

УДК 621.96/98(075)

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ ФОРМЫ ЗАГОТОВКИ В ЗОНЕ СВОБОДНОГО ИЗГИБА****А. А. Черныш**Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского  
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: chiernysh72@mail.ru

Рассмотрены расчетные схемы формоизменяющих операций листовой штамповки. Это схемы, в которых окончательная форма заготовки полностью определяется формой инструмента, давлением жидкости или газа, электромагнитным воздействием, и схемы, в которых участки заготовки деформируются без контакта с инструментом. В последнем случае при формовке законцовок прямолинейных рифтов экономически и технологически оправдано формовать без контакта с пуансоном. Для прогнозирования формы поверхности законцовки рифта при решении задачи формоизменения обосновано применение методов вариационного исчисления. Применение этих методов базируется на энергетических принципах механики сплошных сред, в частности, принципе минимума полной энергии деформации. Обосновано применение вариационных принципов к задачам, связанным с определением площади очага деформации и площади поверхности заготовки вне контакта с инструментом. Проведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными. Погрешность не превышает 4–5 %.

**Ключевые слова:** формоизменение, листовая штамповка, рифт, гофры, свободный изгиб.

**ПРОГНОЗУВАННЯ ОСТАТОЧНОЇ ФОРМИ ЗАГОТОВКИ В ЗОНІ ВІЛЬНОГО ВИГИНУ****А. А. Черныш**Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського  
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна, E-mail: chiernysh72@mail.ru

Розглянуто розрахункові схеми формозмінних операцій листового штампування. Це схеми, в яких остаточна форма заготовки повністю визначається формою інструмента, тиском рідини чи газу, електромагнітним впливом і схеми, в яких ділянки заготовки деформуються без контакту з інструментом. В останньому випадку при формуванні законцовок прямолінійних рифтів економічно і технологічно виправдане формувати без контакту з пуансоном. Для прогнозування форми поверхні законцовки рифта при вирішенні задачі формозміни обґрунтовано застосування методів варіаційного числення. Застосування цих методів базується на енергетичних принципах механіки суцільних середовищ, зокрема, принципі мінімуму повної енергії деформації. Обґрунтовано застосування варіаційних принципів до завдань, пов'язаних з визначенням площі осередку деформації і площі поверхні заготовки поза контакту з інструментом. Проведено порівняння результатів розрахунку з експериментальними даними. Похибка не перевищує 4–5 %.

**Ключові слова** формо зміння, листове штампування, рифт, гофри, вільний вигін.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** В практике расчёта формоизменяющих процессов листовой штамповки используется теория оболочек. Расчётные схемы могут быть двух видов [1]. В схемах первого вида характер формоизменения заготовки полностью определяется формой инструмента. В расчётных схемах второго вида, рассмотрению подлежат участки заготовки, которые деформируются без контакта с инструментом. В дополнение к этим схемам можно добавить и третью. В этой схеме роль инструмента выполняет поле давления жидкости, сыпучей среды, газа или электромагнитное. В результате расчёта по второй схеме необходимо определить форму участка заготовки.

Наличие участков заготовки не контактирующих с инструментом характерно для процессов вытяжки из плоской заготовки, отбортовки, рельефной формовки, радиально ротационного профилирования, задачи разжимным пуансоном, обтяжки листовых полуфабрикатов, гибки моментом, изгиба со сжатием или растяжением в тангенциальном направлении, самопроизвольного формоизменения, бесфильтрного волочения и т.д. [2].

Даже в простейшем случае вытяжки осесимметричных деталей из плоской заготовки участок заготовки между перетяжным ребром матрицы и боковой поверхностью пуансона имеет не коническую форму [3]. Это приводит к тому, что в системе урав-

нений равновесия, одно является избыточным, что вызывает значительные погрешности расчёта перемещений. Однако для практики в перечисленных процессах форма поверхности на свободно деформируемых участках практически не имеет значения. Но в ряде случаев, в частности при штамповке плоских деталей с прямолинейными рифтами, законцовку рифта можно оформить не прикладывая к заготовке деформирующих усилий. т.е. длина пуансона соответствует длине рифта без законцовки или её части, а форма законцовки образуется под действием свободного изгиба. Это позволит уменьшить величину деформирующих усилий, исключить образование гофр, сохранить качество поверхности заготовки и т.д.

В этом случае существует необходимость решения комплекса задач, а именно:

- оценки влияния изгиба на величину меридиональных напряжений в том случае, когда изменение радиусов кривизны срединной поверхности не определяется рабочим инструментом;
- определение кривизны оболочки на участках свободного изгиба;
- определения формы поверхности самопроизвольно деформируемых элементов заготовки не контактирующих с поверхностью инструмента;
- прогнозирования формы элементов поверхности заготовки при потере устойчивости.

Среди этих задач наиболее востребованной является определение конечной формы законцовки рифта, которая характеризуется радиусами кривизны в меридиональном и широтном сечениях [3].

В ряде случаев, в частности, для оболочек одинарной кривизны, величина этого радиуса может быть приближённо определена при использовании дополнительных допущений или при некоторой схематизации условий деформирования [1].

Решение задачи свободного изгиба и определения радиуса кривизны в меридиональном сечении с использованием принципа возможных перемещений, метода решения уравнений равновесия получено в работах Ильюшина А.А., Попова Е.А. и Вершинина В.И. [1, 4, 5]. Однако погрешность в расчётных значениях меридионального радиуса кривизны в отдельных случаях может достигать 20-30% фактических значений. Кроме того нет зависимостей, позволяющих определить предельную длину законцовки рифта в зоне свободного изгиба.

Для прогнозирования окончательной формы отштампованной детали нашли применение специальные и приближённые методы механики сплошных сред [6, 7]. К ним относятся методы характеристик, сопротивления материалов пластическим деформациям, переменного секущего модуля, дополнительных напряжений, переменной вязкости и др. Большие возможности для решения задач пластичности открывают вариационные методы. Эти методы достаточно обоснованы и в применении к вариационным уравнениям выглядят значительно проще, по сравнению с применением их непосредственно к дифференциальным уравнениям равновесия.

Традиционно вариационные уравнения выражают энергетические принципы механики сплошных сред, в частности, принципы минимума полной энергии деформации. В самом общем виде принцип минимума полной энергии вытекает из принципа наименьшего действия. Этот принцип является истинным законом движения, которому соответствует минимальное значение действия. Действием называют интеграл от функции Лагранжа L.

В теории пластичности действительная форма равновесия тела отличается от всех возможных форм тем, что сообщает полной энергии минимальное значение. Ряд задач формоизменения с определённой степенью точности возможно решить не используя интеграла от функции Лагранжа, т.е. не определяя поля скоростей, деформаций и напряжений. Например, при определении площади очага деформации при плющении проволоки круглого сечения предполагалось, что эта площадь из всех возможных будет минимальной [1]. Такое предположение с высокой степенью достоверности подтвердилось при определении площади очага деформации на промежуточных стадиях плющения. В рассматриваемом случае можно предположить, что площадь между перетяжными ребрами и торцевой поверхностью будет минимальной из всех возможных.

Цель исследования – уточнение расчётных значений радиуса кривизны в меридиональном сечении и длины законцовки рифта в зоне свободного изгиба.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Предположим, что поверхность законцовки рифта, которая деформируется вне контакта с инструментом (пуансоном) расположена между торцем пуансона и кромкой матрицы имеет минимальную площадь. В этом случае необходимо решить задачу о нахождении поверхности минимальной площади, натянутой на данный контур, образуемый торцем пуансона и контуром матрицы, оформляющей законцовку рифта. Задача сводится к исследованию на минимум функционала

$$S[x_3(x_1, x_2)] = \iint_{(\sigma)} \left[ 1 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{0.5} dx_1 dx_2. \quad (1)$$

Уравнение Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] = 0 \quad (2)$$

Точное решение этого уравнения не выражается через элементарные функции. Рассмотрим выражение, описывающее увеличение площади заготовки

$$\Delta S = \iint_{(\sigma)} \left[ 1 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{0.5} dx_1 dx_2 = \iint_{(\sigma)} \left[ \left[ 1 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{0.5} - 1 \right] dx_1 dx_2 \quad (3)$$

Разложим подинтегральную функцию в ряд и отбросим члены высшего порядка малости:

$$\Delta S = \iint_{(\sigma)} \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)^2 + R_n \right] - 1 \right\} \cdot dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} \left[ \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 \quad (4)$$

где  $R_n$  – члены высшего порядка малости;  
В процессе формоизменения заготовки совершается работа

$$\Delta W = 0,5T \iint_{(\sigma)} \left[ \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2, \quad (5)$$

где T – усилие на единицу площади заготовки.

Из всех возможных форм равновесия заготовка выбирает такую, для которой потенциальная энергия минимальна. Таким образом, задача сводится к минимизации интеграла (1). Используя уравнение Эйлера, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{T}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{T}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (6)$$

После сокращения получим

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} = 0. \quad (7)$$

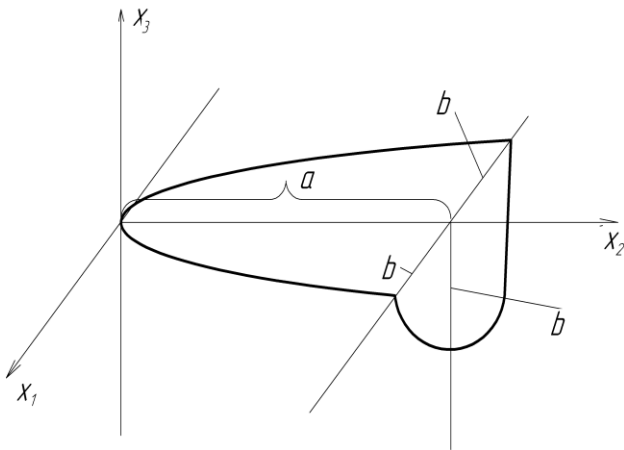


Рисунок – 1 Геометрические параметры законцовки рифта

Следовательно форма поверхности заготовки удовлетворяет уравнению Лапласа при граничных условиях рис.1

$$\begin{aligned} x_3(0, b) &= 0, & x_3(a, x_2) &= \varphi_1(x_1); \\ x_3(x_1, 0) &= 0, & x_3(x_1, b) &= \varphi_2(x_1) \end{aligned}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x_3(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n e^{\frac{n\pi x_2}{b}} + \beta_n e^{-\frac{n\pi x_2}{b}} \right) \cdot \sin \frac{n\pi x_1}{b}, \quad (8)$$

$$\text{где } \alpha_n = A \left( I_2 - I_1 e^{-\frac{n\pi a}{b}} \right),$$

$$\beta_n = A \left( I_1 e^{\frac{n\pi a}{b}} - I_2 \right), A = \frac{2}{b \left( e^{\frac{n\pi a}{b}} - e^{-\frac{n\pi a}{b}} \right)},$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^b \varphi_1(x_1) \sin \frac{n\pi x_1}{b} dx_1, \\ I_2 &= \int_0^b \varphi_2(x_1) \sin \frac{n\pi x_1}{b} dx_1. \end{aligned}$$

Без большого ущерба по точности, для деталей с прямолинейными рифтами круглого сечения, считаем поверхность заготовки вне контакта с пуансоном поверхностью вращения. Последняя, деформируется между двумя кольцами, расположенными перпендикулярно их линии центров. Диаметры колец разные, соответствующие форме пуансона и законцовки рифта. Как известно, в интегральном исчислении площадь поверхности вращения равна

$$S = 2\pi \int_{-L}^{+L} x_2 dL = 2\pi \int_{-L}^{+L} x_2 \sqrt{1 + x_2'^2} dx_1, \quad (9)$$

Необходимо найти функцию  $x_2(x_1)$ , реализующую минимум интеграла (9) при граничных условиях

$$x_2(-L) = r, \quad x_2(L) = \beta r,$$

где  $\beta$  – отношение радиусов пуансона и законцовки рифта.

Уравнение Эйлера для вариационной задачи приводится к виду

$$\frac{x_2}{\sqrt{1 + x_2'^2}} = c_1 / 2\pi. \quad (10)$$

Обозначив правую часть через  $1/n$ , и выполнив преобразования получаем

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{n^2 x_2^2 - 1}} = \pm x_1. \quad (11)$$

Интеграл вычисляется с использованием подстановки  $x_2 = \frac{e^{nt} + e^{-nt}}{2n}$  и равен

$$\pm \int dt = \pm t + C_2, \text{ или } x_2 = \frac{e^{n(x_1+c)} + e^{-n(x_1-c)}}{2n} \quad (12)$$

Следовательно, искомая поверхность заготовки получается в результате вращения цепной линии.

Для удовлетворения граничных условий необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} e^{n(-L+C)} + e^{-n(-L+C)} &= 2nr; \\ e^{n(L+C)} + e^{-n(L+C)} &= 2\beta nr. \end{aligned} \quad (13)$$

Решая систему уравнений (13) получим

$$C = -\left[ L + \frac{1}{n} \ln(e^{2-nL} - 2nr) \right]. \quad (14)$$

$$\text{При } r \rightarrow 0, \quad C = -L - \frac{1}{n}(2 - nL) = -\frac{2}{n}.$$

Графическое решение уравнений даёт либо два решения при малых L или ни одного при достаточно больших L. Для одного решения реализуется минимум площади заготовки, а для другого максимум. Поэтому первое решение даёт устойчивую форму заготовки при малых значениях L. Если увеличить L (при данном r) поверхность стягивается к линии центров, т.е. выгибается к этой линии. Для расчёта соотношений  $\frac{L}{r} = \lambda$  при которых возможно равновесие необходимо найти точку касания графиков левой и правой частей уравнений (10) [8-10]. Это возможно когда графики касаются друг друга, т.е. производные от обеих функций по n равны

Таблица 1 – Экспериментальные и расчётные значения  $R_m$  при обжиге в матрице с углом конусности  $\alpha_k = 20^\circ$  медной трубы диаметром  $D_3 = 75$  мм, толщиной 2 мм, при различных значениях диаметра, на который обжимается торец трубы  $d_0$

Обозначение величины	Значения $\frac{d_0}{D_3}$				
	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75
$R_{\max}$ , кН	18	30	45	60	75
$R_m$ фактическое, мм	48	38	33	30	28
$R_m$ расчётное в мм по Ильюшину А.А.	75	42,7	29,2	22,7	18,7
$R_m$ расчётное в мм по зависимости (12)	49,3	40,2	30,8	28,7	27,6

**ВЫВОДЫ.** При использовании методов вариационного исчисления точность прогнозирования окончательной формы заготовки на участке свободного изгиба составляет 4–10 % от фактической. Применение метода вариационного исчисления позволяет установить предельную длину зоны свободного изгиба для получения законцовки рифта, которая составляет 0,7 R, где R – радиус прямолинейного рифта цилиндрического сечения.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Ленанд, 2014. – 310с.
2. Черныш А.А. Формовка прямолинейных рифтов укороченным пуансоном // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчуг: КрНУ, – 2015. – Вип. 1 (90)/2015, ч.2. – С. 70–74.
3. Применение конечно-элементных аппроксимаций в экспериментальных исследованиях процесса формовки прямолинейного рифта / А.А. Черныш,

$$Le^{Ln} - Le^{-Ln} = \frac{2}{r}. \quad (15)$$

При  $\beta = 1$  уравнение (11) примет вид

$$e^{\sqrt{1+\lambda^2}} - e^{-\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{2}{\lambda}. \quad (16)$$

Численный расчёт даёт значение  $\lambda=0,7$ .

При  $r = 0$ ; а  $\beta r = R$  уравнение (11) примет вид

$$\frac{e^{\sqrt{1+e^{-4}\lambda^2}} - e^{-\sqrt{1+e^{-4}\lambda^2}}}{2} = \frac{1}{\lambda}. \quad (17)$$

Критическое значение  $\lambda$  в этом случае равно 1,33.

Возможность использования зависимостей Ильюшина А.А. [1] для основных формоизменяющих операций листовой штамповки для определения радиуса кривизны в меридиональном сечении  $R_m$  оценена в работе Голенкова В.А. [5]. Сопоставим эти данные с полученными по зависимости (12) представлены в табл. 1.

- Г.В. Прудников, В.Ю. Черкащенко, В.В. Драгобецкий // Обработка металлов давлением. – Краматорск: ДГМА, 2013. – Вып. 2 (35). – 2013. – С. 19–24.
4. Ковалёв В.Г., Ковалёв С.В. Технология листовой штамповки. Технологическое обеспечение точности и стойкости. – М.: КНОРУС, 2010. – 224 с.
5. Специальные технологические процессы и оборудование обработки давлением / В.А. Голенков, А.М. Дмитриев, В.Д. Кухарь, С.П. Яковлев. – М.: Машиностроение, 2004. – 464 с.
6. Исаченков Е.И. Штамповка резиной и жидкостью. – М.: Машиностроение, 1967. – 368 с.
7. Астапов В.Ю., Джоздани М.С., Попов А.П. Экспериментальное определение формообразования профиля окантовок из листового материала воздействием импульсного магнитного поля // Кузнечно-штамповое производство. Обработка металлов давлением. – Москва: МГТУ, 2011. – № 8. – С. 9–12.
8. Jounf F. Deep drawing with «rubber dies», «Modern Metals», №4, 1951, May, V. 7, p. 28–30.

9. Weidemann C. The blank holding action of draw beads. «Sheet metal Forming and Formability. Proc. IDDRG 10 Bienn. Congr., Warnick, 1988», Red-hill, 1988, p. 79–85.

10. Драгобецкий В.В. Пути повышения деформируемости слоистых металлических заготовок при обработке давлением // Вісник КрНУ. – Кременчук: КДПУ, 2005 Вип. 1/2005(30). – С.53–56.

### PREDICTION OF THE FINAL WORKPIECE SHAPE IN THE FREE BENDING

**A. Chernysh**

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

вул. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail: chiernysh72@mail.ru

**Purpose.** Determination of the geometry of parts in the free bending zone, that is out of contact with the punch.

**Methodology.** The paper considers the calculation schemes for forming flat blanks. In the schemes of the second type the sections of the blank which are out of contact with the instrument are deformed. When calculating this scheme the task arises to determine the shape of the workpiece in this section. **Results.** In the system of equilibrium equations for free-deformable sections one of them is redundant, making it difficult to calculate the final forming. For most processes of the stamping, the surface shape in the free-deformable sections does not matter. However, at the ending of the rift in the stamping of flat sheet metal parts with straight rifts by a shortened punch it is necessary to solve a complex of tasks. **Originality.** The most essential of which is the determination of the radii of curvature in the meridional and latitudinal sections in the free bending zone. It is assumed that the surface of the ending of the rift between the end of the punch and the edge of the die is minimal. **Practical value.** The problem of finding a minimal surface area is solved. The workpiece surface form satisfies the Laplace equation. During the solution it was found that the desired workpiece surface is formed by the rotation of the centenary line. Also, the critical value of the rift ending length at which the forming is stable, is determined. The limiting length of the free bending zone for ending the rift has been determined. References 10, tables 1, figures 1.

**Key words:** forming, stamping, rift, flutes, free bending.

### REFERENCES

1. Ilushkin, A.A. (2014), *Mehanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics], Lenand, Moscow, Russia.

2. Chernysh, A.A. (2015), "Forming straight rifts by a shortened punch", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, vol. 1, no 90, pp. 70–74.

3. Chernysh, A.A., Prudnikov, G.V., Cherkashenko, V.Y., Dragobetskiy, V.V. (2013), "Application of finite element approximations in experimental researches of the rectilinear corrugation stamping", *Materials working by pressure*, vol. 2, no 35, pp. 19–24.

4. Kovalev, V.G., Kovalev, S.V (2010), *Tehnologiya listovoy shtampovki. Tehnologicheskoe obespechenie tochnosti i stoykosti* [Technology of sheet metal forming. Technology of ensuring the precision and durability], KNORUS, Moscow, Russia.

5. Golenkov, V.A., Dmitriev, A.M., Kuhar, V.D. and Yakovlev S.P. (2004), *Spetsialnyie tehnologicheskie protsessy i oborudovanie obrabotki davleniem* [Special technological processes and equipment of pressure processing], Mashinostroenie, Moscow, Russia.

6. Isachenkov, E.I. (1967), *Shtampovka rezinoy i zhidkostyu* [Stamping rubber and liquid], Mashinostroenie, Moscow, Russia.

7. Astapov, V.U., Dgozdani, M.S., Popov, A.P. (2011), "Experimental determination of the forming profile of the sheet of sheet material with a pulsed magnetic field", *Kuznechno-shtampovoe proizvodstvo. Obrabotka metallov davleniem*, no.8, pp. 9–12.

8. Jounf, F. (1951), "Deep drawing with rubber dies", *Journal of Modern Metals*, no. 4, vol. 7, pp. 28–30.

9. Weidemann, C. (1978), "The blank holding action of draw beads", *Sheet metal Forming and Formability. Proc. IDDRG 10 Bienn. Congr., Warnick, 1978*, Red-hill, pp. 79–85.

10. Dragobetskiy, V.V. (2005), "Ways to improve the deformability of layered metal workpieces under pressure treatment", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, vol. 1, no 30, pp. 53–56.

Стаття надійшла 11.01.2016.