. Михальов, А.В. Усов. Вінниця : Едельвейс, 2017. 804 с.

28. Optimization of Innovation Projects According To Criteria of Time and Resource Constraints / L. Rodchenko, O. Goncharenko, O. Koval, I. Tarasov, H. Nemchenko, T. Tkachuk. *International Journal of Recent Technology and Engineering*. 2019. Vol. 8. № 3. P. 1431–1434.

29. Usov A.V., Niekrasova L.A., Dašić P.D. Management Of Development Of Manufacturing Enterprises In Decentralization Conditions. *Management and Production Engineering Review*. 2020. Vol. 11. № 4. P. 46–55.

MATHEMATICAL METHODS OF STUDYING THE FUNCTIONING OF PRODUCTION SYSTEMS IN MODERN CONDITIONS

Anatoliy Usov

Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics and Systems Modeling

Odesa Polytechnic National University, 1 Shevchenko ave., Odesa, Ukraine, 65044, usov-a-v@op.edu.ua

ORCID: 0000-0002-3965-7611

Oleksandr Kozin

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics

State University of Intellectual Technologies and Communications, 1 Kuznechna str., Odesa, Ukraine, 65029, alexnazaret1@gmail.com

ORCID: 0009-0000-4525-5953

Yuliia Sikirash

Senior Lecturer at the Department of Higher Mathematics and Systems Modeling

Odesa Polytechnic National University, 1 Shevchenko ave., Odesa, Ukraine, 65044, u.e.sikirash@opu.ua

ORCID: 0000-0003-0853-582X

The use of mathematical methods for the study of techno-economic systems is an effective means of disseminating analysis results in applied research. Adequate mathematical description of the state of objects or processes in the space of states based on ordinary differential equations is characterized by unlimited possibilities not only in building models, studying the stability and stabilization of systems, but also in managing them in real time. The main purpose of the conducted research is the development of a scientific and methodological approach to the modeling of the management system for the development of a manufacturing enterprise in conditions of decentralization. The obtained results summarize the arguments and counter-arguments within the framework of the issue of identifying the state of the enterprise for evaluating the effectiveness of its functioning and optimizing the target functions when solving the tasks of managing the development of the enterprise. The systematization of literary sources and approaches to solving the problem of managing the development of manufacturing enterprises proved that each level of analysis of the state of the enterprise and assessment of the dynamics of its development and the problem situation corresponds to an aggregated set of functional assessments that take into account both individual indicators and their different groups. The relevance of solving this scientific problem lies in the fact that the results of mathematical research methods provide an opportunity to study the process of managing the development of an enterprise in conditions of decentralization. The built model of managing the sustainability of the enterprise can be effectively used by the united territorial community to optimize performance indicators. The proposed mathematical methods of studying the functioning of production systems in modern conditions as a scientific and methodological approach to the modeling of the management system of the development of a production enterprise in the conditions of decentralization and its practical implementation make it possible to determine the dominant parameters of the development of production enterprises.

Key words: mathematical methods, systems of differential equations, development, production enterprise, decentralization, management model.

REFERENCES

1. Oborsky, G.A., Daschenko, A.F., Usov, A.V., & Dmitrishin, D.V. (2013). *Systems modeling*. Odesa: Astroprint.
2. Edwards, C.H., & Penney, D.E. (2008). *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling* (4rd ed.). Pearson Prentice Hall.
3. Olszewska, B., & Piwoni-Krzyszowska, E. (2014). Factors influencing company relations with market stakeholders, in the face of crises in company development. *Management and Production Engineering Review*, 5(2), 45–53.
4. Lozano, R. (2015). Holistic perspective on corporate sustainability driver. *Corporate Social Responsibility Environmental Management*, 22, 32–44.
5. Boadway, R., & Dougherty, S. (2018). Decentralisation in Globalised World: Consequences and Opportunities. *OECD Working Papers on Fiscal Federalism*, 21.
6. Chen, A., & Nicolaas, G. (2013). The national and regional effects of fiscal decentralisation in China. *The Annals of Regional Science*, 51(3), 731–760.
7. Villiers, C. (2016). A new conceptual model of influences driving sustainability based on case evidence of the integration of corporate sustainability management control and reporting. *Journal of Cleaner Production*, 136-A, 78–85.
8. Baskaran, T., Feld, L., & Schnellenbach, J. (2016). Fiscal Federalism, Decentralization, and Economic Growth: A Meta-Analysis. *Economic Inquiry*, 54(3), 1445–1463.
9. Aslim, E.G., & Neyapti, B. (2017). Optimal fiscal decentralization: Redistribution and welfare implications. *Economic Modelling*, 6, 224–234. doi: 10.1016/j.econmod.2016.12.008.
10. Moore, S.B., & Manring, S.L. (2009). Strategy development in small and medium sized enterprises for sustainability and increased value creation. *Journal of Cleaner Production*, 17, 276–282.
11. Petrov, E.H., Podmohylnyi, N.V., Sokolova, N.A., & Khodakov, V.Ye. (2009). *Upravlinnia stiikym rozvytkom pidpriemstv* [Management of sustainable development of enterprises]. Kherson.
12. Nelson, R.R., & Winter, S.G. (1982). *An Evolutionary Theory of Economic Change*. Harvard University Press.
13. Hamrol, A. (2018). A new look at some aspects of maintenance and improvement of production processes. *Management and Production Engineering Review*, 9(1), 34–43.
14. Barton, T. L., Shenkirm W., & Walker, P. (2003). *An integrated approach to risk management: is it worth it to do*. Williams.
15. Taurino, T. (2018). Using collaborative management in industrial clusters – case study of italian energy cluster. *Management and Production Engineering Review*, 9(4), 138–149.
16. Fiksel, J. (2012). A systems view of sustainability: The triple value model. *Environmental Development*, 2, 138–141.
17. Crofton, F.S. (2000). Educating for sustainability: opportunities in undergraduate engineering. *Journal of Cleaner Production*, 8, 397–405.
18. Dirks, K., Lewicki, R., & Zaheer, A. (2009). Repairing relationships within and between organizations: building a conceptual foundation. *Academy of Management Review*, 34(1), 68–84.
19. Navickas, V., & Malakauskaite, A. (2009). The impact of clusterization on the development of small and medium-sized enterprise (SME) sector. *Journal of Business Economics and Management*, 10(3), 255–259.
20. Heiets, V.M. (2003). *Ekonomika Ukrainy: stratehiia i polityka dovrostrokovoho rozvytku* [Economy of Ukraine: strategy and policy of long-term development]. Kyiv: Feniks.
21. Melnyk, L.H. (2003). *Fundamentalni osnovy rozvytku* [Fundamental foundations of development]. Sumy: Univer-sytetska knyha.
22. Decision of the Constitutional Court of Ukraine on July 13 2001, № 11-пн/20016 (2001). <https://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/v011p710-01>.
23. Zhalilo, Ya.A., Shevchenko, O.V., & Romanova, V.V. (2019). *Detsentralizatsiia vlady: poriadok dennyi na serednostrokovu perspektyvu* [Decentralization of power: the medium-term agenda]. Kyiv: National Institute for Strategic Studies.
24. Decentralization. (2023). <http://decentralization.gov.ua/>.
25. Dorf, R., & Bishop, R. (2008). *Modern Control Systems*. Prentice Hall.
26. Storonianska, I.Z. (Ed.) (2018). *Detsentralizatsiia v Ukraini ta yii vplyv na sotsialno-ekonomichnyi rozvytok terytorii: metodychni pidkhody ta rezultaty otsiniuvannia: naukova dopovid* [Decentralization in Ukraine and its Impact on the Socio-Economic Development of Territories: Methodological Approaches and Evaluation Results: Sciences]. Lviv: IRD of NASU.
27. Dubovoi, V.M., Kvietyni, R.N., Mykhalov, O.I., & Usov, A.V. (2017). *Modeliuvannia ta optymizatsiia system* [Systems modeling and optimization]. Vinnytsia: Edelveis.
28. Rodchenko, L., Goncharenko, O., Koval, O., Tarasov, I., Nemchenko, H., & Tkachuk, T. (2019). Optimization of Innovation Projects According To Criteria of Time and Resource Constraints. *International Journal of Recent Technology and Engineering*, 8(3), 1431–1434.
29. Usov, A.V., Niekrasova, L.A., & Dašić, P.D. (2020). Management Of Development Of Manufacturing Enterprises In Decentralization Conditions. *Management and Production Engineering Review*, 11(4), 46–55.

Стаття надійшла 25.09.2023