

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПониЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ОБОГАЩЕНИЯ ЖЕЛЕЗОРУДНОГО СЫРЬЯ

В. С. Моркун, Н. В. Моркун, В. В. Тронь

ГВУЗ «Криворожский национальный университет»

ул. XXII Партсъезда, 11, г. Кривой Рог, 50027, Украина. E-mail: vtron@ukr.net

Представлены результаты анализа методов предварительной обработки данных для формирования математических моделей процессов обогащения минералого-технологических разновидностей железорудного сырья. Выполнен анализ существующих подходов к моделированию и формированию управления обогащением минералого-технологических разновидностей железорудного сырья. Обоснована целесообразность понижения размерности пространства параметров технологических процессов при формировании нелинейных динамических моделей. Представлены результаты сравнительного анализа эффективности ряда методов понижения размерности при обработке результатов кластеризации характеристик минералого-технологических разновидностей железорудного сырья.

Ключевые слова: автоматизация, система управления, математическая модель, понижение размерности.

АНАЛІЗ МЕТОДІВ ЗНИЖЕННЯ РОЗМІРНОСТІ МОДЕЛЕЙ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗБАГАЧЕННЯ ЗАЛІЗОРУДНОЇ СИРОВИНИ

В. С. Моркун, Н. В. Моркун, В. В. Тронь

ДВНЗ «Криворізький національний університет»

вул. XXII Партз'їзду, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна. E-mail: vtron@ukr.net

Представлено результати аналізу методів попередньої обробки даних для формування математичних моделей процесів збагачення мінералого-технологічних різновидів залізорудної сировини. Виконано аналіз існуючих підходів до моделювання і формування керування збагаченням мінералого-технологічних різновидів залізорудної сировини. Обґрунтовано доцільність зниження розмірності простору параметрів технологічних процесів при формуванні нелінійних динамічних моделей. Представлено результати порівняльного аналізу ефективності ряду методів зниження розмірності при обробці результатів кластеризації характеристик мінералого-технологічних різновидів залізорудної сировини.

Ключові слова: автоматизація, система керування, математична модель, зниження розмірності.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Решение проблемы повышения эффективности технологических процессов обогащения полезных ископаемых является одним из важнейших компонентов обеспечения устойчивого развития горных предприятий. Обеспечить высокую эффективность технологических процессов обогащения невозможно без наличия качественной информации о процессе, формирования технологической базы данных и ее последующей обработки для построения адекватных и эффективных математических моделей.

В промышленных условиях часто применяется подход, основанный на анализе данных активных и пассивных экспериментов [1–2]. Это позволяет определить зависимости между качественными показателями моделируемого процесса и условиями, в которых он протекает.

Как объекты управления технологические агрегаты обогащательного производства могут быть представлены в виде операторов, преобразующих векторы входных переменных в векторы выходных параметров [2–6]. При этом выходные параметры одной стадии технологического процесса являются входными для последующей стадии. Среди элементов векторов выходных параметров измельчительных агрегатов присутствуют как качественные и количественные показатели. Следует отметить, что в условиях переработки нескольких минералого-технологических разновидностей соответственно возрастает и количество показателей, которые необходимо учитывать при формировании математических моделей процессов обогащения рудного сырья.

Поскольку большое количество входных и выходных переменных значительно усложняет процесс

структурной и параметрической идентификации математических моделей, возникает необходимость предварительной обработки данных с целью уменьшения их размерности.

Таким образом, целью работы является анализ методов понижения размерности моделей нелинейных динамических процессов обогащения железорудного сырья.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Анализ результатов работ [3–6] позволяет сделать вывод, что наиболее перспективным подходом для решения проблемы управления технологическими линиями обогатительного производства является представление процесса переработки минералого-технологических разновидностей железорудного сырья как системы с сосредоточенными входами и распределенным во времени и пространстве выходом, которым является функция распределения содержания полезного компонента по классам крупности рудного материала. Такой подход позволит описать сосредоточенные управляющие воздействия, которые формируются технологическими агрегатами измельчения, классификации и разделения. На показатели функционирования технологических обогатительных агрегатов оказывают существенное влияние массовые доли минералого-технологических разновидностей руды во входном потоке. Каждая минералого-технологическая разновидность характеризуется несколькими физико-механическими и химико-минералогическими параметрами. Рассмотрим распределение характеристик проб руды нескольких минералого-технологических разновидностей на 5 и 8 кластерах (рис. 1).

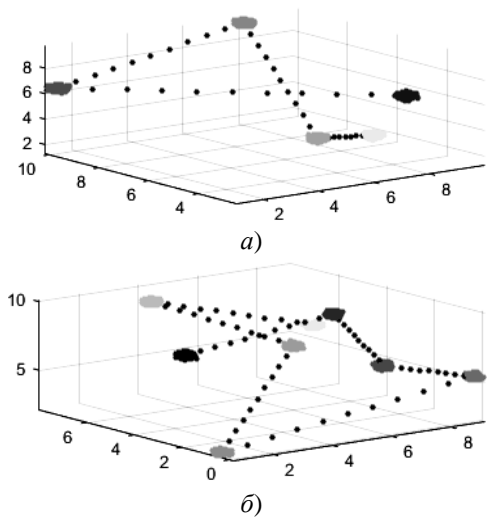


Рисунок 1 – Результат кластеризації вихідних даних:
а – на 5 кластерів; б – на 8 кластерів

Одним из наиболее распространенных методов понижения размерности является метод главных компонент (Principal Components Analysis, PCA). В результате применения данного метода получают представление данных меньшей размерности, которое описывает направление наибольшего изменения исходных данных [8]. Полученное линейное преобразование Θ , максимизирует выражение

$$F = \Theta^T \text{cov}_{x-\bar{x}} \Theta \rightarrow \max, \quad (1)$$

где $\text{cov}_{x-\bar{x}}$ – ковариационная матрица центрированных относительно начала координат данных X . Использование метода главных компонент позволило получить корректное отображение исходных данных в пространство меньшей размерности за 1,04–1,15 с. Результат понижения размерности при помощи метода главных компонент представлен на рис. 2.

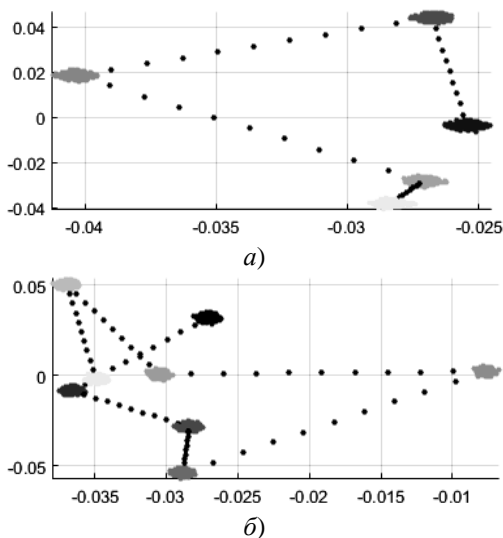


Рисунок 2 – Результат понижения размерности при помощи метода PCA:
а – 5 кластеров; б – 8 кластеров

Нелинейный метод многомерного шкалирования (multidimensional scaling, MDS) [8–10] при отображении многомерного представления данных о параметрах технологического процесса обогащения минералого-технологических разновидностей железорудного сырья в представление меньшей размерности сохраняет попарные расстояния между точками данных. Качество отображения описывается функцией, которая оценивает разницу попарных расстояний в начальном многомерном представлении и полученном представлении меньшей размерности. Примером такой функции является функция напряжения

$$F(Y) = \sum_{ij} (\|x_i - x_j\| - \|y_i - y_j\|)^2, \quad (2)$$

где $\|x_i - x_j\|$ – Эвклидово расстояние между точками данных большей размерности; $\|y_i - y_j\|$ – Эвклидово расстояние между точками данных меньшей размерности.

Минимизация функции напряжения выполнена с использованием метода сопряженных градиентов [9]. Использование данного метода позволило получить корректное отображение исходных данных в пространство меньшей размерности за 21,07–22,86 с. Результат понижения размерности при помощи метода MDS представлен на рис. 3.

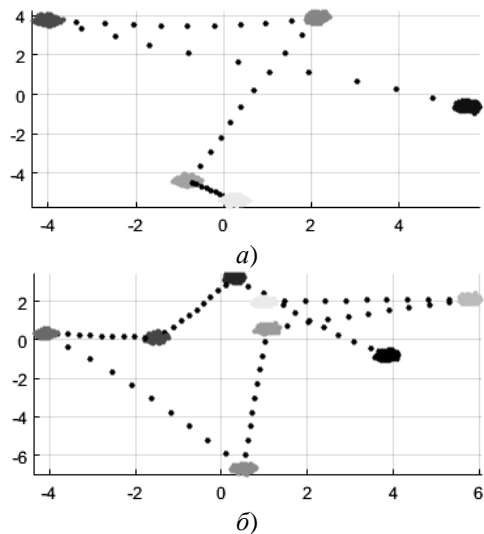


Рисунок 3 – Результат понижения размерности при помощи метода MDS:
а – 5 кластеров; б – 8 кластеров

Недостатком метода многомерного шкалирования является то, что он не позволяет учитывать распределение близлежащих точек, поскольку он использует при расчетах Эвклидовы расстояния [8]. В случае, когда многомерные данные находятся на криволинейном многообразии, расстояние между ними может быть значительно больше чем Эвклидово. Метод Isomap [8, 11] учитывает криволинейное расстояние между точками данных по данному многообразию. В Isomap, геодезические расстояния между x_i точками данных вычисляются с помощью построения графа, в котором каждая точка x_i связана с его k ближайшими соседями x_{ij} в множестве дан-

ных X . Кратчайший путь между двумя точками графа является оценкой криволинейного расстояния между этими двумя точками и определялся с помощью алгоритма Дейкстры [12–13]. Однако, при использовании данного метода к обработке результатов кластеризации характеристик технологического процесса обогащения железорудного сырья отображение исходных данных в пространство меньшей размерности оказалось некорректным. Время обработки данных составило 35,08–36,14 С. Результат понижения размерности при помощи метода Isomap представлен на рис. 4.

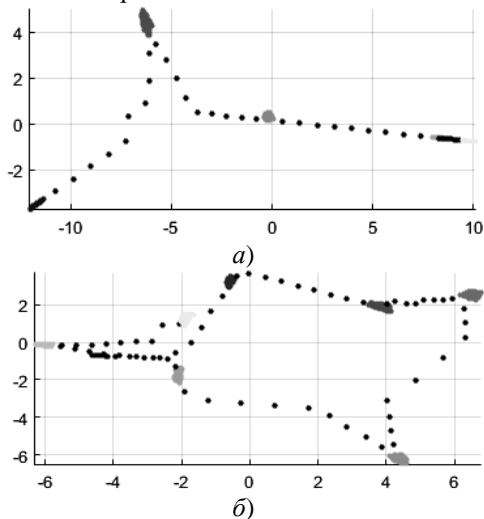


Рисунок 4 – Результат понижения размерности при помощи метода Isomap:
а – 5 кластеров; б – 8 кластеров

В соответствии с методом локальных линейных вложений (Local Linear Embedding, LLE) [8, 14] данные представляют в виде графа. В отличие от метода Isomap [11] в данном методе большую значимость имеют локальные свойства данных, что позволяет получить лучшие результаты при работе с невыпуклыми многообразиями. При этом локальные свойства многообразия около точки x_i описывают как линейную комбинацию W_i ближайших k соседей x_{ij} . Таким образом, нахождение d -размерного представления данных Y доставляет минимум весовой функции

$$F(Y) = \sum_i \left(y_i - \sum_{j=1}^k w_{ij} y_{ij} \right)^2. \quad (3)$$

Координаты представления меньшей размерности, которое минимизирует данную весовую функцию рассчитывают путем вычисления собственных векторов, соответствующих d наименьшим ненулевым собственным значениям скалярного произведения $(I-W)$, где I – единичная квадратная матрица. При использовании данного метода отображение исходных данных в пространство меньшей размерности оказалось некорректным. При этом время обработки данных составило 0,4–0,7 С. Результат понижения размерности при помощи метода LLE представлен на рис. 5.

В связи с некорректностью результатов применения метода LLE при обработке результатов кластеризации характеристик технологического процесса обо-

гащения железорудного сырья, была проанализирована возможность использования его модификации – метода Hessian LLE [7, 8]. На первом этапе определяют k ближайших соседей для каждой точки данных x_i . Базис для локального касательного пространства в точке x_i находят при помощи метода главных компонент (РСА) по его k ближайшим соседям x_{ij} .

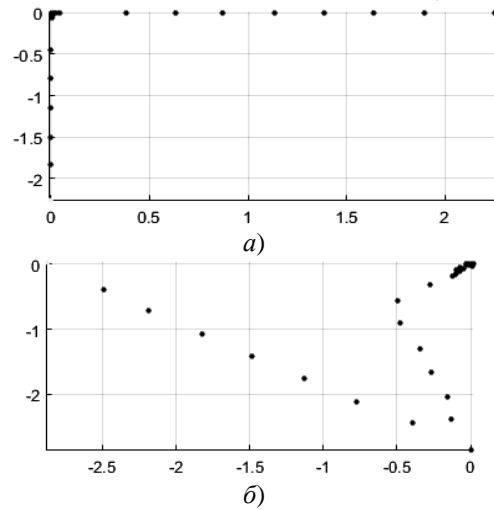


Рисунок 5 – Результат понижения размерности при помощи метода LLE:
а – 5 кластеров; б – 8 кластеров

Используя оценочную функцию гессииана матрицы H находят по формуле [7, 8]

$$H_{lm} = \sum_i \sum_j \left((H_i)_{jl} \times (H_i)_{jm} \right). \quad (4)$$

Результирующая матрица Y , которая содержит представление исходных данных в меньшей размерности, формируется из собственных векторов матрицы H , которые соответствуют d ее наименьшим ненулевым собственным значениям. При использовании данного метода отображение исходных данных в пространство меньшей размерности оказалось некорректным. При этом время обработки данных составило 3,1–3,5 С. Результат применения метода Hessian LLE представлен на рис. 6.

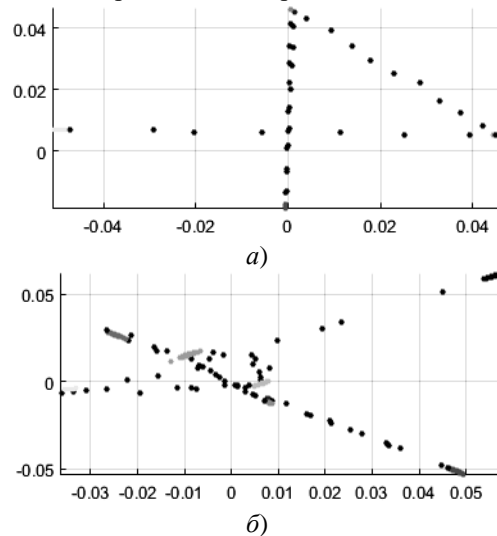


Рисунок 6 – Результат понижения размерности при помощи метода Hessian LLE:
а – 5 кластеров; б – 8 кластеров

Метод Laplacian Eigenmaps формує представлення даних меншої розмірності шляхом збереження локальних властивостей вихідного многообразя [8, 15], які базуються на парних відстанях між найближчими сусідніми точками. При розв'язанні даної задачі на першому етапі формують граф суміжності G в якому кожна точка даних x_i з'єднана з її k найближчими сусідами. Ваги ребер, що з'єднують точки x_i і x_j в графі G , визначають з використанням гауссової ядерної функції [15]

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5)$$

де σ – дисперсія: що призводить до отримання розривної матриці суміжності W . При розрахунку представлення y_i меншої розмірності мінімізують вагову функцію виду

$$F(Y) = \sum_{ij} (y_i - y_j)^2 w_{ij}. \quad (6)$$

Визначення степенної матриці M і матриці Кірхгофа L графа W дозволяє поставити задачу мінімізації як задачу знаходження власних значень [16]. В роботі [15] показано, що справедливо вираження

$$F(Y) = \sum_{ij} (y_i - y_j)^2 w_{ij} = 2Y^T LY. \quad (7)$$

Таким чином мінімізація $F(Y)$ пропорційна мінімізації $Y^T LY$. Представлення даних меншої розмірності Y може бути знайдено шляхом розв'язання узагальненої задачі знаходження власних векторів v_i

$$Lv = \lambda Mv \quad (8)$$

для d найменших ненульових власних значень. Знайдені власні вектори формують представлення Y вихідних даних меншої розмірності. При використанні даного методу відображення вихідних даних в простір меншої розмірності виявилось некоректним. При цьому час обробки даних становив 0,3–0,5 с. Результат зниження розмірності за допомогою методу Laplacian Eigenmaps представлено на рис. 7.

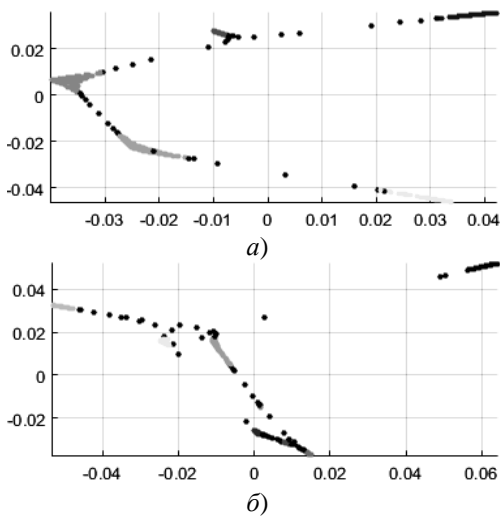


Рисунок 7 – Результат зниження розмірності за допомогою методу Laplacian Eigenmaps: а – 5 кластерів; б – 8 кластерів

Першим етапом методу карт розповсюдження (diffusion maps, DM) [8, 17, 18] є формування графа даних. Ваги ребер графа визначаються з використанням гауссових ядерних функцій, що призводить до формування матриці W . Далі, визначається нормована матриця W^*

$$w_{ij}^* = \frac{w_{ij}}{\sum_k w_{ik}}. \quad (9)$$

Отриману матрицю W^* вважають стохастичною матрицею, яка визначає матрицю ймовірностей переходів вперед динамічного процесу. Отже, матриця W^* представляє ймовірність переходу від однієї точки даних до іншої за одиницю часу. На основі ймовірностей переходу w_{ij}^* визначається відстань розповсюдження [8, 17, 18]

$$D^{(t)}(x_i, x_j) = \sum_k \frac{(w(t)_{ik}^* - w(t)_{jk}^*)^2}{\psi(x_k)^{(0)}}, \quad (10)$$

де $\psi(x_k)^{(0)} = m_i / \sum_j m_j$ – коефіцієнт, що надає більшу вагу елементам графа з більшою густиною (density); $m_i = \sum_j p_{ij}$ – ступінь вузла. Представлення меншої розмірності Y , що дозволяє зберегти відстані розповсюдження, з допомогою спектральної теорії формують з d ненульових головних власних векторів, які знаходять за вираженням

$$W^*(t)Y = \lambda Y. \quad (11)$$

Оскільки граф є пов'язаним, найбільше власне значення є нульовим, то є $\lambda_1 = 1$, його власний вектор v_1 не враховується. В представленні меншої розмірності власні вектори є нормованими за відповідними власними значеннями

$$Y = \{\lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3, \dots, \lambda_{d+1} v_{d+1}\}. \quad (12)$$

Використання даного методу дозволило отримати коректне відображення вихідних даних в простір меншої розмірності за 0,5–0,7 с. Результат зниження розмірності за допомогою методу Diffusion Map представлено на рис. 8.

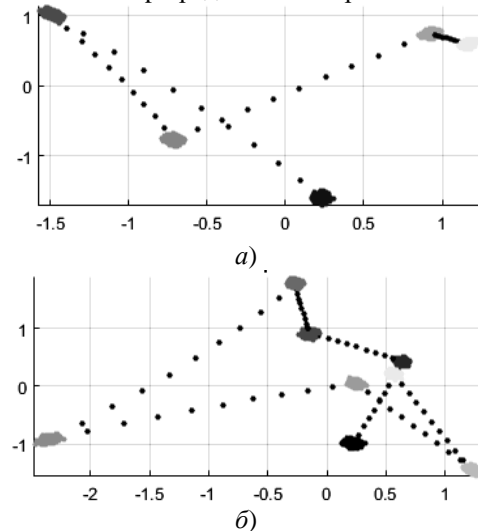


Рисунок 8 – Результат зниження розмірності за допомогою методу Diffusion Map: а – 5 кластерів; б – 8 кластерів

Метод локального аналізу касательного простору (Local Tangent Space Analysis, LTSA) описує локальні властивості даних високої розмірності використовуючи локальне касательне простору кожної точки даних [8, 19]. На першому етапі з допомогою методу головних компонент знаходять локальне касательне простору в точці x_i на основі k сусідніх точок x_{ij} . Це приводить до отображенню M_i з області навколо x_i в локальне касательне простору Θ_i . В локальному касательному простору Θ_i існує лінійне отображення L_i з координат локального касательного простору θ_{ij} в представлення меншої розмірності y_{ij} , що дозволяє виконати мінімізацію

$$\min_{Y_i, L_i} \sum_j \|Y_i J_k - L_i \Theta_i\|^2, \quad (13)$$

де J_k – матриця центрування розмірності k [20]. Розв'язок задачі мінімізації формується на основі власних векторів матриці розположення B , які відповідають d найменшим значенням матриці B . Елементи матриці B визначаються шляхом ітеративного суммування (для всіх матриць V_i і починаючи з $b_{ij}=0$ для $\forall ij$)

$$B_{N_i N_i} = B_{N_i N_i} + J_k (I - V_i V_i^T) J_k, \quad (14)$$

де N_i – матриця вибірки, яка містить індекси найближчих сусідів точки даних x_i . Слідом за цим, представлення меншої розмірності Y знаходять шляхом визначення власних векторів, відповідних d найменшим ненульовим власним векторам симетричної матриці $\frac{1}{2}(B+B^T)$. При використанні даного методу отображення вихідних даних в простору меншої розмірності виявилось некоректним. При цьому час обробки даних становив 0,5–0,7 с. Результат зниження розмірності за допомогою методу LTSA представлено на рис. 9.

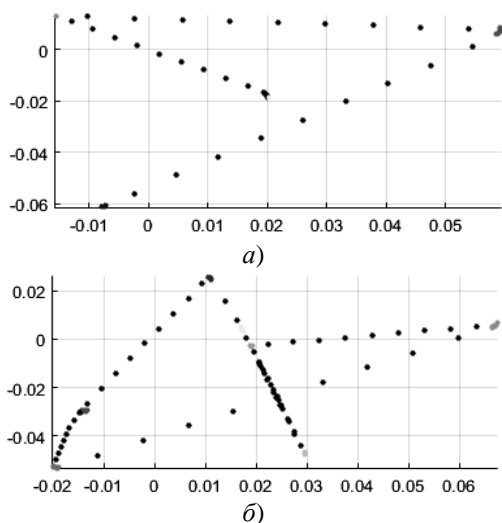


Рисунок 9 – Результат зниження розмірності при використанні методу LTSA: a – 5 кластерів; b – 8 кластерів

ВИВОДИ. Серед розглянутих методів зниження розмірності найбільш швидко обробляють дані продемонстрували методи LLE, Laplacian Eigenmaps, Diffusion Map, LTSA, PCA. З цих методів коректне відображення результатів кластеризації характеристик проб руди небагато мінералогічно-технологічних різновидностей дозволило отримати методи Diffusion Map і PCA. Крім цих двох методів цілком доцільно дослідити можливість використання методу MDS, який в даних умовах потребував порівняно більше часу на обробку даних.

ЛИТЕРАТУРА

1. Azaryan A., Azaryan V. Use of Bourger-Lambert-Bera law for the operative control and quality management of mineral raw materials // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Vol. 1. – PP. 4–8.
2. Kupin A. Application of neurocontrol principles and classification optimisation in conditions of sophisticated technological processes of beneficiation complexes // Metallurgical and Mining Industry. – 2014. – Vol. 6. – PP. 16–24.
3. Morkun V., Morkun N., Tron V. Formalization and frequency analysis of robust control of ore beneficiation technological processes under parametric uncertainty // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Vol. 5. – PP. 7–11.
4. Morkun V., Morkun N., Tron V. Distributed closed-loop control formation for technological line of iron ore raw materials beneficiation // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Vol. 7. – PP. 16–19.
5. Morkun V., Tron V. Automation of iron ore raw materials beneficiation with the operational recognition of its varieties in process streams // Metallurgical and Mining Industry. – 2014. – Vol. 6. – PP. 4–7.
6. Morkun V., Morkun N., Tron V. Model synthesis of nonlinear nonstationary dynamical systems in concentrating production using Volterra kernel transformation // Metallurgical and Mining Industry. – Vol. 10. – PP. 6–9.
7. Donoho D.L., Grimes C. Hessian eigenmaps: New locally linear embedding techniques for high-dimensional data // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2005. – Vol. 102(21). – PP. 7426–7431.
8. L.J.P. van der Maaten. An Introduction to Dimensionality Reduction Using Matlab, Report MICC 07-07, MICC/IKAT. – Maastricht: Universiteit Maastricht, 2007. – 44 p.
9. Cox T., Cox M. Multidimensional scaling. – London: Chapman & Hall, 2001. – 314 p.
10. Borg I., Groenen P. Modern Multidimensional Scaling: theory and applications (2nd ed.). – New York: Springer-Verlag, 2005. – 612 p.
11. Tenenbaum J.B. Mapping a manifold of perceptual observations // In Advances in Neural Information Processing Systems. – 1998. – Vol. 10. – PP. 682–688.
12. Mehlhorn K., Sanders P. Algorithms and Data Structures: The Basic Toolbox. – Berlin: Springer, 2008. – 305 p.

13. Denardo E.V. Dynamic Programming: Models and Applications. – NY: Dover Publications, 2003. – 230 p.

14. Roweis S.T., Saul L.K. Nonlinear dimensionality reduction by Locally Linear Embedding // Science. – 2000. – Vol. 290(5500). – PP. 2323–2326.

15. Belkin M., Niyogi P. Laplacian Eigenmaps and spectral techniques for embedding and clustering // In Advances in Neural Information Processing Systems. – 2002. – Vol. 14. – PP. 585–591.

16. Jiong-Sheng Li, Xiao-Dong Zhang. On the Laplacian eigenvalues of a graph // Linear Algebra and its Applications. – 1998. – Vol. 285. – PP. 305–307.

17. Lafon S., Lee A.B. Diffusion maps and coarse-graining: A unified framework for dimensionality reduction, graph partitioning, and data set parameteriza-

tion // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2006. – Vol. 28(9). – PP. 1393–1403.

18. Nadler B., Lafon S., Coifman R.R., Kevrekidis I.G. Diffusion maps, spectral clustering and the reaction coordinates of dynamical systems // Applied and Computational Harmonic Analysis: Special Issue on Diffusion Maps and Wavelets. – 2006. – Vol. 21. – PP. 113–127.

19. Zhang Z., Zha H. Principal manifolds and nonlinear dimensionality reduction via local tangent space alignment // SIAM Journal of Scientific Computing. – 2004. – Vol. 26(1). – PP. 313–338.

20. Shawe-Taylor J., Christianini N. Kernel Methods for Pattern Analysis. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 478 p.

ANALYSIS OF THE METHODS OF DIMENSIONALITY REDUCTION OF THE MODEL OF NONLINEAR DYNAMIC PROCESSES OF IRON ORE PROCESSING

V. Morkun, N. Morkun, V. Tron'

«Kryvyi Rih National University»

vul. XXII Partyzjzdu, 11, Kryvyi Rih, 50027, Ukraine. E-mail: vtron@ukr.net

Purpose. To find optimal method of data preprocessing for forming mathematical models of processes of enrichment mineralogical-technological varieties of iron. **Methodology.** Ore-processing technological units as a control object in the form of operators, which transforming vectors of input variables to output are presented. Since a large number of input and output variables greatly complicates the process of structural and parametric identification of mathematical models, there is a need for pre-processing reduction of their dimensions. **Results.** The analysis of existing approaches to modeling and control the formation of mineral-rich technological varieties of iron ore was accomplished. It was shown that the most promising approach to solve the automatized control problem of technological ore-processing lines is to present the controlled process as a system with lumped inputs and distributed in time and space output variables, which is the distribution function of the useful component content by size of the ore particles. The expediency of reducing the dimension of the data on the parameters of technological processes in the formation of nonlinear dynamic models was proved. The results of comparative analysis of the effectiveness of a number of methods for dimension reduction in the processing of clustering results of mineralogical and technological characteristics of varieties of iron ore were presented. Among the investigated methods of dimensionality reduction the highest processing speed demonstrated methods LLE, Laplacian Eigenmaps, Diffusion Map, LTSA, PCA. From these methods, the results display the correcting clustering of mineralogical and technological characteristics of iron ore varieties allowed to obtain by Diffusion Map and PCA methods. **Originality.** For the first time, we have carried out the integrated research of the methods of dimensionality reduction of the model nonlinear dynamic processes of iron ore processing. **Practical value.** The analysis of existing approaches to modeling and control the formation of mineral-rich technological varieties of iron ore was accomplished. It was shown that the most promising approach to solve the automatized control problem of technological ore-processing lines is to present the controlled process as a system with lumped inputs and distributed in time and space output variables, which is the distribution function of the useful component content by size of the ore particles. References 20, figures 9.

Key words: automation, control system, mathematical model, the reduction of dimension.

REFERENCES

1. Azaryan, A. and Azaryan, V. (2015), "Use of Bourger-Lambert-Bera law for the operative control and quality management of mineral raw materials", *Metallurgical and Mining Industry*, Vol. 1, pp. 4–8.

2. Kupin, A. (2014), "Application of neurocontrol principles and classification optimisation in conditions of sophisticated technological processes of beneficiation complexes", *Metallurgical and Mining Industry*, Vol. 6, pp. 16–24.

3. Morkun, V., Morkun, N., Tron, V. (2015), "Formalization and frequency analysis of robust control of ore beneficiation technological processes under parametric uncertainty", *Metallurgical and Mining Industry*, Vol. 5, pp. 7–11.

4. Morkun, V., Morkun, N., Tron, V. (2015), "Distributed closed-loop control formation for technological

line of iron ore raw materials beneficiation", *Metallurgical and Mining Industry*, Vol. 7, pp. 16–19.

5. Morkun, V., Tron, V. (2014), "Automation of iron ore raw materials beneficiation with the operational recognition of its varieties in process streams", *Metallurgical and Mining Industry*, Vol. 6, pp. 4–7.

6. Morkun, V., Morkun, N., Tron, V. (2015), "Model synthesis of nonlinear nonstationary dynamical systems in concentrating production using Volterra kernel transformation", *Metallurgical and Mining Industry*, Vol. 10, pp. 6–9.

7. Donoho, D.L., Grimes, C. (2005), "Hessian eigenmaps: New locally linear embedding techniques for high-dimensional data", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 102(21), pp. 7426–7431.

8. L.J.P. van der Maaten. (2007), *An Introduction to Dimensionality Reduction Using Matlab, Report MICC*

07-07, MICC/IKAT, Universiteit Maastricht, Maastricht, The Netherlands.

9. Cox, T., Cox, M. (2001), *Multidimensional scaling*, Chapman & Hall, London, UK.

10. Borg, I., Groenen, P. (2005), *Modern Multidimensional Scaling: theory and applications (2nd ed.)*, Springer-Verlag, New York, USA.

11. Tenenbaum, J.B. (1998), "Mapping a manifold of perceptual observations", *In Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol. 10, pp. 682–688.

12. Mehlhorn, K., Sanders, P. (2008), *Algorithms and Data Structures: The Basic Toolbox*, Springer, New York, USA.

13. Denardo, E.V. (2003), *Dynamic Programming: Models and Applications*, Dover Publications, NY, USA.

14. Roweis, S.T., Saul, L.K. (2000), "Nonlinear dimensionality reduction by Locally Linear Embedding", *Science*, Vol. 290(5500), pp. 2323–2326.

15. Belkin, M., Niyogi, P. (2002), "Laplacian Eigenmaps and spectral techniques for embedding and clustering", *In Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol. 14, pp. 585–591.

16. Jiong-Sheng, Li, Xiao-Dong, Zh. (1998), "On the Laplacian eigenvalues of a graph", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 285, pp. 305–307.

17. Lafon, S., Lee, A.B. (2006), "Diffusion maps and coarse-graining: A unified framework for dimensionality reduction, graph partitioning, and data set parameterization", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 28(9), pp. 1393–1403.

18. Nadler, B., Lafon, S., Coifman, R.R., Kevrekidis, I.G. (2006), "Diffusion maps, spectral clustering and the reaction coordinates of dynamical systems", *Applied and Computational Harmonic Analysis: Special Issue on Diffusion Maps and Wavelets*, Vol. 21, pp. 113–127.

19. Zhang, Z., Zha, H. (2004), "Principal manifolds and nonlinear dimensionality reduction via local tangent space alignment", *SIAM Journal of Scientific Computing*, Vol. 26(1), pp. 313–338.

20. Shawe-Taylor, J., Christianini, N. (2004), *Kernel Methods for Pattern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Стаття надійшла 31.03.2016.